

$\mu^- + \text{He}^3 \rightarrow \text{H}^3 + \nu$ 过程的几率 及原子核波函数*

陈 鹤 琴

(北 京 大 学)

提 要

用三种不同的核波函数计算了 μ^- 介子在 He^3 核上的俘获几率, 将结果与其他作者的结果进行了比较。

一、引 言

研究 μ^- 介子在原子核上的俘获过程, 可以得到弱相互作用方面的许多知识。但是由于不知道精确的原子核波函数, 在理论计算中遇到了不能严格算出核矩陣元的困难。在这种情况下, 通常多利用核模型的概念, 但由此得到的结果往往是不可靠的。对于核子数很少的轻核来说, 可以用核力的唯象理论通过变分法来求得原子核波函数, 这样得到的波函数较之模型函数能更细致地描述原子核的情态。因此, 在研究 μ^- 介子在很轻的核上的俘获过程时, 就可以采用变分波函数来计算核矩陣元, 从而求出俘获几率。目前理论上和实验上最有兴趣的 μ 俘获过程是

$$\mu^- + \text{He}^3 \rightarrow \text{H}^3 + \nu. \quad (1)$$

这个过程的几率曾由许多作者作过计算^[1-5]。他们在计算核矩陣元时, 采用了各种不同形式的变分波函数。但是所有这些核波函数都比较简单, 只含 1 到 2 个参数。这类函数一般说来只能较好地符合三体结合能, 而用它们计算 μ^- 俘获过程中的核矩陣元时, 就不一定能给出正确的结果。最近有人^[6]用高能电子在 He^3 核和 H^3 核上散射的实验数据来确定核波函数中的参数, 再用这种核波函数计算过程(1)的几率, 得到了较好的结果。因此, 如果再采用几种比较复杂的变分波函数, 以及形式虽然简单但其中的参数是由高能电子散射数据定出的核波函数重复同样的计算, 并将各种不同波函数所给出的结果作一比较, 将是有意义的。本文第二节给出三种核波函数; 第三节用这些波函数计算了过程(1)的核矩陣元和俘获几率; 最后将所得结果与其他作者的结果进行了比较。

二、原子核波函数

He^3 核的波函数可写成如下全反对称形式:

* 1964 年 6 月 17 日收到; 1965 年 3 月 31 日收到修改稿。

$$\begin{aligned} \phi(123) = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ & \phi(\widetilde{12}, 3)b(1)b(2)a(3) + \phi(\widetilde{23}, 1)b(2)b(3)a(1) + \\ & + \phi(\widetilde{31}, 2)b(3)b(1)a(2) \}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 a 和 b 为核子的同位旋波函数, 分别代表质子态和中子态. $\phi(\widetilde{ij}, k)$ 代表对交换第 i 个和第 j 个核子是反对称的空间-自旋波函数. 对于 $\phi(\widetilde{12}, 3)$ 我们选择了两种不同的变分波函数 ϕ_1 和 ϕ_2 , ϕ_1 取自文献[7], ϕ_2 取自文献[8]. 它们具有如下形式:

$$\begin{aligned} \phi_1(\widetilde{12}, 3) = & e^{-\frac{1}{2}\mu(s+\rho)}[(a_0 + \rho a_1 + s a_2)\widetilde{^2S} + t a_3\widetilde{^2S}] + \\ & + e^{-\frac{1}{2}\omega(s+\rho)}[t a_4 {}^4D(r_{12}) + t a_5({}^4D(r_{31}) + {}^4D(r_{23})) + \\ & + (a_6 + \rho a_7 + s a_8)({}^4D(r_{31}) - {}^4D(r_{23}))], \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} \widetilde{^2S} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1\beta_2\alpha_3 - \beta_1\alpha_2\alpha_3] = \chi(\widetilde{12}, 3), \\ \widetilde{^2S} &= \sigma_1 \cdot \sigma_3 \chi(\widetilde{12}, 3), \\ {}^4D(r) &= [3(\sigma_1 \cdot r)(\sigma_3 \cdot r) - r^2(\sigma_1 \cdot \sigma_3)]\chi(\widetilde{12}, 3); \\ \rho &= r_{12}, \quad s = r_{31} + r_{23}, \quad t = r_{31} - r_{23}; \end{aligned}$$

其中 r_{ik} 为第 i 个核子与第 k 个核子间的距离. (3) 式中的全部变分参数的数值列于表 1¹⁾. 由于 a_4 和 a_8 很小, 计算时忽略了含 a_4 和 a_8 的两项.

