

李模型中极点的运动*

張 宗 燧

(中国科学院)

提 要

本文指出,在李模型中,不论有否左方割线和非弹性割线,只要不引入 CDD 极点,第二叶不具有代表共振态的极点。当 CDD 极点被引入后,第二叶极点可能在偶合常数增加时穿过正常割线而走入第一叶,但在这以前,另有一极点自左方(或穿过左方割线,或在 $-\infty$)走入第一叶。文中画出了一种情形下的二叶的全部极点的运动。

这篇短文拟讨论李模型中振幅的极点在偶合常数 g^2 变化时的运动。我们希望,代表共振态的、在第二个里曼叶中的极点能严格地被证明存在,并且在偶合常数 g^2 变大时,能变为一个代表束缚态的、在第一叶的一个极点^[1]。为清楚起见,我们分别讨论有左方割线的和没有左方割线的李模型。这里所得的定性结果,无疑地对其他模型(例如 Zachariasen 模型^[2])也部分有效。

首先,可以证明:在具有左方割线的李模型中,如果不引入振幅的倒数的 CDD 极点,则振幅不具有代表共振态的、在第二叶出现的极点。当 CDD 极点被引入时,上述的代表共振态的极点才出现。我们画出了此时第一叶、第二叶的所有的极点在 g^2 变化时的运动。在这里,代表共振态的极点可以在 g^2 增加时走入第一叶,变为代表束缚态的极点,但在此发生前,另有一个极点自第二叶穿过左方割线走入第一叶,相应于无左割线的李模型中的鬼态。

其次,本文讨论不具有左方割线的李模型。此时同样可以证明,在 CDD 极点引入前,振幅不具有代表共振态的极点。此时,还可以证明在 $g^2 > 0$ 时极点不能自第一叶走入第二叶,或自第二叶走入第一叶。当 CDD 极点被引入后,代表共振态的极点可以被证明存在,并且在 g^2 增加时能通过割线而走入第一叶。在此发生前,另有一极点在 $\omega = -\infty$ (ω 为能量)处走进第一叶,成为熟知的鬼态。

以下给上面所述以一个证明。 g^2 此后了解为附有一个小的虚数部分,而它的实数部分在 $(-\infty, \infty)$ 中变化。

一、具有左方割线的李模型

令

$$N + \theta \rightleftharpoons V, V + \bar{\theta} \rightleftharpoons N;$$

N, V 为稳定粒子, $\bar{\theta}$ 为 θ 的反粒子, 质量分别为 m_N, m_V, μ 。矩陣元 $\langle N\theta_i | S | N\theta_i \rangle$,

* 1965 年 4 月 1 日收到。

$\langle N\bar{\theta}_f | S | N\bar{\theta}_i \rangle$ 为

$$\left. \begin{aligned} &\delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) - 2\pi i \delta(\omega_i - \omega_f) F(\omega)/2\omega, \\ &\delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f) - 2\pi i \delta(\omega_i - \omega_f) F_1(\omega)/2\omega. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f; \omega_i, \omega_f$ 分别为 θ (或 $\bar{\theta}$) 的初末动量和能量; 而 $F(\omega), F_1(\omega)$ 满足^[3,4]

$$\left. \begin{aligned} &F(\omega) = F_1(-\omega), \\ &F(\omega) = \frac{g^2}{\omega - \omega_0} - \int_{\mu}^{\infty} \frac{2\pi k' |F(\omega')|^2 (1 + \eta(\omega'))}{\omega' - \omega} d\omega' - \\ &\quad - \int_{\mu}^{\infty} \frac{2\pi k' |F_1(\omega')|^2 (1 + \eta_1(\omega'))}{\omega' + \omega} d\omega', \\ &\omega_0 = m_V - m_N, \quad k = (\omega^2 - \mu^2)^{1/2}, \\ &k' = |(\omega'^2 - \mu^2)^{1/2}|, \\ &\eta(\omega) = \eta_1(-\omega); \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 η 等为考虑非弹性散射后所引入的修正, 它满足

$$\begin{aligned} \eta(\omega) &= 0, \quad \omega < 2\mu; \\ \eta(\omega) &= 1, \quad \omega \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

由式(2)所决定的 F, F_1 可以认为是 F, F_1 在第一叶的值, 以 $F^{(1)}, F_1^{(1)}$ 代表之; 令 $k = (\omega^2 - \mu^2)^{1/2}$ 的意义为一具有割线 $(-\infty, -\mu), (\mu, \infty)$ 的、在 $\omega = \infty + i\epsilon$ 处为 ∞ 的函数。此时

