

# 非线性串联电路中的拟张弛振动\*

古孝鴻  
(成都电讯工程学院)

## 提 要

由于电阻温升的改变滞后于电流的改变,在非线性串联电路中可能引起电流或电压振幅的周期性突变——拟张弛振动。本文分析了产生这种拟张弛振动的充要条件,以及当参数变化时系统的性态等问题。

文献[1]研究了由非线性电感、线性电容及非线性电阻(灯泡)组成的串联回路;指出了在正弦电压的作用下,可能观察到闪光现象。其实,在文献[3—6]中已在不同程度上研究过这类问题;并曾指出,这是由于电阻的改变,在时间上滞后于电流“振幅”的改变所引起的。当然,文献[1]的研究较为深入些。

在许多电路中,某些电磁量本身可能是连续变化的,但其“振幅”却发生周期性的突变。这种现象可称为拟张弛振动。从微分方程论的观点来看,拟张弛振动系统属于非线性非自治系统。对这类问题进行详细的、精确的研究有很大的困难。上述文献均采用了“惯性化”方案来进行近似研究,并在不同程度上取得了若干重要的结果。但是,对于其中某些问题,比如,产生拟张弛振动的充要条件、系统运动性态和系统参数的关系等等问题,尚有进一步研究的必要。

研究拟张弛振动的数学困难是很大的。由 B. 范德坡、Л. С. 庞特里雅金和 A. А. 安东诺夫等人所建立和发展起来的振动理论方法,给出了解决这个问题的基础。本文将慢变振幅法、张弛振动理论和图解法结合起来,分析了非线性串联回路中一次谐波的拟张弛振动,给出了产生拟张弛振动的充要条件,研究了系统性态与系统参数的关系,等等。研究中考虑了日益常用的非线性电容。文末与实验结果作了比较。

## 一、运动方程

研究由非线性电阻、非线性电感和非线性电容组成的串联回路,将此回路接通到正弦电压上(图1)。设  $u = U_m \sin \omega t$ 。

### 1. 电磁运动方程

对于非线性电感元件,略去其中的磁滞,其特性曲线可假设为单调的,并可用下式逼近:

$$i = \frac{1}{L_1} \phi + \frac{1}{L_3} \phi^3, \quad (1.1)$$

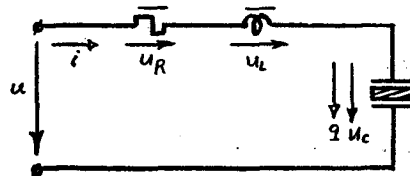


图 1

\* 1963年9月24日收到。

其中  $i$  为电流;  $\psi$  为磁链;  $L_1, L_3$  为正实常数. 根据电流磁链的实测特性,  $L_1, L_3$  可按使相对误差为最小的方法(最小二乘法)进行选择.

类似地,对于非线性电容元件,忽略其中的电滞,可用下式逼近:

$$u_c = \frac{1}{C_1} q + \frac{1}{C_3} q^3, \quad (1.2)$$

其中  $u_c$  为电容上的电压;  $q$  为电荷;  $C_1, C_3$  为正实常数,其选择方法和电感同.

非线性电阻元件的瞬时电阻值以  $R$  表示.

根据克希荷夫定律,并考虑到式(1.1), (1.2), 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{L_1} \psi + \frac{1}{L_3} \psi^3, \\ \frac{d\psi}{dt} &= U_m \sin \omega t - \frac{1}{C_1} q - \frac{1}{C_3} q^3 - \frac{R}{L_1} \psi - \frac{R}{L_3} \psi^3. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

为了研究方便起见,将上式写为无量纲形式. 为此,任意选定一个单位为伏特的正常数  $E$ , 并令

$$\left. \begin{aligned} q &= EC_1 x, & \psi &= E\sqrt{L_1 C_1} y, & R &= \frac{1}{\omega C_1} z, \\ \omega t &= \tau, & n &= \frac{1}{\omega \sqrt{L_1 C_1}}, & B &= \frac{U_m n}{E}, \\ \frac{3E^2 L_1 \sqrt{L_1 C_1}}{4\omega L_3} &= a, & \frac{3E^2 C_1^3}{4C_3 \omega \sqrt{L_1 C_1}} &= b, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

可得

$$\frac{dx}{d\tau} = ny + \frac{4}{3} ay^3, \quad (1.5a)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = B \sin \tau - nx - n^2 yz - \frac{4}{3} bx^3 - \frac{4}{3} any^3 z. \quad (1.5b)$$

## 2. 电磁运动方程的简化<sup>[7-9]1)</sup>

令

$$\left. \begin{aligned} y &= y_1 \sin \tau + y_2 \cos \tau, \\ x &= x_1 \sin \tau + x_2 \cos \tau, \\ \frac{dx}{d\tau} &= x_1 \cos \tau - x_2 \sin \tau, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

代入式(1.5a), 略去三次谐波, 并比较  $\sin \tau, \cos \tau$  项的系数, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_2 [n + ar^2], \\ x_2 &= -y_1 [n + ar^2], \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

其中  $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ .

设电流电压的“振幅”是慢变的, 而电阻的改变又远滞后于电流电压“振幅”的改变. 将方程(1.6), (1.7)代入式(1.5b), 略去三次谐波, 并比较  $\sin \tau, \cos \tau$  项的系数, 可得

1) 这段采用的方法是不够严格的近似方法. 可以采用其他较严格的方法进行分析. 比如, 用渐近法、邦加莱方法等等. 这里需要指出的是: 本文所得结果正是渐近法、邦加莱方法的改善一次近似或二次近似. 由于在工程上这种近似已经可用, 并由于所采用的方法比较简明, 故采用.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2 - ny_2[n + ar^2] - n^2zy_1 - by_2r^2[n + ar^2]^3 - anz_1r^2 + B = Y_1, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -y_1 + ny_1[n + ar^2] - n^2zy_2 + by_1r^2[n + ar^2]^3 - anz_2r^2 = Y_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

經過上述簡化,已將非自治方程組(1.3)化為自治方程組(1.8)。這便於利用張弛振動理論在相空間中進行研究。

### 3. 熱平衡方程<sup>[1,10]</sup>

非綫性電阻元件的電阻值的改變是由於溫度的改變而引起的。電阻元件事實上由兩部分組成:  $R = R_\theta + R_L$ 。  $R_\theta$  是鎢絲燈的電阻,它與溫度有關,是非綫性的;  $R_L$  是繞圈損耗電阻和電容器漏電阻,可視為與溫度、電流無關,是綫性的,因而只需研究鎢絲燈的熱平衡方程。此方程可寫為

$$K \frac{d\theta}{dt} = I^2 R_\theta - \phi(\theta, \theta_0), \quad (1.9)$$

而

$$R_\theta = R_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)], \quad (1.10)$$

