

关 于 $\pi-\pi$ 共 振 态*

葛 墨 林 段 一 士

(兰 州 大 学)

提 要

本文从解析性和么正性出发,对具有共振行为的 $\pi-\pi$ 散射分波振幅的形式作了普遍的讨论. 理论中包含了一个标志与 Breit-Wigner 共振形式偏离的函数 $F_{lJ}^I(\nu)$, 当 $F_{lJ}^I(\nu) = 1$ 时, 振幅恰好具有 Breit-Wigner 共振形式. 具体计算表明, 这个函数与 1 有一定的偏离.

利用 ND^{-1} 方法、交叉对称性、 ρ 与 f^0 的 Bootstrap 近似, 将所得到的振幅与 $-9 < \nu < 0$ 区间成立的分波振幅的积分表达式相比较, 计算了 P, D 波共振的自洽解, 即 ρ 和 f^0 的共振解. 计算中考虑了非弹性过程和负半轴色散积分的贡献. 计算结果得到, 对于 $J = 1, I = 1$ 态, $\nu_R = 6.4, \Gamma_1 = 0.12$; 对于 $J = 2, I = 0$ 态, $\nu_{R_2} = 20, \Gamma_2 = 0.016$. 这相当于 $m_\rho = 762 \text{ MeV}$, $m_{f^0} = 1283 \text{ MeV}$, ρ 的半宽度约为 45 MeV . 它们与目前的实验数据是很好符合的.

一、引 言

从解析性、么正性和交叉对称性出发, 过去曾有不少作者对 $\pi-\pi$ 散射共振态问题进行过计算^[1-10]. 一般认为, 对 $\pi-\pi$ 强共振态问题, 其交叉道中 D 波共振态的贡献是不可忽略的^[5], 非弹性过程的贡献也十分重要. 在未充分考虑或完全没有考虑非弹性过程时^[1-6], 所得的共振质量较低, 谱宽较宽. 理论上求得的共振参数和目前实验数据相比, 还有一定的距离. 对于共振谱的形式, 过去在理论上的分析也不够细致. 通常假定共振振幅具有 Breit-Wigner 形式^[4,5], 但实际情况是否真具有如此典型的形式, 尚应从理论上作直接的分析 and 探讨.

本文首先利用解析性和么正性对具有共振行为的振幅形式作了普遍的讨论, 其中包含了一个标志与 Breit-Wigner 共振公式偏离的函数 $F_{lJ}^I(\nu)$, 当 $F_{lJ}^I(\nu) = 1$ 时, 振幅恰好具有 Breit-Wigner 共振形式. 具体计算与分析表明, 这个函数与 1 是有一定偏离的, 但在共振点附近的一个较大区域内, 对 P 波共振振幅, Breit-Wigner 形式仍然可以认为是一个较好的近似.

本文的主要内容是用 ND^{-1} 方法研究 P, D 波的共振解, 在交叉道中, 认为 $\rho(J = 1, I = 1)$ 和 $f^0(J = 2, I = 0)$ 共振态起主要作用. 对于负半轴虚部的处理, 我们采用朱洪元等人的方法^[3,11]. 由交叉对称性, 用变元 $\omega = 2\nu + 1$ 可以得到正负半轴振幅虚部之间在 P, D 波为主要情况下的关系式. 根据作者前一工作^[12]的计算和讨论, 如果在正半轴色散积分中多作一次削减, 则非弹性过程的贡献可以大大减弱, 也即相应于考虑了大部分非

* 1965 年 3 月 31 日收到.

弹性过程的贡献。本文用类似的方法,将 D 函数多作一次削减。由此利用 ND^{-1} 表达式在上述 ρ 和 f^0 的 Bootstrap 近似下,可以得到分波振幅的具体表达式,它仅依赖于 $\Gamma_1, \Gamma_2, \nu_{R_1}, \nu_{R_2}$ 四个共振参数。在具体的计算中,我们采用 Bálazs^[4] 的方法,将 ND^{-1} 形式的振幅与在 $-9 < \nu < 0$ 区间内成立的分波振幅积分表达式(即本文(13)式)相比较,作为计算的出发点,具体得到的共振参数如下:

$$\nu_{R_1} = 6.4, \Gamma_1 = 0.12; \nu_{R_2} = 20, \Gamma_2 = 0.016.$$

它们相当于 $m_\rho \approx 762$ MeV, $m_{\rho^0} \approx 1283$ MeV, ρ 的半宽度约为 45 MeV. ρ 共振谱的形式如图 3 所示。这些理论计算结果与目前实验数据符合得较好。