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2 F^{(1)}(\omega)} &= i(\omega^2 - \mu^2)^{1/2} - i(\omega_0^2 - \mu^2)^{1/2} + a(\omega - \omega_0) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{2\mu}^{\infty} \frac{k' \eta(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{2\mu}^{\infty} \frac{k' \eta_1(\omega') d\omega'}{(\omega' + \omega)(\omega' + \omega_0)^2}, \\ a &= 1/2\pi^2 g^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在第二叶 [定义为通过 $(\mu, 2\mu)$ 所到达处], 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2 F^{(2)}(\omega)} &= -i(\omega^2 - \mu^2)^{1/2} - i(\omega_0^2 - \mu^2)^{1/2} + a(\omega - \omega_0) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int \frac{k' \eta(\omega')}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)^2} d\omega' + \frac{1}{\pi} \int \frac{k' \eta_1(\omega')}{(\omega' + \omega)(\omega' + \omega_0)^2} d\omega', \end{aligned} \quad (4)$$

$F^{(2)}$ 代表第二叶的 F 。在引入减步骤后, 式(3), (4)右方要作相应的改变, 在此不作讨论。为简单起见, 令 $\omega_0 = 0$ 。式(4)原来仅在 $\text{Im } \omega \approx 0, \text{Re } \omega > \mu, \text{Re } \omega < 2\mu$ 处成立, 但显然可以开拓至所有的 ω 。

先设 $\eta = \eta_1 = 0$, 亦即假定弹性么正条件到处满足。此时, 自式(3), (4)可以看出 $F^{(1)}, F^{(2)}$ 共有二个极点。

- (i) 极点 $\omega = 0$; 它不运动, 始终处在第一叶中。
- (ii) 极点

$$\omega = -2a\mu(1 + a^2)^{-1}; \quad (5)$$

当 $|a| > 1$ 时, 它处在第二叶中; 当 $|a| < 1$ 时, 它处在第一叶中。在 g^2 变化时, 亦即 a^2 变化时, 它的运动如图 1 所示。我们画出了 g^2 附有 $i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) 的情形。

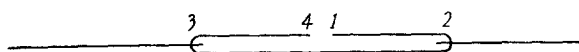


图 1

说明: 1 点—— $g^2 = -\infty, a = 0_-$; 2 点—— $g^2 = -(2\pi^2)^{-1}, a = -1$;
3 点—— $g^2 = (2\pi^2)^{-1}, a = 1$; 4 点—— $g^2 = \infty, a = 0_+$. g^2 附有
 $+i\epsilon$. 12, 34 在第一叶; 23 在第二叶.

现在引入 η, η_1 . 为此, 我们研究极点在 a 固定而 η, η_1 有一小增加时的变化. 假定对某一 (η, η_1) , 极点已知在实轴段 $(-\mu, \mu)$ 附近. 由于在此点上

$$d\omega(\text{极})/d\eta = \text{实}, \quad d\omega(\text{极})/d\eta_1 = \text{实};$$

极点在 η, η_1 有小增加时依然为实数. 注意, 由于 (3) 和 (4), 极点不可能出现于实轴段 $(\mu, 2\mu), (-2\mu, -\mu)$ 附近, 因此原有的极点在 η, η_1 作小增加后, 依旧在实轴段 $(-\mu, \mu)$ 附近. 至于自割线上新出现的极点, 那末可以看到: 在讨论第一叶, 第二叶的全体极点时, 不用考虑割线段 $(\mu, 2\mu), (-2\mu, -\mu)$ 上某处所出现的新的极点; 而割线 $(2\mu, \infty), (-\infty, -2\mu)$ 上则根本不可能出现新的极点 (由于 $\text{Im}(1/F^{(1)}), \text{Im}(1/F^{(2)})$ 在那些实轴段附近不为零, 见下节). 对 η, η_1 的生长用归纳法, 不难证明在 η, η_1 被引进后极点依然在实轴段 $(-1, 1)$ 附近.

现在引入 CDD 极点, 亦即将式 (3), (4) 中的 $a\omega$ 换为带极点的项, 如 $(a_1\omega + a_2\omega^2)/(\omega - b)$ 等. 此时 η, η_1 无关紧要, 可以忽略.