其中  $I$  為通過鎢絲燈的電流有效值;  $\theta$  為燈絲溫度,  $\theta_0$  為室溫,單位均為 $^{\circ}\text{C}$ ;  $R_0$  為室溫下的燈絲電阻值;  $K$  為發熱係數,單位為焦耳/ $^{\circ}\text{C}$ ,可視為正實常數;  $\alpha$  為溫度係數,單位為 $1/^{\circ}\text{C}$ ,可視為正實常數;散熱功率  $\phi(\theta, \theta_0)$  根據普遍牛頓公式決定,即  $\phi(\theta, \theta_0) = K_r(\theta - \theta_0)$ ;其中,  $K_r$  為散熱係數,單位為瓦/ $^{\circ}\text{C}$ ,可視為正實常數。

上述一系列假定的正確性將在附錄中說明。

由式(1.9),(1.10)可得

$$\frac{K}{\alpha R_0} \frac{dR_\theta}{dt} = \left[ I^2 - \frac{K_r}{\alpha R_0} \right] R_\theta + \frac{K_r}{\alpha}. \quad (1.11)$$

考慮到電流“振幅”是慢變的,可近似認為在  $2\pi$  時段內,  $x_1, x_2$  是不變的。由式(1.6)可得

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 dt = \frac{E^2 \omega^2 C_1^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x_1 \cos \tau - x_2 \sin \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} E^2 \omega^2 C_1^2 r^2 [n + ar^2]^2. \end{aligned}$$

考慮到簡化表示符號(1.4),並令

$$\begin{aligned} \frac{K\omega}{\alpha R_0} \cdot \frac{2}{E^2 \omega^2 C_1^2} &= \lambda, \quad \frac{K_r}{\alpha R_0} \cdot \frac{2}{E^2 \omega^2 C_1^2} = c, \\ \frac{K_r}{\alpha} \cdot \frac{2}{E^2 \omega C_1} &= d, \quad R_L \omega C_1 = z_L, \end{aligned}$$

代入式(1.11),可得

$$\lambda \frac{dz}{d\tau} = [r^2(n + ar^2)^2 - c][z - z_L] + d. \quad (1.12)$$

### 4. 退化模型

既然擬張弛振動的產生是由於電阻的改變遠滯後於電流“振幅”的改變而引起的,則無量綱電阻  $z$  的變化應有很大的“時間常數”,即應要求  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  是一個小參數。引入“慢

時間”  $\tau_0 = \mu\tau$ , 則方程(1.8)、(1.12)可改寫為

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{dy_1}{d\tau_0} &= y_2 - ny_2[n + ar^2] - n^2zy_1 - by_2r^2[n + ar^2]^3 - anz_1r^2 + B = Y_1, \\ \mu \frac{dy_2}{d\tau_0} &= -y_1 + ny_1[n + ar^2] - n^2zy_2 + by_1r^2[n + ar^2]^3 - anz_2r^2 = Y_2, \\ \frac{dz}{d\tau_0} &= [r^2(n + ar^2)^2 - c][z - z_L] + d = Z. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Л. С. Понтрягин, А. М. Тихонов 及其他許多學者曾對這類方程進行過深入的研究(可參考文獻[2]), 指出:  $n = 3$  維全相空間可分為兩個子空間; 一個是  $n' = 1$  維子空間  $F_1$ , 一個是  $s = 2$  維子空間  $G_2$ .

在  $n' = 1$  維子空間  $F_1$  的  $O(\mu)$  鄰域中, 運動是緩慢的。當  $\mu \rightarrow 0$  時, 可用退化模型

$$\left. \begin{aligned} Y_1 = Y_2 = 0, \\ \frac{dz}{d\tau_0} = Z \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

代替方程(1.13)的詳細研究。

在  $s = 2$  維子空間中運動是迅速的。在  $F_1$  的  $O(\mu)$  鄰域之外, 當  $\mu \rightarrow 0$  時, 可用迅速運動方程

$$\left. \begin{aligned} z = z_0 = \text{const}, \\ \mu \frac{dy_1}{d\tau_0} = Y_1, \\ \mu \frac{dy_2}{d\tau_0} = Y_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

代替方程(1.13)的詳細研究。

所得結果給出利用擬張弛振動理論在相空間中進行研究的可能性。

## 二、張弛振動的相空間研究<sup>[2]</sup>

### 1. 緩慢運動及其穩定性

緩慢運動是由式(1.14)描述的。根據方程  $Y_1 = Y_2 = 0$  可得

$$F = [1 - n(n + ar^2) - br^2(n + ar^2)^3]r^2 + (n + ar^2)^2n^2z^2r^2 - B^2 = 0. \quad (2.1)$$

要緩慢運動實際上能夠存在, 必須在子空間  $F_1$ , 至少是它的部分子空間  $F_1^+$  中的運動是穩定的。考慮到  $Y_1 = Y_2 = 0$  即式(2.1)正好是方程組(1.15)的平衡條件, 故產生緩慢運動的條件可由 Hurwitz 准則判定。這就要求

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} = -2nz[n + ar^2] < 0, \\ D = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} - \frac{\partial Y_1}{\partial y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} > 0. \end{aligned} \right\}$$

考慮到電阻是正電阻  $z > R_0\omega C_1 > 0$ ,  $r^2$  為正實數, 故第一個條件永遠滿足。容易証

明:  $D = \frac{\partial F}{\partial r^2}$ , 再注意到  $\frac{dz}{dr^2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial r^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ , 且當  $r^2 > 0$  時,  $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$ , 故第二個條件等效於

$$\frac{dz}{dr^2} < 0. \quad (2.2)$$

這就表明：在  $(r^2, z)$  平面上，以  $z$  為縱軸、 $r^2$  為橫軸畫出的曲綫  $F = 0$  的下降段是穩定的，上升段是不穩定的（以後談“上升段”或“下降段”均指按上述方法作出的曲綫而言）。

順便指出，由於  $r^2 > 0, z > 0$ ，故僅需研究  $(r^2, z)$  平面的第一象限即可。

## 2. 特殊情況下的穩定邊界

由於式(2.1)的左端是  $r^2$  的九次多項式，詳細的分析會使初等運算複雜化，在本節以下幾段僅對一個特殊情況進行定性分析。設電感電容的非綫性均很弱，在  $x, y$  實際變化範圍內有  $ax^2 \ll n, bx^2 \ll n^3$ ，略去二階以上微量，方程(2.1)可寫為

$$F = [1 - n^2 - anr^2 - bn^3r^2]^2r^2 + [n + ar^2]^2n^2zr^2 - B^2 = 0, \quad (2.3)$$

而

$$\frac{dz}{dr^2} = - \frac{(1-n^2)^2 - 4(1-n)(an+bn^3)r^2 + 3(an+bn^3)^2r^4 + (n^2+4anr^2+3a^2r^4)n^2z^2}{(n+ar^2)^2n^2zr^2}. \quad (2.4)$$

由上式可見，當  $n^2 \geq 1$  時，在  $(r^2, z)$  平面的第一象限內恆有  $\frac{dz}{dr^2} < 0$ 。這就表明：系統實際上只可能發生緩慢運動，而不會產生張弛運動。因此，能產生張弛振動的一個必要條件是

$$n^2 < 1. \quad (2.5)$$

由於  $n^2 = \frac{1}{\omega^2 L_1 C_1}$ ，故條件(2.5)歸結為  $\omega L_1 > \frac{1}{\omega C_1}$ 。這個要求的必要性在理論電工學上是很容易理解的。