二、共振振幅的一般形式

将 $\pi\pi$ 散射分波振幅 $A_{ll}^I(\nu)$ 写成下列的倒数形式:

$$A_{ll}^I(\nu) = \frac{1}{\text{Re}[A_{ll}^I(\nu)]^{-1} + i \text{Im}[A_{ll}^I(\nu)]^{-1}}. \quad (1)$$

由振幅 $A_{ll}^I(\nu)$ 的解析性、么正性和当 $\nu \rightarrow 0$ 时, $A_{ll}^I \sim \nu^l$ 的阈行为可以将(1)式改写成下列形式:

$$A_{ll}^I(\nu) = \frac{\nu^l}{M_{ll}^I(\nu) - i\nu^l T_{ll}^I(\nu)}, \quad (2)$$

其中

$$T_{ll}^I(\nu) = \begin{cases} R_{ll}^I(\nu) \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}}, & \text{当 } \nu > 0, \\ -\text{Im}[A_{ll}^I(\nu)]^{-1} & \text{当 } \nu < -1; \end{cases} \quad (3)$$

$$M_{ll}^I(\nu) = \sqrt{\frac{\nu^{2l+1}}{\nu+1}} \cot \delta_{ll}^I. \quad (4)$$

以上各式中, l 和 I 分别为角动量和同位旋量子数, δ_{ll}^I 为相应的散射相移。 R_{ll}^I 为分波总截面与弹性分波截面之比,当 $\nu < 3$ 时, $R_{ll}^I(\nu) = 1$ 。

假定在 l 和 I 态的振幅具有共振行为,其共振点为 ν_{RlI} , 则由(4)式可知

$$M_{ll}^I(\nu) = 0, \quad \text{当 } \nu = \nu_{RlI}. \quad (5)$$

于是可形式地将 $M_{ll}^I(\nu)$ 改写为

$$M_{ll}^I(\nu) = (\nu_{RlI} - \nu)f_{ll}^I(\nu). \quad (6)$$

由于(6)式左端为零的根 $\nu = \nu_{RlI}$ 并不一定是简单的代数方程的解,因此 $f_{ll}^I(\nu)$ 仍然可能是 ν_{RlI} 的函数。此外,必须注意到振幅 $A_{ll}^I(\nu)$ 在 $\nu = 0$ 附近具有 l 级零点,故 $\nu = 0$ 不应该是函数 $f_{ll}^I(\nu)$ 的零点。把(6)式代入(2)式,将所得的结果的分子、分母同时除以 $f_{ll}^I(\nu_{RlI})$, 并定义

$$F_{ll}^I(\nu) = f_{ll}^I(\nu)/f_{ll}^I(\nu_{RlI}), \Gamma_{ll}^I = [f_{ll}^I(\nu_{RlI})]^{-1}, \quad (7)$$

则可得到

$$A_{ll}^I(\nu) = \frac{\Gamma_{ll}^I \nu^l}{(\nu_{RlI} - \nu)F_{ll}^I(\nu) - i\nu^l \Gamma_{ll}^I T_{ll}^I(\nu)}. \quad (8)$$

上式对于 ν 的正负区间都是成立的,只不过函数 $T_{ll}^I(\nu)$ 当 $\nu > 0$ 或 $\nu < -1$ 时,由(3)式

有不同的定义而已。由(3)式可知,当 $\nu > 0$ 时可将上式表示为

$$A_{(l)}^l(\nu) = \frac{\Gamma_{(l)}^l \nu^l}{(\nu_{Rl} - \nu) F_{(l)}^l(\nu) - i R_{(l)}^l(\nu) \Gamma_{(l)}^l \sqrt{\frac{\nu^{2l+1}}{\nu+1}}}. \quad (9)$$

由上式可以看出,如果 $F_{(l)}^l(\nu) = 1$,并且设 $R_{(l)}^l(\nu) = 1$,则振幅的表达式恰好具有通常的 Breit-Wigner 共振形式。因此 $F_{(l)}^l(\nu)$ 是标志与这个典型共振形式偏离的函数。另一方面,由(7)式知,当 ν 精确地等于 ν_{Rl} 时,

$$F_{(l)}^l(\nu_{Rl}) = 1. \quad (10)$$

但由此并不能说明 Breit-Wigner 共振形式在一般情况都是很好的近似,这还要看当 ν 离开共振点时, $f(\nu)$ 与 $f(\nu_{Rl})$ 的偏离程度。

此外,(9)式的虚部可表示为

$$\text{Im } A_{(l)}^l(\nu) = \frac{\nu^l [\Gamma_{(l)}^l]^2 R_{(l)}^l \sqrt{\frac{\nu^{2l+1}}{\nu+1}}}{[(\nu_{Rl} - \nu) F_{(l)}^l(\nu)]^2 + R_{(l)}^l(\nu) [\Gamma_{(l)}^l]^2 \frac{\nu^{2l+1}}{\nu+1}}. \quad (11)$$