在选择项

$$(a_1\omega + a_2\omega^2)/(\omega - b) \quad (6)$$

时曾作了如下考虑. 首先, 为了使第一叶的函数具有一不动极点 $\omega = 0$, 式 (6) 必须在 $\omega \approx 0$ 处行为如 $k\omega$, k 为一常数. 其次, 为了使 $\text{Im} F^{(1)}$ 在 $|\omega| > \mu$ 处不为零 (么正条件), b 的值必须落在 $(-\mu, +\mu)$ 中. 最后, 由 $F^{(1)}$ 在 $\omega \approx 0$ 的行为, 知

$$-a_1/b = 1/(2\pi^2 g^2). \quad (7)$$

现在为简单起见, 令 $a_2 = 0$, 写 a_1 为 a , 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2 F^{(1)}(\omega)} &= i(\omega^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} + \mu + \frac{a\omega}{\omega - b}, \\ \frac{1}{2\pi^2 F^{(2)}(\omega)} &= -i(\omega^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} + \mu + \frac{a\omega}{\omega - b}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

让 b 不变而 a 变化, 根据上式来讨论 $F^{(1)}, F^{(2)}$ 的极点的运动.

我们发现 $F^{(1)}, F^{(2)}$ 共有四个极点. 第一个极点为 $\omega=0$, 是不动的, 在第一叶中. 此外的三个极点在 a 附有一小的正虚数部分时作如下运动. 第二个极点在 $a = -\infty$ 时在下半平面原点附近, 在第二叶中. 当 a 自 $-\infty$ 增加时, 它沿实轴运动, 如图 2 所示; 当 a 通过 $-\mu - b$ 时, 它在 $-\mu$ 附近穿过 $(-\infty, -\mu)$ 割线而进入第一叶; 当 a 增加至 0 时, 它到达 $\omega = 0$ 点. 如果令

$$-\omega^{-1}(\omega - b)[i(\omega^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} + \mu]$$

当 ω 在 $(-\mu, \mu)$ 中变化时在 $\omega = \omega_1$ 取最大值 a_1 , 那末 $a_1 > 0$, 而 ω_1 在 $(0, b)$ 中. 当 a 增加至 a_1 时, 这个极点到达 ω_1 , 此后变为复数, 走入下半平面 (见图 2). 第三个极点在 $a = -\infty$ 时在 $b - i\infty$ 处, 在第二叶中. 如果令

$$-\omega^{-1}(\omega - b)[-i(\omega^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} + \mu]$$

当 ω 在 $(0, \mu)$ 变化时在 $\omega = \omega_{II}$ 处取极小值 a_{II} , 那末 $a_{II} < -\mu + b$, 而 ω_{II} 落在 (b, μ) 中. 当 a 自 $-\infty$ 增加至 a_{II} 时, 这个极点开始取实值, 此后沿实轴向右运动. 当 a 通过 $-\mu + b$ 时, 它通过割线 (μ, ∞) 走入第一叶; 此后沿实轴向左移动. 在 a 到达 a_I 时, 它变为 ω_I , 此后变为复数 (见图 3). 最后一极点始终在第二叶中 (见图 4). 在 $a < a_{II}$ 时, 第三、第四极点互为复共轭; 在 $a > a_I$ 时, 第二、第三极点互为复共轭.

图 2, 3, 4 都是在 $b > 0$ 时画出的, 当然也可以画出 $b < 0$ 时的图, 以得到类似的结果. 但只有选择 $b > 0$ 才能使一些极点的实数部分大于 μ , 而代表共振态. 可以证明, 第三、第四两个极点的实数部分当 a 在 $(-\infty, -\mu + b)$ 中时落在 $(\frac{1}{2}b, b + \frac{1}{2}\mu)$ 中, 这要求 $b > \frac{1}{2}\mu$. 这也说明共振态能量在我们的模型中不能超过 $\frac{3}{2}\mu$.

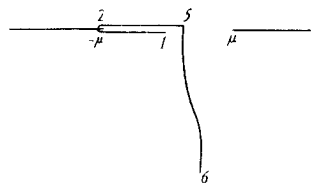


图 2 1—— $a = -\infty$; 2—— $a = -\mu - b$; 3—— $a = a_{II} < -\mu + b$;
4—— $a = -\mu + b$; 5—— $a = a_I > 0$;
6—— $a = \infty$. (图 3, 4 的说明与此相同)

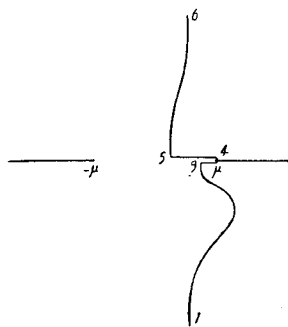


图 3

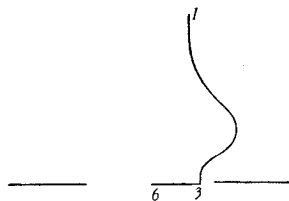


图 4

由此可见, 当 b 取大于 $\frac{1}{2}\mu$ 的值时, 共振态是存在的, 它是第三个极点. 由上面的图也可以看出, 当 g^2 逐渐增加时, 这个极点自第二叶穿过正常割线走入第一叶而成为代表束缚态的极点. 但在这发生前, 第二极点已自第二叶通过左割线而进入第一叶.