但是，條件(2.5)僅為必要而非充分。滿足條件(2.5)只說明曲綫  $F = 0$  可能存在上升段（不穩定段），但並不一定。要系統產生張弛振動還必須肯定曲綫  $F = 0$  既有上升段也有下降段。這時，一維子空間  $F_1$  劃分為兩部分：一部分是  $F_1^+$ ，在其中條件(2.2)滿足（即曲綫  $F = 0$  的下降段），運動是緩慢的，小參數  $\mu$  是不重要的；另一部分是  $F_1^-$ ，在其中條件(2.2)不滿足（即上升段），運動將變為迅速的，小參數  $\mu$  是重要的。容易證明：曲綫  $F = 0$  在第一象限內下降段必然存在，因此，產生張弛振動的另一個必要條件是上升段存在。在所作假設下，這個條件可以解析地表出。

由於曲綫  $F = 0$  的連續性，當上升段和下降段同時存在時，必然在曲綫  $F = 0$  上存在着這樣的點，使得

$$\frac{dz}{dr^2} = 0 \quad (2.6)$$

滿足。這個點是  $F_1^+$  和  $F_1^-$  的分界點。由式(2.3)、(2.4)及(2.6)可得

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr^2} = \frac{\partial F}{\partial r^2} = D = & (\delta^2 - 4\delta hr^2 + 3h^2r^4) + \\ & + (n^4 + 4an^3r^2 + 3a^2n^2r^4)z^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.7a)$$

1) 以下的分析可用於不滿足上述條件，但有  $a = 0$  或  $b = 0$  的情況。

即

$$(2h^2n + 2\delta ah)r^6 - (2\delta hn + 2a\delta^2)r^4 + 3aB^2r^2 + nB^2 = 0, \quad (2.7b)$$

其中  $\delta = 1 - n^2$ ,  $h = an + bn^3$ .

分界点存在的充分而必要的条件是上式存在着正实根。根据各项系数的正负号分布,可知根的分布可分为三种情况(参考文献[11])。令

$$\begin{aligned} a_0 &= 2h^2n + 2\delta ah, & a_1 &= -\frac{2}{3}(\delta hn + a\delta^2), \\ a_2 &= aB^2, & a_3 &= nB^2, \\ H &= a_0a_2 - a_1^2, & G &= a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 3a_1^3. \end{aligned}$$

情况 I 当  $G^2 + 4H^3 < 0$ , 方程(2.7)有一负根及二相异正实根。

情况 II 当  $G^2 + 4H^3 > 0$ , 方程(2.7)有一负根及二具正实部的共轭复根。

情况 III 当  $G^2 + 4H^3 = 0$ , 方程(2.7)有一负根及二相等正实根。

指出: 最后一种情况对应于在  $(r^2, z)$  平面上, 曲线  $F = 0$  有一个具有水平切线的拐点。在这点上,  $\frac{\partial^2 F}{\partial (r^2)^2} = 0$ 。由于对参数的改变, 其概率为零, 在物理上, 这种情况不能实现。

容易证明: 情况 I 下, 曲线  $F = 0$  的形状如图 2(a), 这时有可能发生张弛运动。而情况 II 及情况 III 下, 曲线  $F = 0$  分别如图 2(b) 和 2(c) 所示, 张弛振动是不可能的, 系统实际上仅可能发生缓慢运动。因而能够产生张弛振动的另一个必要条件是

$$G^2 + 4H^3 < 0.$$

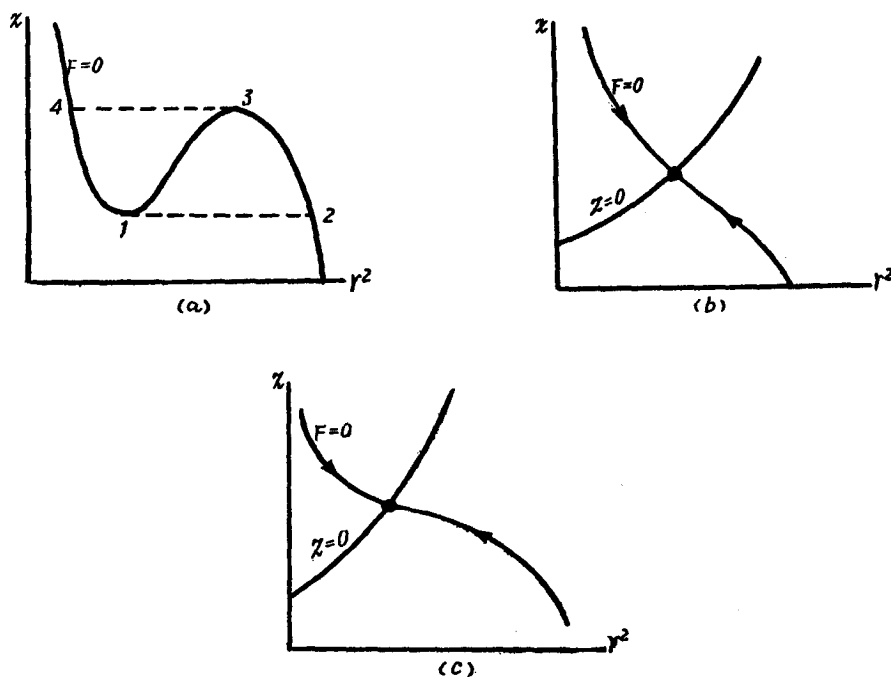


图 2

計算表明：此條件等效於

$$6ha^3B^4 - (hn + a\delta)(3h^2n^2 + 6hn\delta a - \delta^2a^2)B^2 + \frac{8\delta^3}{9}(hn + a\delta)^2 < 0. \quad (2.8)$$

當滿足此條件時，在 $(r^2, z)$ 平面的第一象限內，曲線 $F = 0$ 具有兩個斜率為零之點，曲線形狀如圖 2(a) 所示，有可能發生張弛振動。

應當指出：由於 $hn + \delta a > 0$ ，當 $\delta < 0$ 時，方程(2.7b)各項係數均非負值，不可能有正實根，因而必然不滿足不等式(2.8)，故(2.5)含於(2.8)之中。

### 3. 迅速運動及躍變條件

迅速運動由方程(1.15)描述。由文獻[2]可知，可用躍變條件代替迅速運動方程(1.15)的詳細研究。當由一種緩慢運動躍變到另一種緩慢運動時， $z$ 是不變的。如以 $(r_{2n-1}^2, z_n)$ 表示躍變始點的坐標，而以 $(r_{2n}^2, z_n)$ 表示躍變終點的坐標(其中 $n = 1, 2$ )，則始點坐標與終點坐標之間應滿足關係式

$$\left. \begin{aligned} F(r_{2n-1}^2, z_n) &= 0 & (n = 1, 2), \\ D(r_{2n-1}^2, z_n) &= 0 & (n = 1, 2), \\ F(r_{2n}^2, z_n) &= 0 & (n = 1, 2). \end{aligned} \right\}$$