若对(11)式作零谱宽近似,则利用公式 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2} = \pi \delta(x)$ 可以得到振幅虚部通常的 δ 函数近似式:

$$\text{Im } A_{(l)}^l(\nu) = \pi \nu^l \Gamma_{(l)}^l(\nu - \nu_{Rl}). \quad (12)$$

由 Bálazs 的工作^[4]知道,如果振幅吸收部分在高能具有 Regge 行为,则利用固定变元 s 的色散关系 ($s = 4\nu + 4$) 和交叉对称性,可以证明,对于 $l = 1$ 和 2 态,存在下列分波振幅通过交叉通道振幅吸收部分的积分表达式:

$$A_{(l)}^l(\nu) = \frac{4}{\pi \nu} \int_0^\infty d\nu' Q_l \left(1 + 2 \frac{\nu' + 1}{\nu} \right) \text{Im } \tilde{A}^l \left(\nu', 1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu'} \right). \quad (13)$$

当 ν 在 $-9 < \nu < 0$ 区间内,有

$$\text{Im } \tilde{A}^l \left(\nu', 1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu'} \right) = \sum_{l'=0}^\infty (2l' + 1) \sum_{l''=0}^2 \beta_{ll'} \text{Im } A_{(l')}^{l'}(\nu') P_{l'} \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu'} \right). \quad (14)$$

系数 β 由下式决定:

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

如果认为在交叉通道中仅强共振态的贡献是主要的,则采用(12)式,忽略谱宽的近似后,将(14)代入(12)式可得

$$A_{(l)}^l(\nu) = \frac{4}{\nu} \sum_{l' l'' (\text{共振态})} (2l' + 1) \beta_{ll'} (\nu_{Rl''})^l T_{(l')}^{l''} Q_l \left(1 + 2 \frac{\nu_{Rl''} + 1}{\nu} \right) P_{l'} \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{Rl''}} \right). \quad (16)$$

三、 ND^{-1} 方法和基本公式

引入变元 $\omega = 2\nu + 1$, 定义向前散射同位旋振幅 $A^I(\omega) = A^I(\omega, \cos \theta)|_{\cos \theta=0}$, 按照文献[3], 利用交叉对称性可以得到以下关系:

$$A^I(-\omega - i\varepsilon) = \sum_{I'=0}^2 \alpha_{I'}^I A^{I'}(\omega + i\varepsilon), \quad \omega = 2\nu + 1, \quad (17)$$

因此

$$\text{Im } A^I(-\omega) = - \sum_{I'=0}^2 \alpha_{I'}^I \text{Im } A^{I'}(\omega), \quad (18)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

对于 P 波振幅 $A_{(1)}^1(\omega)$, 如果交叉通道中以 $\rho(J=1, I=1)$ 和 $f^0(J=2, I=0)$ 共振态为主导, 利用 $A^I(\omega) \approx 3A_{(1)}^1(\omega)$, $A^0(\omega) \approx 5A_{(2)}^0(\omega)$, 则由(18)可得¹⁾

$$\text{Im } A_{(1)}^1(-\omega) = \frac{5}{9} \text{Im } A_{(2)}^0(\omega) - \frac{1}{2} \text{Im } A_{(1)}^1(\omega). \quad (20)$$

利用变元 $\omega = 2\nu + 1$, P 波 $\pi\pi$ 散射振幅 N 和 D 函数的色散关系为

$$N(\omega) = N(\omega_0) + \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} d\omega' \frac{\text{Im } A_{(1)}^1(\omega') D(\omega')}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega)}, \quad (21)$$

$$D(\omega) = D(\omega_0) - \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \sqrt{\frac{\omega' - 1}{\omega' + 1}} \frac{R_{(1)}^1(\omega') N(\omega')}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega)}, \quad (22)$$

$$A_{(1)}^1(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}. \quad (23)$$

为了削弱非弹性过程的贡献, 即削弱 $R_{(1)}^1(\omega)$ 的贡献, 与作者前一工作^[12]相仿, 我们对函数 $D(\omega)$ 在 $\omega = \omega_1$ 处 ($\omega_1 < 1$) 多做一次削减, 并在函数 $N(\omega)$ 的色散积分中进行变元 $\omega' \rightarrow -\omega'$ 的变换, 则(21)、(22)可改写为(注意到已令 $D(\omega_0) = 1$)

$$N(\omega) = N(\omega_0) + \frac{\omega - \omega_0}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } A_{(1)}^1(-\omega') D(-\omega')}{(\omega' + \omega_0)(\omega' + \omega)}, \quad (24)$$

$$D(\omega) = 1 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} [D(\omega_1) - 1] - \frac{(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)}{\pi} \times \\ \times \int_1^{\infty} d\omega' \sqrt{\frac{\omega' - 1}{\omega' + 1}} \frac{R_{(1)}^1(\omega') N(\omega')}{(\omega' - \omega_0)(\omega' - \omega_1)(\omega' - \omega)}. \quad (25)$$