表 1 ϕ_1 中的变分参数²⁾

长度单位 $r_0(F)$	μr_0	ωr_0	a'_0	a'_1	a'_2	a'_3	a'_4
1.36	1.5	3	1	0.047	0.100	0.018	-0.002
长度单位 $r_0(F)$	a'_5	a'_6	a'_7	a'_8	D 波几率 %	He ³ 结合能 E	
1.36	-0.096	1.791	0.906	-0.055	5.5	-5.28 MeV	

$$\begin{aligned} \phi_2(\widetilde{12}, 3) = & A_{S_1}\chi_S e^{-\frac{1}{2}\lambda_1(s+\rho)} + A_{S_2}\chi_S e^{-\frac{1}{2}\lambda_2(s+\rho)} + [A_D + \rho A_{D^+} + s A_{D^0}]\chi_D e^{-\frac{1}{2}\mu(s+\rho)} + \\ & + [A_{D'} + \rho A_{D'^+} + s A_{D'^0}]\chi_{D'} e^{-\frac{1}{2}\nu(s+\rho)} + \chi_{D''} e^{-\frac{1}{2}\omega(s+\rho)}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} \chi_S &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1\beta_2\alpha_3 - \beta_1\alpha_2\alpha_3] = \chi(\widetilde{12}, 3), \\ \chi_D &= [r_{13}^2 S_{13} + r_{23}^2 S_{23}]\chi(\widetilde{12}, 3), \\ \chi_{D'} &= [r_{13}^2 S_{13} - r_{23}^2 S_{23}]\chi(\widetilde{12}, 3), \end{aligned}$$

1) 这些参数未发表过.

2) 表中带撇的参数与(3)式中不带撇的参数之间有如下关系:

$$a'_i = a_i \times \frac{200}{3\sqrt{2}}, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad a'_i = a_i \times \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad i = 4, 5, 6, 7, 8.$$

$$\chi_{D''} = [3(\sigma_1 \cdot \mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23})(\sigma_3 \cdot \mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}) - (\sigma_1 \cdot \sigma_3)(\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23})^2] \chi(\widetilde{12}, 3),$$

$$S_{ik} = r_{ik}^{-2} [3(\sigma_i \cdot \mathbf{r}_{ik})(\sigma_k \cdot \mathbf{r}_{ik}) - r_{ik}^2 (\sigma_i \cdot \sigma_k)].$$

(4)式中全部变分参数的数值列于表2.

表2 ϕ_2 中的变分参数

长度单位 $r_0(F)$	$\lambda_1 r_0$	$\lambda_2 r_0$	μr_0	νr_0	ωr_0	A_{S_1}	A_{S_2}	A_D
1.184	1.8	1.5	2.2	2.5	2.8	0.272	0.241	1.000
长度单位 $r_0(F)$	$A_{D'}$	$A_{D''}$	A_{D+}	A_{D+}'	A_{D0}	$A_{D0'}$	D波几率 %	He^3 结合能 E
1.184	-1.666	0.758	0.254	0.133	-0.241	0.263	3.6	-7.5 Mev

第三种核波函数取如下形式:

$$\psi'(123) = u(r_{12}, r_{31}) \varphi(s_1 s_2 s_3, \tau_1 \tau_2 \tau_3), \quad (5)$$

其中

$$u(r_{12}, r_{31}) = A e^{-\frac{\alpha^2}{2}(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)}, \quad (6)$$

φ 为波函数的自旋-同位旋部分, (6) 式中的参数 α 由高能电子在 He^3 和 H^3 上的散射数测定出^[12]:

$$\alpha = 0.384 F^{-1}.$$

三、俘获几率

如果忽略初态中质子的速度,并假定 μ 介原子超精细结构独态的统计权重为 $b = \frac{1}{4}$, 则过程(1)的几率可以下式表示^[9]:

$$W = \frac{G^2 \varphi_\mu^2(0)}{2\pi} N_0 q^2 (1 - q/Am_p), \quad (7)$$

其中 $\varphi_\mu(0) = \pi^{-1/2} \left(\frac{z}{a_\mu}\right)^{3/2}$ 为 $r = 0$ 时的 μ 介原子基态波函数; $N_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)^2 |M_F|^2 + \left(\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda\beta(2\mu - f) + \frac{1}{12}\beta^2(\mu^2 + f^2)\right) |M_{GT}|^2$; $A = \lambda + \frac{1}{2}\mu\beta$, $\beta = q/m_p$, $\mu = \mu_p - \mu_n - 1$, $f = f' - \lambda$, $\lambda = \frac{g_A}{g_V}$, $f' = \frac{g_P}{g_V}$; q 为中微子的动量; M_F 和 M_{GT} 分别代表 Fermi 矩阵元和 Gamow-Teller 矩阵元:

$$\left. \begin{aligned} |M_F|^2 &= \sum_{m_i m_f} |M_F(m_i, m_f)|^2, \\ |M_{GT}|^2 &= \sum_{m_i m_f} |M_{GT}(m_i, m_f)|^2, \\ M_F(m_i, m_f) &= \frac{1}{(2J_i + 1)^{1/2}} \left\langle f \left| \sum_{j=1}^3 \tau_j^{(-)} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j} \right| i \right\rangle, \\ M_{GT}(m_i, m_f) &= \frac{1}{(2J_i + 1)^{1/2}} \left\langle f \left| \sum_{j=1}^3 \tau_j^{(-)} \sigma_j e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j} \right| i \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(8)式中的指数函数展开成幂级数并取前三项,得到

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \cong 1 + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2. \quad (9)$$

由于初末态原子核的字称相同($\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$ 跃迁), (9) 式中第二项的贡献为零. 第三项可改写为

$$\frac{1}{2}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})^2 = \frac{1}{6}q^2r^2 + \frac{1}{6}q_iq_kQ_{ik}, \quad (10)$$

其中 $Q_{ik} = 3r_ir_k - r^2\delta_{ik}$ 是一个四极矩张量, 这一项的贡献可以略去^[10]. 考虑到(9)和(10), (7) 式中的 N_0 可表示为

$$N_0 = |M_F^0|^2 + \lambda^2|M_{GT}^0|^2 + \varepsilon + \beta\left(1 + \frac{1}{4}\beta\right)|M_F|^2 + \left[\frac{1}{3}\lambda\beta(2\mu - f) + \frac{1}{12}\beta^2(\mu^2 + f^2)\right]|M_{GT}|^2, \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{m_i m_f} \{[2M_F^0(m_i, m_f) + M_F^1(m_i, m_f)]M_F^1(m_i, m_f) + \\ &\quad + \lambda^2[2M_{GT}^0(m_i, m_f) + M_{GT}^1(m_i, m_f)]M_{GT}^1(m_i, m_f)\}, \\ |M_F^0|^2 &= \sum_{m_i m_f} |M_F^0(m_i, m_f)|^2 = \sum_{m_i m_f} \left| \frac{1}{(2J_i + 1)^{1/2}} \langle f | \sum_{j=1}^3 \tau_j^{(-)} | i \rangle \right|^2, \\ |M_{GT}^0|^2 &= \sum_{m_i m_f} |M_{GT}^0(m_i, m_f)|^2 = \sum_{m_i m_f} \left| \frac{1}{(2J_i + 1)^{1/2}} \langle f | \sum_{j=1}^3 \tau_j^{(-)} \sigma_j | i \rangle \right|^2, \\ M_F^1(m_i, m_f) &= -\frac{1}{6(2J_i + 1)^{1/2}} q^2 \langle f | \sum_{j=1}^3 \tau_j^{(-)} r^2 | i \rangle, \\ M_{GT}^1(m_i, m_f) &= -\frac{1}{6(2J_i + 1)^{1/2}} q^2 \langle f | \sum_{j=1}^3 \tau_j^{(-)} \sigma_j r^2 | i \rangle. \end{aligned}$$

(11)式中的前两项对 N_0 作主要贡献, 这两项可由 H^3 核 β^- 衰变的 ft 值定出, 其余诸项均由波函数算出, 结果得到

对于 ϕ_1 ,

$$\varepsilon = -0.897, \quad |M_F|^2 = 0.865, \quad |M_{GT}|^2 = 2.124;$$

俘获几率

$$W = 1.54 \times 10^3 \text{ sec}^{-1}.$$

对于 ϕ_2 ,

$$\varepsilon = -0.966, \quad |M_F|^2 = 0.863, \quad |M_{GT}|^2 = 1.790;$$

俘获几率

$$W = 1.50 \times 10^3 \text{ sec}^{-1}.$$

第三种波函数 $\psi'(123)$ 的空间部分和自旋-同位旋部分是分开的, 所以有 $|M_{GT}|^2 = 3|M_F|^2$. 矩阵元 M_F 中的最低项用 H^3 核 β^- 衰变的相应矩阵元代换, 改正项则用 $\psi'(123)$

算出, 结果得到

$$M_F^1(m_i, m_f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0.103 \delta_{m_i m_f},$$

俘获几率

$$W = 1.48 \times 10^3 \text{ sec}^{-1}.$$

四、討 論

到目前为止, 关于 μ^- 介子在 He^3 核上的俘获几率的比较精确的实验值为 $W = (1.52 \pm 0.05) \times 10^3 \text{ sec}^{-1[1]}$. 理论值在很大程度上取决于核矩阵元的数值, 后者又取决核波函数的选择. 为了便于比较, 我们将各种不同的核波函数所给出的过程 (1) 的几率列于表 3.