在前述簡化假設下，有

$$\left. \begin{aligned} (\delta - hr_{2n-1}^2)^2 r_{2n-1}^2 + (n + ar_{2n-1}^2)^2 n^2 z_n^2 r_{2n-1}^2 - B^2 &= 0 & (n = 1, 2), \\ (\delta^2 - 4\delta hr_{2n-1}^2 + 3h^2 r_{2n-1}^4) + (n^4 + 4an^3 r_{2n-1}^2 + 3a^2 n^2 r_{2n-1}^4) z_n^2 &= 0 & (n = 1, 2), \\ (\delta - hr_{2n}^2)^2 r_{2n}^2 + (n + ar_{2n}^2)^2 n^2 z_n^2 r_{2n}^2 - B^2 &= 0 & (n = 1, 2). \end{aligned} \right\}$$

由此三方程式可以唯一地決定躍變始點和終點的坐標。精確求解通常很麻煩，可用數值法求解，或用圖解法求解。在圖 2(a)中，躍變始點是點“1”和“3”，而躍變終點是點“2”和“4”。

### 4. 平衡狀態和奇點

系統的平衡狀態與完整相空間的奇點相對應。奇點的坐標由公式 $Y_1 = Y_2 = Z = 0$ 決定。在 $(r^2, z)$ 平面上，曲線 $Z = 0$ 與曲線 $F = 0$ 的交點便是奇點。

由式(1.13)可見：在曲線 $Z = 0$ 的上方，沿曲線 $F = 0$ 發生的運動有 $\frac{dz}{d\tau_0} < 0$ ，即運動是沿 $z$ 的減少方向進行的。在曲線 $Z = 0$ 的下方，沿曲線 $F = 0$ 發生的運動有 $\frac{dz}{d\tau_0} > 0$ ，

即運動是沿 $z$ 的增長方向進行的。結合關於曲線 $F = 0$ 上運動穩定性的討論，可以相信：當曲線 $F = 0$ 不具有上升段時，唯一的平衡狀態總是穩定的[圖 2(b)和 2(c)]。當曲線 $F = 0$ 具有上升段時，可能的幾種基本情況如圖 3 所示；處於上升段的奇點是不穩定的，而處於下降段的奇點是穩定的(至於其他幾種臨界情況，由於對參數的微小改變是不穩定的，本文不加討論)。

顯然，僅當唯一的奇點處於曲線 $F = 0$ 的上升段的情況[圖 3(c)]才可能產生張弛振動。這又是一個必要條件。但要用解析式表示此條件却很麻煩，不如直接作圖簡單(關於解析計算在第三節第 4 段作了間接說明)。

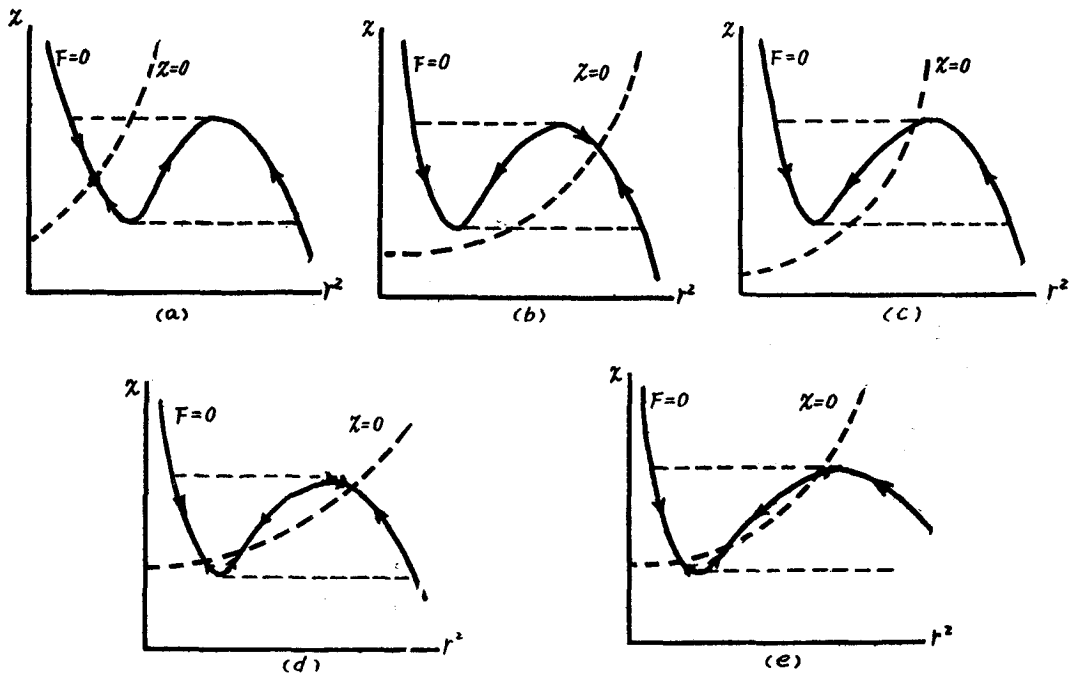


图 3

### 5. 相平面的軌綫剖分

由上可知：产生张弛振动的必要条件是曲线  $F = 0$  存在着上升段，且奇点仅分布于上升段上。在这种情况下，当  $\mu \rightarrow 0$  时作出相平面的軌綫剖分如图 4 所示。这里存在着一个稳定的断續极限环；它对应于系统的张弛振动，故上述条件也是充分条件。

上面的研究适用于  $\mu \rightarrow 0$ ，当  $\mu > 0$  时接近于所指出的情况， $\mu$  愈小则愈接近。

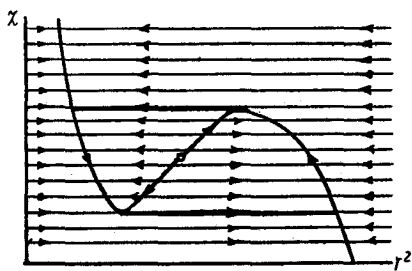


图 4

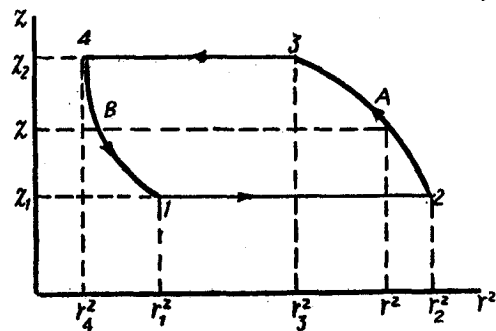


图 5

### 6. 张弛振动的周期与波形

研究緩慢运动，即描述点沿曲线  $F = 0$  的下降段运动的情况。設当  $\tau_0 = \tau_{02}$  时，坐标为  $(r_2^2, z_1)$  (图 5)。由式(1.14)可得

$$d\tau_0 = \frac{1}{Z(r^2, z)} dz,$$



則描述点运动到坐标为  $(r^2, z)$  之点所需之时间为

$$\tau_0 - \tau_{02} = \int_{z_1}^z \frac{1}{Z(r^2, z)} dz. \quad (2.9)$$

由式(2.1)或(2.3)解出  $r^2$ , 代入上式, 便可进行积分. 假定跃变是瞬时完成的, 則振動周期可以近似决定

$$T_0 = (\tau_{03} - \tau_{02}) + (\tau_{01} - \tau_{04}) = \int_{z_1 A z_2} \frac{1}{Z} dz + \int_{z_2 B z_1} \frac{1}{Z} dz.$$