将(24)代入(25)便可以得到相应的 CM 积分方程

1) 关于向前散射振幅在左半轴的分波近似的误差, 在文献[13]中已有初步的估计。对于(18)式右端分波展开问题的讨论见文献[10]。

$$D(\omega) = 1 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} [D(\omega_1) - 1] - (\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)N(\omega_0)K(\omega_0, \omega_1, \omega) + \\ + \frac{(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_1)}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{K(-\omega', \omega_1, \omega) \operatorname{Im} A_{(1)}^1(-\omega') D(-\omega')}{\omega' + \omega_0}, \quad (26)$$

其中

$$K(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \sqrt{\frac{\omega' - 1}{\omega' + 1}} \frac{R_{(1)}^1(\omega')}{(\omega' - x)(\omega' - y)(\omega' - z)}. \quad (27)$$

仿照 Ширков 等人的作法^[11], 在交叉通道中对共振振幅虚部取零谱宽近似, 将 (12) 代入 (20) 可得

$$\operatorname{Im} A_{(1)}^1(-\omega) = \frac{5}{9} \pi (2g_2) \delta(\omega - \omega_{R_2}) - \frac{1}{2} \pi (2g_1) \delta(\omega - \omega_{R_1}), \quad (28)$$

其中

$$g_1 = \Gamma_1 \nu_{R_1}, \quad g_2 = \Gamma_2 (\nu_{R_2})^2, \quad \omega_{R_i} = 2\nu_{R_i} + 1; \quad (29)$$

ν_{R_1}, ν_{R_2} 与 g_1, g_2 ($\Gamma_1 \equiv \Gamma_{(1)}^1, \Gamma_2 \equiv \Gamma_{(2)}^0$) 分别为 P 波 $I = 1$ 态和 D 波 $I = 0$ 态的共振点与作用强度. 将 (28) 代入 (24), (25), 并将变元还原为 ν 后可得

$$N(\nu) = N(\nu_0) + (\nu - \nu_0) \left[\frac{Y}{\nu_{R_2} + \nu + 1} - \frac{X}{\nu_{R_1} + \nu + 1} \right], \quad (30)$$

$$\operatorname{Re} D(\nu) = 1 + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_1 - \nu_0} [D(\nu_1) - 1] + (\nu - \nu_0) L(\nu) N(\nu_0) + \\ + (\nu - \nu_0) [Y J_2(\nu) - X J_1(\nu)], \quad (31)$$

其中

$$X = \frac{1}{2} \frac{g_1 D(-\nu_{R_1} - 1)}{\nu_{R_1} + \nu_0 + 1}, \quad Y = \frac{5}{9} \frac{g_2 D(-\nu_{R_2} - 1)}{\nu_{R_2} + \nu_0 + 1}, \quad (32)$$

$$L(\nu) = -\frac{\nu - \nu_1}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_{(1)}^1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_1)(\nu' - \nu)}, \quad (33)$$

$$J_i(\nu) = -\frac{\nu - \nu_1}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_{(1)}^1(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu)(\nu' + \nu_{R_i} + 1)}. \quad (34)$$

此二色散积分由于在 $\nu = \nu_1$ 处多进行了一次削减, 非弹性散射的贡献已经削弱了很多, 因此可令 $R_{(1)}^1(\nu) \approx 1$, 则有

$$L(\nu) = \frac{h(\nu) - h(\nu_0)}{\nu - \nu_0} - \frac{h(\nu_1) - h(\nu_0)}{\nu_1 - \nu_0}, \quad (35)$$

$$J_i(\nu) = \frac{h(-\nu_{R_i} - 1) - h(\nu_1)}{\nu_{R_i} + \nu_1 + 1} - \frac{h(-\nu_{R_i} - 1) - h(\nu)}{\nu_{R_i} + \nu + 1}, \quad (36)$$

其中

$$h(\nu) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{\nu + 1}} \ln(\sqrt{|\nu|} + \sqrt{|\nu + 1|}), & \text{当 } \nu > 0, \nu < -1, \\ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{-\nu}{\nu + 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\nu + 1}{-\nu}}, & \text{当 } -1 < \nu < 0. \end{cases} \quad (37)$$