二、没有左割线的李模型

现在讨论没有左方割线的李模型, 即 $\bar{\theta}$ 不存在的情形. 我们依旧取 $\omega_0 = 0$. 当 CDD 极点不存在时

$$\frac{1}{\omega F^{(1)}} = \frac{1}{g^2} + \omega \int_{\mu}^{\infty} \frac{2\pi k'(1 + \eta')}{\omega' - \omega} \frac{1}{\omega'^2} d\omega'. \quad (9)$$

对于 N- θ 散射, η 是不存在的, 但我们可讨论 V- θ 散射. $F^{(2)}$ 满足

$$\frac{1}{\omega F^{(2)}} = \frac{1}{g^2} + \omega \int \frac{2\pi k'(1+\eta')}{\omega' - \omega} \frac{1}{\omega'^2} d\omega' - \frac{4\pi^2 k}{\omega} i. \quad (10)$$

首先, 让我们证明当 $g^2 > 0$ 时 $F^{(1)}$ 没有极点可以自上半平面走入第二叶.

为此, 假设有这样的极点, 称之为 ω_1 , 得

$$1/F^{(1)}(\omega_1) = 0. \quad (11)$$

当它到达实轴上某点 $\omega_a + i\epsilon$ 时

$$1/F^{(1)}(\omega_a + i\epsilon) = 0; \quad (12)$$

但

$$\text{Im} \{ [F^{(1)}(\omega_a + i\epsilon)]^{-1} \} = 2\pi^2 k(\omega_a)(1 + \eta(\omega_a)), \quad (13)$$

因此

$$k(\omega_a) = 0, \quad (14)$$

或

$$\omega_a = \mu.$$

以上实际上证明了上一节中所说的在 $(2\mu, \infty)$, $(-\infty, -2\mu)$ 线段上走不出新的极点. 但另一方面, 自方程(9)和 $g^2 > 0$ 知

$$\text{Re} \{ [F^{(1)}(\mu)]^{-1} \} > 0, \quad (15)$$

这与 $\omega_a = \mu$ 的(12)矛盾. 以上便证明了 $(F^{(1)})^{-1}$ 不可能有一零点自上半平面走进实轴; 同样, 它也证明了 $(F^{(1)})^{-1}$ 不可能有一零点自下半平面走进实轴. 这就是我们需要证明的.

其次, 让我们证明, 当 CDD 极点不存在时, 不存在代表共振态的极点.

为证明此点, 先令 $\eta = 0$, 把式(10)右方写为

$$\frac{1}{g^2} - \omega \int_{\mu}^{\infty} \frac{2\pi k' d\omega'}{\omega'^2(\omega' + \omega)} - 2\pi^2 \frac{k}{\omega} i + 2\pi^2 \frac{\mu}{\omega}, \quad (k = (\omega^2 - \mu^2)^{1/2}). \quad (16)$$

当 $\text{Re } \omega > \mu$, $\text{Im } \omega > 0$ 时, 上式的虚部分小于零; 当 $\text{Re } \omega > \mu$, $\text{Im } \omega < 0$ 时, 上式的虚部分大于零. 这便证明了在 $\eta = 0$ 时在 $\text{Re } \omega = \mu$ 线的右面不存在 $F^{(2)}$ 的极点.

在 $\text{Re } \omega = \mu$, $\text{Im } \omega > 0$ 线上, 由于 $\arg k > \arg \omega$, 式(10)右方的实部分大于零. 因为(10)右方为 ω 的实函数, 在 $\text{Re } \omega = \mu$, $\text{Im } \omega < 0$ 的线上也如此. 因此 $\text{Re } \omega = \mu$ 线上不存在 $F^{(2)}$ 的极点. 已知 $\eta = 0$ 时 $\text{Re } \omega = \mu$ 线右面不存在 $F^{(2)}$ 的极点, 令 η 自零增长, 由于极点不可能穿过 $\text{Re } \omega = \mu$ 线, 又由于割线上不能出现新的极点, 这便证明了当 $\eta \neq 0$ 时 $F^{(2)}$ 在 $\text{Re } \omega = \mu$ 线右方没有极点.