实际进行此积分有困难; 今建議一种图解法. 以  $2A3$  段为例进行說明. 在曲綫  $F = 0$  的  $2A3$  段任給一系列的  $r^2$  值, 求得相应的  $z$  值, 因而可以計算出一系列的  $\frac{1}{Z(r^2, z)}$  值, 并可作出  $\frac{1}{Z} \sim z$  的关系曲綫(图 6). 于是积分(2.9)式便归结为求面积的問題. 这个面积可用許多方法求得.

給积分(2.9)式以不同的上限值, 求得相应的面积, 也就是求得一系列的  $\tau_0$  值, 便可作出  $z \sim \tau_0$  曲綫[图 7(a)].

根据式(2.1)及  $z \sim \tau_0$  曲綫便可作出  $r^2 \sim \tau$  曲綫. 这也可以用作图解.

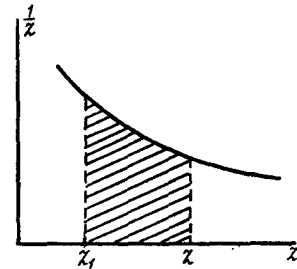


图 6

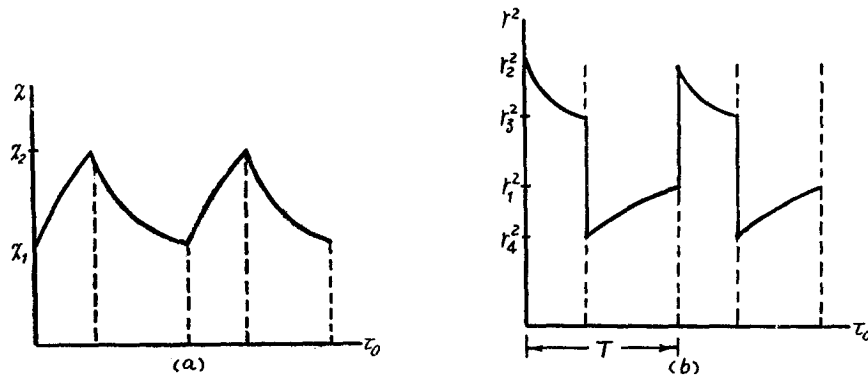


图 7

$$\therefore d\tau_0 = \frac{dz}{dr^2} \frac{1}{Z(r^2, z)} dr^2 = f(r^2, z) dr^2,$$

其中

$$f(r^2, z) = \frac{dz}{dr^2} \frac{1}{Z(r^2, z)},$$

則

$$\tau_0 - \tau_{02} = \int_{r_2^2}^{r^2} f(r^2, z) dr^2. \quad (2.10)$$

象上面一样, 在曲綫  $F = 0$  上給以一系列的  $r^2$  值, 求得相应的  $z$  值, 并計算出相应的  $f(r^2, z)$  值, 作出  $f \sim r^2$  曲綫, 积分(2.10)式便归结为求面积的問題. 給积分以不同的上限, 便可作出  $r^2 \sim \tau_0$  曲綫[图 7(b)].

由式(1.7),(1.8)可得如下的关系式:

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{B} r^2 n z [n + ar^2], \\y_2 &= -\frac{1}{B} r^2 [1 - n(n + ar^2) - br^2(n + ar^2)^3], \\x_1 &= y_2 [n + ar^2], \\x_2 &= -y_1 [n + ar^2].\end{aligned}$$

据此不难作出相应的波形曲线。

“无量纲慢时间”化为通常时间的公式为  $t = \frac{\lambda}{\omega} \tau_0$ 。

### 7. 关于“惯性化”方案

前面我们得到缓慢运动曲线  $F = 0$ 。现在, 我们指出: 这条曲线与理论电工学中采用“惯性化”方案所得的“谐振曲线”是一致的。

令  $r_x^2 = x_1^2 + x_2^2$ , 由式(1.7)可得  $r_x^2 = r^2(n + ar^2)^2$ , 代入式(2.1), 可得

$$[r - nr_x - br_x^3]^2 + n^2 z^2 r_x^2 = B^2.$$

再将式(1.4)代入此式, 可写为

$$\left[ \omega \psi_m - \frac{1}{C_1} q_m - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{C_3} q_m^3 \right]^2 + R^2 \omega^2 q_m^2 = U_m^2.$$

其中  $\psi_m, q_m$  分别为磁链和电量的一次谐波的振幅。

在仅研究一次谐波时, 电感元件的端压振幅  $U_{Lm} = \omega \psi_m$ , 而电容元件的端压振幅  $U_{Cm} = \frac{1}{C_1} q_m + \frac{3}{4C_3} q_m^3$ , 电阻元件的端压振幅  $U_{Rm}^2 = R^2 I_m^2 = R^2 \omega^2 q_m^2$ , 故上式可写为

$$[U_{Lm} - U_{Cm}]^2 + U_{Rm}^2 = U_m^2.$$

这和理论电工学中采用“惯性化”方案所得结果是一致的。不同之处在于: 本文给出了较严格的数学根据, 并在研究中考虑了非线性电容。另一方面, 本文指明了并非曲线  $F = 0$  即“谐振曲线”有不稳定段就可产生拟张弛振动; 要想产生拟张弛振动还必须对热平衡关系, 精确点说是对平衡状态的稳定性有一定的要求。

## 三、当参数变化时系统的性态

这个问题的详细的解析研究会增加初等计算的困难, 为了简单明了起见, 本文配合一个例子说明此问题, 且仅研究单一参数变化时系统的性态。

指出: 前面为简便计, 将各物理量进行无量纲化, 在工程计算上这不完全是必要的。本文以下为比较起见, 仍然这样做。

### 1. 电源电压的影响

研究  $U_m$  变动, 因而  $B$  变动时对系统的影响。当  $B$  变动时曲线  $F = 0$  变形。当  $B$  增加至某定值之后, 曲线  $F = 0$  上升段消失, 张弛振动成为不可能。假设能适当选择灯泡的容量, 使在曲线  $F = 0$  有上升段时, 能保证奇点是不稳定的 (当曲线  $Z = 0$  通过曲线  $D = 0$  的极值时便是如此); 因而只需考虑  $B$  变动时曲线  $F = 0$  是否具有上升段。

取  $L_1 = 23.6$  亨,  $L_3 = 0.573$  安/伏<sup>3</sup>秒<sup>3</sup>,  $C_1 = 9.0085$  微法,  $C_3 = \infty$ ,  $\omega = 314.2$