在 (30) 和 (31) 中, 削减常数 $N(\nu_0)$ 和 $D(\nu_1)$ 不是独立参数, 它们可分别由振幅 $A_{(1)}^1(\nu)$

的阈行为

$$A_{(1)}^1(\nu)|_{\nu=0} = 0 \quad \text{或} \quad N(\nu)|_{\nu=0} = 0, \quad (38)$$

以及共振条件

$$\operatorname{Re} D(\nu_{R_1}) = 0 \quad (39)$$

决定。利用(38), (39)分别消去(30)和(31)中的衰减常数 $N(\nu_0)$ 和 $D(\nu_1)$ 后可得

$$N(\nu) = \left[\frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} Y - \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} X \right] + (\nu - \nu_0) \left[\frac{Y}{\nu_{R_2} + \nu + 1} - \frac{X}{\nu_{R_1} + \nu + 1} \right], \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} D(\nu) = & \frac{\nu_{R_1} - \nu}{\nu_{R_1} - \nu_0} + (\nu - \nu_0) \left\{ \left[J_1(\nu_{R_1}) - J_1(\nu) + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} (L(\nu_{R_1}) - L(\nu)) \right] X - \right. \\ & \left. - \left[J_2(\nu_{R_1}) - J_2(\nu) + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} (L(\nu_{R_1}) - L(\nu)) \right] Y \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

由(32)知道, X 和 Y 与 $D(-\nu_{R_1} - 1)$ 和 $D(-\nu_{R_2} - 1)$ 有关, 因此 X 和 Y 也不是独立参数。在(41)中分别令 $\nu = -\nu_{R_1} - 1$ 和 $\nu = -\nu_{R_2} - 1$, 可求得 $D(-\nu_{R_1} - 1)$ 与 $D(-\nu_{R_2} - 1)$, 将其代入(32), 可以得到决定 X 和 Y 的二元联立方程组, 解得

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{2}{g_1} + [J_1(\nu_{R_1}) - J_1(-\nu_{R_1} - 1)] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} [L(\nu_{R_1}) - L(-\nu_{R_1} - 1)] & [J_2(-\nu_{R_1} - 1) - J_2(\nu_{R_1})] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} [L(-\nu_{R_1} - 1) - L(\nu_{R_1})] \\ [J_1(\nu_{R_1}) - J_1(-\nu_{R_2} - 1)] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} [L(\nu_{R_1}) - L(-\nu_{R_2} - 1)] & \frac{9}{5g_2} + [J_2(-\nu_{R_2} - 1) - J_2(\nu_{R_1})] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} [L(-\nu_{R_2} - 1) - L(\nu_{R_1})] \end{vmatrix}, \quad (42)$$

$$X = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{1}{\nu_{R_1} - \nu_0} + \frac{1}{\nu_{R_1} + \nu_0 + 1} & [J_2(-\nu_{R_1} - 1) - J_2(\nu_{R_1})] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} [L(-\nu_{R_1} - 1) - L(\nu_{R_1})] \\ \frac{1}{\nu_{R_1} - \nu_0} + \frac{1}{\nu_{R_2} + \nu_0 + 1} & \frac{9}{5g_2} + [J_2(-\nu_{R_2} - 1) - J_2(\nu_{R_1})] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} [L(-\nu_{R_2} - 1) - L(\nu_{R_1})] \end{vmatrix}, \quad (43)$$

$$Y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{2}{g_1} + [J_1(\nu_{R_1}) - J_1(-\nu_{R_1} - 1)] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} [L(\nu_{R_1}) - L(-\nu_{R_1} - 1)] & \frac{1}{\nu_{R_1} - \nu_0} + \frac{1}{\nu_{R_1} + \nu_0 + 1} \\ [J_1(\nu_{R_1}) - J_1(-\nu_{R_2} - 1)] + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} [L(\nu_{R_1}) - L(-\nu_{R_2} - 1)] & \frac{1}{\nu_{R_1} - \nu_0} + \frac{1}{\nu_{R_2} + \nu_0 + 1} \end{vmatrix}. \quad (44)$$

由此可知, $N(\nu)$ 和 $D(\nu)$ 实部的表达式(40)和(41)中仅有 ν_{R_1} , ν_{R_2} , Γ_1 , Γ_2 四个未知量。此外, $g_1 = \Gamma_1 \nu_{R_1}$ 也不是独立的参数, 因为由(9)和(23)知道

$$\frac{1}{\Gamma_1 \nu} (\nu_{R_1} - \nu) F_{(1)}^1(\nu) = \frac{\operatorname{Re} D(\nu)}{N(\nu)}. \quad (45)$$

令 $\nu \rightarrow \nu_{R_1}$, 注意到 $\operatorname{Re} D(\nu_{R_1}) = 0$, $F_{(1)}^1(\nu_{R_1}) = 1$, 由此可得

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{\Gamma_1 \nu_{R_1}} = -\frac{1}{N(\nu_{R_1})} \frac{d}{d\nu} [\operatorname{Re} D(\nu)]|_{\nu=\nu_{R_1}}, \quad (46)$$

这恰好是通常 P 波谱宽 Γ_1 的定义.