当 CDD 极点被引入时, 我们可以改(9)为

$$\frac{1}{\omega F^{(1)}(\omega)} = \frac{1}{g^2} + \omega \int \frac{2\pi k'(1+\eta')}{(\omega' - \omega)\omega'^2} d\omega' + \omega \frac{a}{(\omega - b)g^2}. \quad (17)$$

因为已知 $F^{(1)}(\omega)$ 只有一个极点 $\omega = 0$, 可以自 $F^{(1)}(\omega)$ 的形状得出 $0 < b < \mu$, $a < 0$. 现在令 a, b 不变, 让 g^2 改变, 求 $F^{(1)}, F^{(2)}$ 的极点的运动.

由 $F^{(1)}, F^{(2)}$ 的形式不难证明, $F^{(2)}(\omega)$ 在现在情形下可以具有极点 $m \pm i\gamma$; $m > \mu$. 其次, 也不难验证, $F^{(1)}, F^{(2)}$ 的极点可以在 g^2 改变时由一个叶走入另一个叶. 假定 $F^{(2)}$ 的一个极点在 $g^2 = g_1^2 > 0$ 时穿过正常割线走入第一叶. 同以前讨论一样, 可证明通过点为 $\omega = \mu$. 于是

$$\frac{1}{g_1^2} + \mu \int \frac{2\pi k'(1+\eta')}{(\omega' - \mu)\omega'^2} d\omega' + \mu \frac{a}{(\mu - b)} \frac{1}{g_1^2} = 0. \quad (18)$$

但在此 g^2 值下, $[\omega F^{(1)}(\omega)]^{-1}$ 在 $\omega = 0$ 处大于零, 在 $\omega = -\infty$ 处为

$$\frac{1}{g_1^2} - \int \frac{2\pi k'(1+\eta')}{\omega'^2} d\omega' + \left(-\frac{a}{b}\right) \frac{1}{g_1^2} < 0. \quad (19)$$

因此对于这个 g^2 , $F^{(1)}$ 具有一个在 $\omega < 0$ 处的极点. 换句话说, 当 g^2 增加尚未到达 g_1^2 处以前, 已经有一个极点在 $\omega = -\infty$ 处走入了第一叶.

等式(9), (10), (17)所决定的极点不便于全部画出. 这是因为, $F^{(1)}$ 只有右方割线, $F^{(2)}$ 有左右方二割线, 因此函数有二个以上的叶, 使画出全部极点的运动很为不便.

总结以上, 可见无论有否左方割线和有否非弹性割线, 第二叶中代表共振态的极点的存在与 CDD 极点的引入是分不开的, 而共振态极点的变为束缚态极点又与左端进入另一个极点分不开. 振幅在后一个极点的留数显然是负的, 所以它代表鬼态. 以上的定性讨论无疑地对其他模型也是有效的. 上述的第一点尤其值得提出, 因为通常用 N/D 求分波振幅的色散方程的解时, 常不注意 CDD 极点.

参 考 文 献

- [1] Landshoff, P. V., *Nuovo Cimento*, **28** (1963), 123.
- [2] Zachariasen, F., *Phy. Rev.*, **121** (1960), 1851.
- [3] Bialynicka-Birula, Z., *Nuovo Cimento*, **26** (1962), 1197.
- [4] 张宗燧, 物理学报, **20** (1964), 1090.
- [5] Ford, K. W., *Phy. Rev.*, **105** (1957), 320.

MOTION OF POLES IN THE LEE MODEL

T. S. CHANG

(Academia Sinica)

ABSTRACT

This short paper studies the motion of the poles in the first and the second sheets of the scattering amplitude in the Lee model as the coupling constant g^2 changes. It is proved that, with or without the left hand cut, with or without the inelastic cut, the theory does not permit the occurrence of poles in the second sheet representing resonances unless the *CDD* poles are introduced for the inverse amplitude.

When the left hand cut is present and the *CDD* poles are introduced, a pole representing resonance may slip across the normal cut (near the right threshold) into the first sheet as the coupling constant g^2 increases. But before this occurs, another pole slips into the first sheet across the left hand cut (near the left threshold). Motion of poles in the two sheets is plotted for one such special case.

When the left hand cut is absent and the *CDD* poles are not yet introduced, it is pointed out that no passage of poles of one sheet into another sheet is possible so long as $g^2 > 0$. When the *CDD* poles are introduced, such passage becomes possible. It is shown that if a pole in the second sheet slips across the normal cut on increasing g^2 beyond a certain value $g_1^2 > 0$, then before g^2 reaches this value, another pole enters the first sheet at $-\infty$. Needless to say, poles entering from the left usually provide ghosts.

These general features are believed to hold for field-theoretical models in general.