弧度/秒,  $E = 77.77$  伏, 由此有

$$F = [0.9523 - 1.9005r^2]^2 r^2 + [0.04769 + 1.9005r^2]^2 z^2 r^2 - B^2 = 0,$$

对于不同的  $B^2$  值作出曲线  $F = 0$  (图 8)。在图中用斜线标出了不稳定区域。在各种  $B^2$  值曲线的上升段均位于此区域内。稳定范围边界由方程(2.7a)确定, 即曲线  $D = 0$ 。

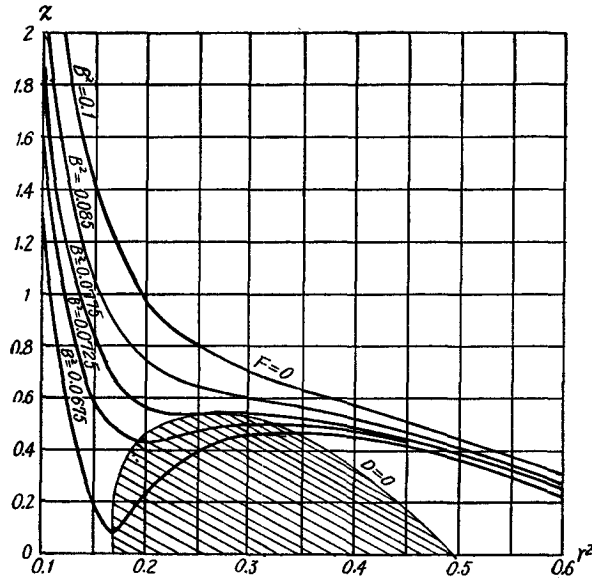


图 8

可见: 随着  $B$  的增加, 发生跃变时相应的  $z$  值增加了; 且跃变始点和终点的  $r^2$  值之差愈来愈小, 即闪光幅度减小了。而由(1.13), (2.9)可见, 闪光周期也迅速减小。当  $B$  超过某一数值  $B_M$  时, 上升段消失, 闪光停止。此  $B_M$  值是  $B$  的上界。当  $B = B_M$  时曲线  $F = 0$  具有水平切线的拐点, 它对应于前节指出的  $G^2 + 4H^3 = 0$  的情况。  $B_M$  由下式确定:

$$6ha^3B^4 - (hn + a\delta)(3h^2n^2 + 6hna\delta - \delta^2a^2)B^2 + \frac{8\delta^3}{9}(hn + a\delta)^2 = 0. \quad (3.1)$$

当  $B$  超过  $B_M$  时, 不管如何选择灯泡容量也不可能产生拟张弛振动。当  $B < B_M$  时, 有可能适当选择灯泡特性以产生拟张弛振动。但是, 由于  $z \geq (R_0 + R_L)\omega C_1 > 0$ , 断续极限环不应与直线  $z = (R_0 + R_L)\omega C_1$  相交; 故  $B$  有一下限值  $B_m$ 。它可以如此确定: 在式(2.7a)中令  $z = (R_0 + R_L)\omega C_1$ , 确定相应的  $r^2$  值; 将此值及  $z = (R_0 + R_L)\omega C_1$  代入式(2.3), 便可确定一  $B$  值, 它可作为  $B_m$  的近似值。

当灯泡特性给定, 虽然上升段存在还不足以保证产生拟张弛振动, 因为奇点不一定就在上升段上。故实际的  $B_M$  值应比上述近似  $B_M$  值小一些, 实际的  $B_m$  值应比上述近似  $B_m$  值大一些。更精确地决定它们将在本节第 4 段中叙述。

## 2. 电感非綫性的影响

$L_1, L_3$  起着类似的作用, 但影响程度是不同的。仅研究  $L_3$  改变, 因而  $a$  改变时曲线  $F = 0$  的形状如何改变。取  $L_1 = 10$  亨,  $C_1 = 21.23$  微法,  $C_3 = \infty$ ,  $\omega = 314.2$  弧度/秒,

$E = 100$  伏,  $B^2 = 0.07$ , 当  $L_3$  取不同值时作出的曲线  $F = 0$  如图 9 所示.

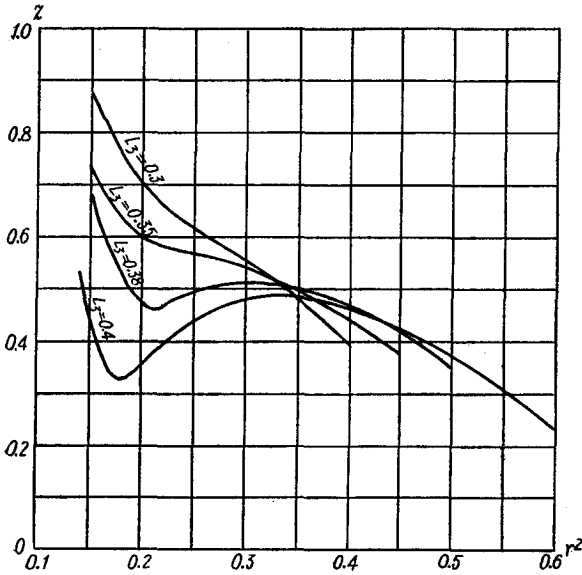


图 9

### 3. 电容非线性的影响

仅研究  $C_3$  改变, 因而  $b$  改变时系统的性态.

取  $L_1 = 10$  亨,  $L_3 = \infty$ ,  $E = 100$  伏,  $C_1 = 21.23$  微法,  $\omega = 314.2$  弧度/秒,  $U_m = 121$  伏, 当  $C_3$  改变时, 作出的曲线如图 10.

可见, 随着  $C_3$  的减少 ( $b$  增加), 发生跃变时, 相应的  $z$  值增加, 闪光幅度逐渐减小, 周期逐渐减小. 也存在着下界  $C_{3m}$ , 它由式 (3.1) 确定.

可类似于上一段确定上界  $C_{3M}$ .

由此段及上段比较可见: 单由非线性电容比单由非线性电感产生拟张弛振动的  $z$  值大,  $r^2$  值小, 周期长, 当非线性因素增加时闪光幅度减小慢.

### 4. 灯泡特性的影响

当灯泡容量增加时, 曲线  $Z=0$  的上升陡度减小 (参考附录). 如果其他参数给定, 则曲线  $F=0$  成为

固定的. 由图 11 可见, 灯泡容量过大或过小都会使奇点处于曲线  $F=0$  的下降段, 使拟张弛振动不可能产生. 具体地说, 便是式 (1.12) 中的参数  $c$  或  $d$  具有其上下界. 它们可

由图 9 可见: 随着  $L_3$  的减小, 发生跃变时相应的  $z$  值增加了, 闪光幅度迅速减小了. 由式 (1.13), (2.9) 可知周期也将减小. 当  $L_3$  减小到下限  $L_{3M}$  时, 上升段消失, 闪光停止. 此值仍由式 (3.1) 决定 (解出  $a$  便可求出相应的  $L_3$ ).