将(40)和(41)代入上式可得

$$\Gamma_1 \nu_{R_1} = \Phi(\Gamma_1, \Gamma_2, \nu_{R_1}, \nu_{R_2}), \quad (47)$$

$$\Phi = \frac{\left(\frac{\nu_{R_1} - \nu_0}{2\nu_{R_1} + 1} + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} \right) X - \left(\frac{\nu_{R_1} - \nu_0}{\nu_{R_2} + \nu_{R_1} + 1} + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} \right) Y}{(\nu_{R_1} - \nu_0) \left\{ \left[J_2'(\nu_{R_1}) + \frac{\nu_0 L'(\nu_{R_1})}{\nu_{R_2} + 1} \right] Y - \left[J_1'(\nu_{R_1}) + \frac{\nu_0 L'(\nu_{R_1})}{\nu_{R_1} + 1} \right] X \right\} - \frac{1}{\nu_{R_1} - \nu_0}}. \quad (48)$$

另一方面, 由(16)式知道, 如果在交叉通道中以 P , D 波共振态为主导, 在 $-9 < \nu < 0$ 区间内, P 波振幅 $A_{(1)}^1(\nu)$ 可以表示为

$$A_{(1)}^1(\nu) = \Gamma_1 A(\nu) + \Gamma_2 B(\nu), \quad (49)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A(\nu) &= \frac{6\nu_{R_1}}{\nu} P_1 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_1}} \right) Q_1 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_1} + 1}{\nu} \right), \\ B(\nu) &= \frac{20(\nu_{R_2})^2}{3} \frac{1}{\nu} P_2 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_2}} \right) Q_1 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_2} + 1}{\nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

因此

$$\frac{N(\nu)}{D(\nu)} = \Gamma_1 A(\nu) + \Gamma_2 B(\nu), \quad -9 < \nu < 0. \quad (51)$$

将(40)和(41)所确定的 $N(\nu)$ 和 $D(\nu)$ 代入上式, 可构成决定共振参数 $\Gamma_1, \Gamma_2, \nu_{R_1}, \nu_{R_2}$ 的方程组.

四、 P, D 波的共振解

为了确定 $\Gamma_1, \Gamma_2, \nu_{R_1}, \nu_{R_2}$ 四个 P, D 波共振参数, 将 $\nu = \nu_0$ 和 $\nu = \nu_1$ 分别代入(51), 构成两个方程; 将 $\nu = \nu_0$ 代入(51)对 ν 的一阶微商式构成另一个方程; 再考虑到等式(47), 就可以得到确定共振参数的四元超越联立方程组:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 \nu_{R_1} &= \Phi(\Gamma_1, \Gamma_2, \nu_{R_1}, \nu_{R_2}), \\ \frac{N(\nu_0)}{D(\nu_0)} &= \Gamma_1 A(\nu_0) + \Gamma_2 B(\nu_0), \\ \frac{N(\nu_1)}{D(\nu_1)} &= \Gamma_1 A(\nu_1) + \Gamma_2 B(\nu_1), \\ \left[\frac{N(\nu)}{D(\nu)} \right]'_{\nu=\nu_0} &= \Gamma_1 A'(\nu)|_{\nu=\nu_0} + \Gamma_2 B'(\nu)|_{\nu=\nu_0}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

在具体计算中, 我们取 $\nu_0 = -1.2$, $\nu_1 = -1.6$. 由于(52)是个异常复杂的四元联立超越方程组, 求解过程是非常繁琐的, 我们利用普通电动计算机求得的解如下

$$\nu_{R_1} = 6.4, \Gamma_1 = 0.12; \nu_{R_2} = 20, \Gamma_2 = 0.016. \quad (53)$$

它们分别相应于

$$m_\rho \approx 762 \text{ MeV}, m_{\rho^0} \approx 1283 \text{ MeV}, \rho \text{ 的半宽度} \approx 45 \text{ MeV}. \quad (54)$$