表 3 各种不同核波函数给出的过程 (1) 的几率

核波函数的形式	确定参数的方法	俘获几率 $W (\times 10^3 \text{ sec}^{-1})$
$u(r_{12}, r_{31}) = A \frac{e^{-\frac{a}{2}(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)^{1/2}}}{(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)^{1/4}}$	变分法	1.46 ^[1]
$u(r_{12}, r_{31}) = A e^{-\frac{a}{2\sqrt{3}}(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)^{1/2}}$	同上	1.29 ^[8]
$u(r_{12}, r_{31}) = \begin{cases} N \prod_{i < j} [e^{-\mu(r_{ij}-D)} - e^{-\nu(r_{ij}-D)}], & r_{ij} \geq D \\ 0, & r_{ij} < D \end{cases}$	同上	1.66 ^[9]
同上	同上	对两套参数分别得到 1.56 和 1.60 ^[8]
$u(r_{12}, r_{31}) = \begin{cases} N \prod_{i < j} [e^{-\mu(r_{ij}-D)} - e^{-\nu(r_{ij}-D)}] / r_{ij}^{1/2}, & r_{ij} \geq D \\ 0, & r_{ij} < D \end{cases}$	同上	1.46 ^[4]
本文中的 ϕ_1	同上	1.54
本文中的 ϕ_2	同上	1.50
$u(r_{12}, r_{31}) = A e^{-\frac{a}{2}(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)^{1/2}}$	利用高能电子在 He^3 核和 H^3 核上的散射数据以及 He^3 核的库仑能	1.50 ^[6]
$u(r_{12}, r_{31}) = A \frac{e^{-a(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)^{1/2}}}{(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)^{1/2}}$	同上	1.41 ^[6]
$u(r_{12}, r_{31}) = A e^{-\frac{a^2}{2}(r_{12}^2 + r_{31}^2 + r_{23}^2)}$	同上	1.48

由表 3 可以看到, 参数较多、形式比较复杂的变分波函数所给出的结果与实验一致; 参数少而形式简单的波函数, 只要其中的参数是根据高能电子散射数据和 He^3 核的库仑能定出的, 也能给出比较好的结果. 相反, 形式简单的各种变分波函数虽然都能很好地符

合三体结合能,但所给出的 μ 俘获几率却彼此相差很大.这一情形说明简单的变分波函数只在 r 小时才接近真正的波函数,在 r 大时便偏离真正的波函数较远,因而不能给出正确的 μ 俘获几率(μ 俘获中的核矩陣元要求核波函数在 r 大时也正确).此外,由于变分波函数是由能量极值条件得到的,因此两个略有差异的变分波函数所给的三体结合能相差甚微;而核矩陣元则并无极值,因此两个很接近的波函数所给出的俘获几率可能相差很大.

作者感谢庆承瑞同志对结果所作的讨论,并感谢胡济民先生提供了未发表的变分参数.

参 考 文 献

- [1] Fujii, A. and Primakoff, H., *Nuovo Cimento*, **12** (1959), 327.
- [2] Fujii, A., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 870.
- [3] Werntz, C., *Nucl. Phys.*, **16** (1960), 59.
- [4] Yano, A. F., *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 110.
- [5] 朱家珍等, *物理学报*, **16** (1960), 61.
- [6] Oakes, R. J., *Phys. Rev.*, **136** (1964), B1848.
- [7] Tsi-Ming Hu (胡济民) and Kung-Ngon Hsu (徐躬耦), *Proc. Roy. Soc.*, **A 204** (1951), 476.
- [8] Pease, R. L. and Feshbach, H., *Phys. Rev.*, **88** (1952), 945.
- [9] Хэ Цзо-сю (何祚麻), *ЖЭТФ*, **38** (1960), 1620.
- [10] Иоффе, Б. Л., *ЖЭТФ*, **37** (1959), 159.
- [11] Auerbach, L. B., et al., *Phys. Rev. Letters*, **11** (1963), 23.
- [12] Schiff, L. I., *Phys. Rev.*, **133** (1964), B802.

ВЕРЯТНОСТЬ ПРОЦЕССА $\mu^- + \text{He}^3 \rightarrow \text{H}^3 + \nu$ И ЯДЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Чэнь Хао-цинъ
(Пекинский университет)

Резюме

С помощью трех различных ядерных волновых функций получены вероятности процесса $\mu^- + \text{He}^3 \rightarrow \text{H}^3 + \nu$. Результаты сравниваются с результатами других авторов.