由于  $z \geq (R_0 + R_L)\omega C_1 > 0$ ,  $L_3$  也有一上界  $L_{3M}$ , 它可近似决定: 令  $z = (R_0 + R_L)\omega C_1$ , 由式 (2.7a), (2.3) 联立解出  $a$ , 便可求得  $L_3$ , 它就是  $L_{3M}$  的近似值. 但直接很繁, 可在  $(a, r^2)$  平面上作图求解.

指出: 和前面类似, 如此确定的近似临界值, 上限偏高、下限偏低.

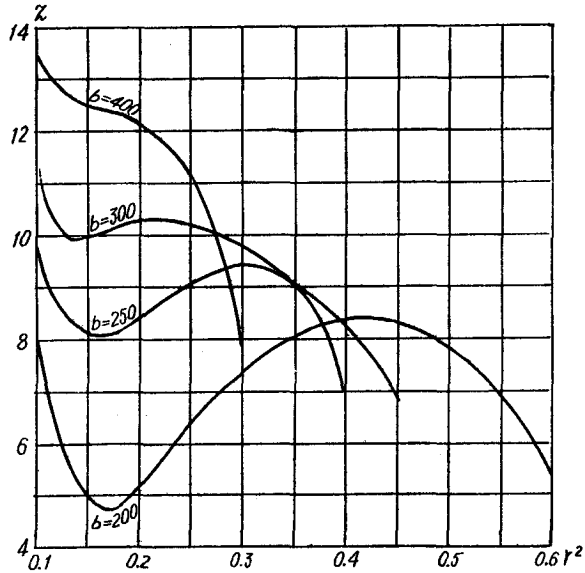


图 10

如此確定：將圖 11 中  $a, b$  兩點的坐標  $(r^2, z)$  分別代入  $Z = 0$ ，便可求出  $c$  或  $d$  的上下界。

同時可見，當奇點處於上升段時，擬張弛振動存在，容量改變不會使斷續極限環變形，但由式 (1.13), (2.9) 可見：容量增加將使周期有所減小。

發熱系數  $K$  的改變既不影響斷續極限環，也不影響波形， $K$  的改變僅使周期按比例改變。

如果燈泡特性給定，僅僅曲線  $F = 0$  具有上升段並不能保證產生擬張弛振動。這時可設法使曲線  $F = 0$  變形，使奇點處於曲線  $F = 0$  的上升段。辦法之一是改變電源電壓  $B$ 。一般可作到  $B$

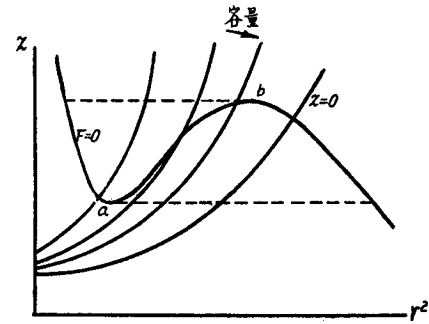


圖 11

取範圍  $(B'_m, B'_M)$  中的任一值均可使擬張弛振動存在。上界  $B'_M$  及下界  $B'_m$  可如此決定：將式  $Z = 0$  與式 (2.7a) 聯立求解，此解有二，它們分別對應於圖 12 中的  $a, b$  兩點，過  $a$  點

的曲線  $F = 0$  有下界  $B'_m$ ，過  $b$  點的曲線  $F = 0$  有上界  $B'_M$ 。用分析式求便是：分別把  $a, b$  兩點的坐標代入式 (2.1) 便可求得  $B'_m$  及  $B'_M$ 。

指出：如果求得的  $B'_M \leq B'_m$ ，則擬張弛振動成為不可能的。

### 5. 初始條件的影響

當能產生擬張弛振動時，不同初始條件產生什麼運動在圖 4 已完全表示出來，無需贅述。其他情況也容易作出相應的相圖，了解運動如何依

賴於初始條件，也不必多談，這裡僅指出在什麼條件下產生一次性閃動。

當曲線  $F = 0$  具有上升段且奇點位於下降段時 [圖 13(a)]，可知當  $z < z_1$  時，任何初始條件均發生一次性閃動。當  $z > z_1$  時，如給  $r^2$  以較大的初始推動也發生一次性閃動。

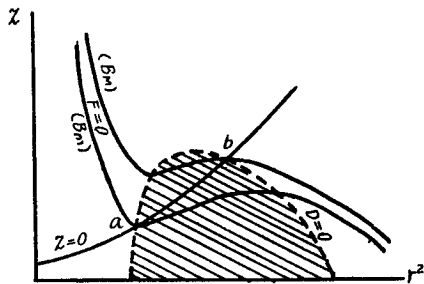


圖 12

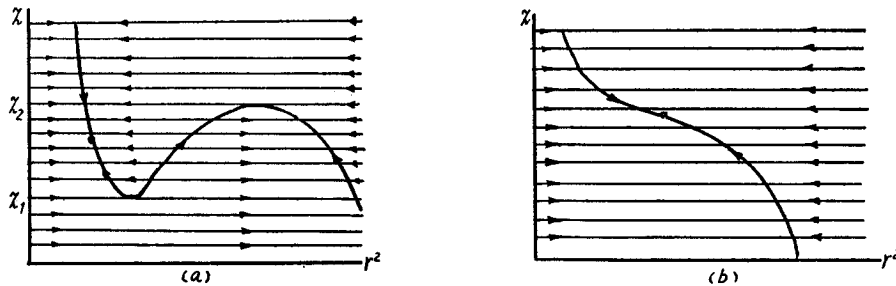


圖 13

如果曲線  $F = 0$  沒有上升段，但奇點的坐標  $r^2$  很小時，當初具條件有較小的  $z$  值也可產生一次性閃動 [圖 13(b)]。

## 四、結 束 語

首先說明实际計算步驟以及理論結果与实验結果的比較。

由于曲綫  $F = 0$  表明无量綱“振幅”之間的关系，故选择正弦电压供电时，測出  $I_m \sim \psi_m$  曲綫和  $U_{Cm} \sim q_m$  曲綫作为电感和电容元件的特性曲綫是恰当的。这样可在一定程度上弥补不考虑高次諧波而造成的誤差。在作者的实验中得到下列数据：

$I_m$ (安)	0.03535	0.0707	0.10605	0.1414	0.2121	0.2828	0.3535	0.4242	0.5656	0.7070
$\psi_m$ (伏秒)	0.2133	0.3400	0.4030	0.4373	0.4972	0.5310	0.5537	0.5755	0.6124	0.6421

根据使平方相对誤差为最小的办法， $L_1, L_3$  可按下式进行計算：

$$\left. \begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{mk}^2}{I_{mk}^2} \right) \frac{1}{L_1} + \left( \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{mk}^1}{I_{mk}^2} \right) \frac{1}{L_3} &= \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{mk}}{I_{mk}}, \\ \left( \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{mk}^1}{I_{mk}^2} \right) \frac{1}{L_1} + \left( \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{mk}^3}{I_{mk}^2} \right) \frac{1}{L_3} &= \sum_{k=1}^n \frac{\psi_{mk}^3}{I_{mk}}, \end{aligned} \right\}$$