将解得的共振参数(53)代入(40)和(41),可求得 $\text{Re } D(\nu)$, $N(\nu)$ 的具体形式,它们随 ν 的变化关系如图 1, 2 所示. 由图 1 可以看出, $\text{Re } D(\nu)$ 的曲线基本上接近于一条直线. 具体计算表明,在 $0 < \nu < 20$ 区间内,(41)右端第二项比第一项 $\frac{\nu_{R_1} - \nu}{\nu_{R_1} - \nu_0}$ 小很多(其相对比例最大不超过 3%),因此 $\text{Re } D(\nu)$ 可近似表示为

$$\text{Re } D(\nu) \approx \frac{\nu_{R_1} - \nu}{\nu_{R_1} - \nu_0}, \quad (55)$$

而相应的(46)式可表为

$$\Gamma_1 \nu_{R_1} \approx (\nu_{R_1} - \nu_0) N(\nu_{R_1}). \quad (56)$$

(55)和(56)正是 Bálazs 所采用的近似^[4]. 本文所导得的这个 $\text{Re } D$ 的近似形式不是人为的假设,而是理论的结果. 事实上,由(41)可以看出,对于已知的 ν_{R_1} 和 ν_{R_2} 只有当 X 和 Y 很小时,(41)右端的第二项才能忽略,而由(32)知道, X 和 Y 很小对应于 Γ_1 与 Γ_2 很小,因此 Bálazs 所采用的(55)和(56)近似是在(41)中忽略谱宽的结果.

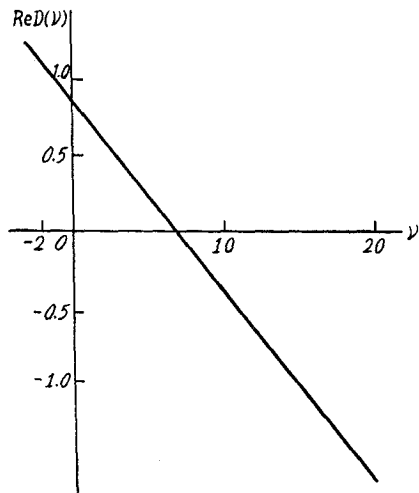


图 1

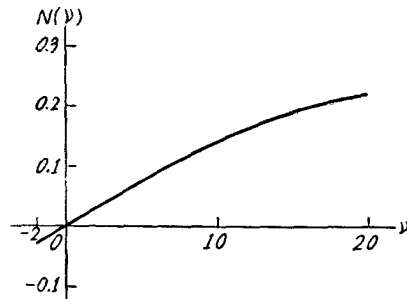


图 2

由(45)与(53)可以计算出偏离函数 $F_1(\nu) \equiv F_1(\nu)$ 随 ν 的变化关系. 具体计算表明,在一般情况下, $F_1(\nu)$ 与 1 是有一定偏离的,但在 $3 < \nu < 10$ 区间内, $F_1(\nu)$ 基本上是一条接近于 1 的直线,其图形如图 3 所示. $F_1(\nu)$ 的形状告诉我们,在上述区间内, Breit-Wigner 共振形式可以认为是一个较好的近似. 事实上,在(45)中令 $F_1(\nu) = 1$, 然后与(56)比较,就可得到 Bálazs 对于 $N(\nu)$ 函数所作的假设

$$N(\nu) = \frac{\nu}{\nu_{R_1}} N(\nu_{R_1}). \quad (57)$$

实际计算发现,上式在 $3 < \nu < 10$ 区间较好地成立. 由(55)、(56)立即可以导出 Breit-Wigner 形式的共振振幅. 因此本文理论说明,在 ρ 和 ρ^0 的 Bootstrap 近似下,(55)和(56)的确是较好的近似.

利用公式

$$\sigma_1(\nu) = \frac{12\pi}{\nu} \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} \operatorname{Im} A_{(1)}^1(\nu) = \frac{12\pi(\Gamma_1)^2 \frac{\nu^2}{\nu+1}}{[(\nu_{R_1} - \nu)F_1(\nu)]^2 + (\Gamma_1)^2 \frac{\nu^3}{\nu+1}} \quad (58)$$

可计算出 P 波共振截面曲线 (见图 4)。由 $\sigma_1(\nu)$ 曲线可得 ρ 共振态实际半宽度约为 45 MeV。

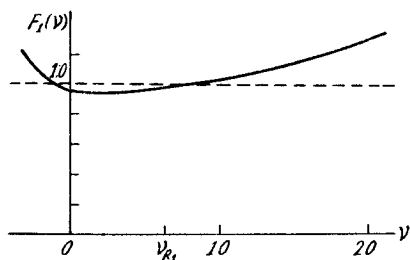


图 3

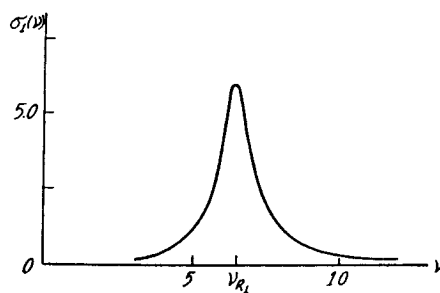


图 4

最后,我们还要指出,以上在交叉道中所采用的 ρ 和 f^0 共振近似,相当于文献[1]中所引入的两个等效左极点近似,不过在文献[1]中左极点的引入是人为的。由(40)可以看出,这两个等效左极点的位置相当于 $\nu = -(\nu_{R_1} + 1)$ 和 $\nu = -(\nu_{R_2} + 1)$ 。对于我们的自恰解,即 $\nu_{R_1} = 6.4$ 和 $\nu_{R_2} = 20$ 相当于吸引极点的位置为 $\omega_A = -21$, 而排斥极点 $\omega_R = -7.4$, 这与文献[1]所假定的两个极点位置还是相近的。在(40)中,我们所求得的 Y 和 $(-X)$ 相当于文献[1]中等效极点所对应的留数, X 和 Y 值为正。因此从物理上可以这样说,对 $N(\nu)$ 函数所做的两个等效左极点的近似正是交叉通道中所采取的 ρ 和 f^0 共振近似的结果,正是这一对吸引与排斥的交换力自恰地构成了主通道中 ρ 共振态的出现。

参 考 文 献

- [1] Chew, G. and Mandelstam, S. *Nuovo Cimento*, **19** (1961), 752.
- [2] Zachariasen, F., *Phys. Rev. Letters*, **7** (1961), 112; 268.
- [3] Efremov, A., Shirkov, D., Hun-Yuan Tzu (朱洪元), *Scientia Sinica*, **8** (1961), 812.
- [4] Bálazs, L., *Phys. Rev.*, **128** (1962), 1939.
- [5] Bálazs, L., *Phys. Rev.*, **129** (1963), 872.
- [6] Bálazs, L., *Phys. Rev.*, **134** (1964), B1315.
- [7] Bálazs, L., *Phys. Rev.*, **132** (1963), 866.
- [8] Bransden, B., Bruke, P. and Moffat, J., *Nuovo Cimento*, **30** (1963), 207.
- [9] Kreps, R., Cook, L., Brehm, J. and Blankenbecler, R., *Phys. Rev.*, **133** (1964), B1526.
- [10] Kanki, T. and Tubis, A., *Phys. Rev.*, **136** (1964), B722.
- [11] Серебряков, В., Ширков, Д., *ЖЭТФ*, **42** (1962), 610.
- [12] 葛墨林、段一士 (未发表).
- [13] Efremov, A., Meshcheryakov, V., Shirkov, D. and Hun-Yuan Tzu (朱洪元), *Proceeding of the 1960 Annual International Conference on High Energy Physics at Rochester*, p. 278;
Сянь Дин-чан (洗鼎昌), Хэ Цзо-сю (何祚庠), Цёллер, В., *ЖЭТФ*, **39** (1960), 1668.

ON THE π - π RESONANCE STATES

K' MO-LIN TUAN I-SHIH

ABSTRACT

From the requirements of analyticity and unitarity, the resonance behaviours of the partial wave amplitudes for π - π scattering are discussed in general. The theory involves a function $F'_{lJ}(\nu)$, which indicates deviation from the Breit-Wigner type resonance formula. When $F'_{lJ}(\nu) = 1$, the amplitude has exactly the Breit-Wigner form. Further investigation shows that the function $F'_{lJ}(\nu)$ in general deviates from 1.

By use of the ND^{-1} method, the crossing symmetry and the ρ - and f^0 -bootstrap approximation, by comparing with the integral expression of the partial wave amplitude for the interval $-9 < \nu < 0$, the P - and D -waves self-consistent solution, i.e. the resonance solutions for ρ and f^0 are calculated. The method takes into account both the contributions of the inelastic process and the dispersion integral of the negative interval. The calculation gives $\nu_{R_1} = 6.4$, $\Gamma_1 = 0.12$ for the $J = 1$, $I = 1$ state and $\nu_{R_2} = 20$, $\Gamma_2 = 0.016$ for the $J = 2$, $I = 0$ state. These results correspond to a mass of 762 MeV and a half-width of about 45 MeV for the ρ meson, and a mass of 1283 MeV for the f^0 meson. They are in good agreement with recent experimental data.