其中  $n$  为实测总数，下标  $k$  指第  $k$  次实测。

如此可求得  $L_1 = 23.6$ ， $L_3 = 0.573$ 。

电容可按类似方式选择系数。作者用了一个綫性电容性  $C_1 = 9.0085$  微法。作出的曲綫正是前面研究过的图 8。

实际測定  $R_L = 9$  欧，灯泡冷电阻  $R_0 = 36$  欧，灯泡的伏安特性如下：

$I$ (安)	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$U$ (伏)	2.0	5.0	19.0	43.7	73.5	105	144	188

按附录中叙述的方法作出曲綫  $Z = 0$ ，它与曲綫  $D = 0$  相交于两点，其坐标分别为  $r^2 = 0.1695$ ， $z = 0.222$ ； $r^2 = 0.245$ ， $z = 0.537$ 。代入式(2.1)，可求得电压下界 65.9 伏和电压上界 69.7 伏，这和实测結果 65 伏和 71 伏是相近的。

实测所用一个 100 瓦灯泡的結果，得  $K = 9.85 \times 10^{-3}$  焦尔/°C， $\alpha = 5.9 \times 10^{-3}$  1/°C。

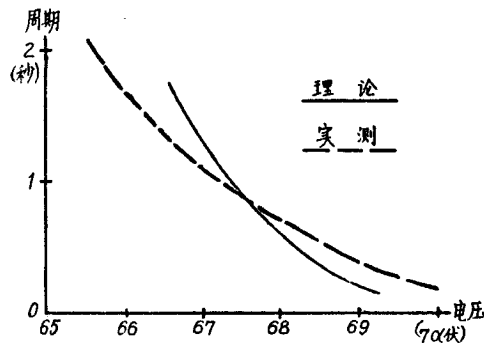


图 14

理論分析所得电压与閃光周期的关系如图 14 所示，在图中也作出了实测曲綫，二者也是相近的。

总之，本文从振動理論的观点分析了串联电路中一次諧波的拟张弛振動，給出了产生拟张弛振動的充分而必要的条件，振動的周期与波形，以及参数改变时系統的性态等結果。本文未考虑高次諧波，高次諧波的考虑将使計算大大复杂化。作者不拟在本文中叙述这一点。只是指出：元件特性表达式

(1.1)和(1.2)可以改用以下二式:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{1}{L_1} \psi - \frac{1}{L_3} \psi^3 + \frac{1}{L_5} \psi^5, \\ u_c &= \frac{1}{C_1} q - \frac{1}{C_3} q^3 + \frac{1}{C_5} q^5. \end{aligned} \right\}$$

这样可以和实际特性曲綫更接近。同样按本文所用方法分析,式(2.1),(2.7a)应代之以

$$F = [1 - n^2 + a_1 n r^2 - a_2 n r^4 + b_1 r^2 (n - a_1 r^2 + a_2 r^4)^3 - b_2 r^4 (n - a_1 r^2 + a_2 r^4)^5] z^2 r^2 + n^2 z^2 r^2 [n - a_1 r^2 + a_2 r^4]^2 - B^2 = 0,$$

$$D = \frac{\partial F}{\partial r^2} = [1 - n^2 + a_1 n r^2 - a_2 n r^4]^2 + z^2 [n^2 - a_1 n r^2 + a_2 n r^4] + 2r^2 [2a_2 n r^2 - a_1 n] [(n^2 - a_1 n r^2 + a_2 n r^4)(z^2 + 1) - 1] = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3E^2 L_1 \sqrt{L_1 C_1}}{4\omega L_3}, & a_2 &= \frac{5E^4 L_1}{8\omega L_5} (L_1 C_1)^{3/2}, \\ b_1 &= \frac{3E^2 C_1^3}{4\omega C_3 \sqrt{L_1 C_1}}, & b_2 &= \frac{5E^4 C_1^5}{8\omega L_5 \sqrt{L_1 C_1}}. \end{aligned}$$

根据这种方法进行理論研究,所得結果和实验結果更接近一些,但改进不太大,計算的复杂性也有所增加,故不詳加說明了。

应当指出:所給出的分析方法并非仅对分析所談的問題有用。許多有关拟张弛振动的問題也可用这种方法分析。比如文献[3]中研究的一大类問題就可用这种方法。含有二个儲能元件(电感和电容)的混联电路中的拟张弛振动的分析,用这种方法是很有有效的。

### 附录 关于非綫性电阻元件的特性

1. 首先說明第一节中所作各种假定能否很好地描述非綫性电阻元件的靜态特性。

在研究靜态特性时,应視电阻上的电流  $i$  及电压  $u_{R\theta}$  不随時間改变,因而  $z, \theta$  不随時間而改变。由热平衡关系有

$$u_{R\theta} i = i^2 R_\theta = \phi(\theta, \theta_0) = K_\tau (\theta - \theta_0). \quad (1)$$

由式(1.10)

$$\frac{u_{R\theta}}{i} = R_\theta = R_0 [1 + \alpha(\theta - \theta_0)],$$

將式(1)代入此式,可得

$$\begin{aligned} \frac{u_{R\theta}}{i} &= R_0 + \alpha R_0 \frac{u_{R\theta} i}{K_\tau}, \\ u_{R\theta} &= \frac{R_0 i}{1 - \frac{\alpha R_0}{K_\tau} i^2} = R_0 \sqrt{\frac{K_\tau}{\alpha R_0}} \left[ \frac{\sqrt{\frac{\alpha R_0}{K_\tau}} i}{1 - \left( \sqrt{\frac{\alpha R_0}{K_\tau}} i \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

由式(1)可以証明  $K_\tau > i^2 \alpha R_0$ , 即  $\sqrt{\frac{\alpha R_0}{K_\tau}} i < 1$ , 所以可将式(2)展开为  $\sqrt{\frac{\alpha R_0}{K_\tau}} i$  的幂级数, 有

$$u_{R_0} = R_0 \sqrt{\frac{K_\tau}{\alpha R_0}} \left[ \left( \sqrt{\frac{\alpha R_0}{K_\tau}} i \right) + \left( \sqrt{\frac{\alpha R_0}{K_\tau}} i \right)^3 + \dots \right]. \quad (3)$$

可見  $u_{R_0}$  較  $i$  的增长迅速得多, 这和灯泡的实际特性定性上是一致的. 至于定量方面, 由式(3)可見: 逼近实际特性的精确程度取决于  $\alpha$ ,  $K_\tau$ ,  $R_0$  的相互配置, 适当选择  $\alpha$ ,  $K_\tau$ ,  $R_0$  既便于进行研究, 又可較好地逼近实际特性.

2. 根据第一节的假設导出了方程(1.11)之后, 利用电阻元件为热慣性元件这种假設导出了方程(1.12). 应当說明: 就本質上說, 电阻值是随通过其中的电流瞬时值而变的, 只是由于电流为時間的周期函数时, 电阻元件的温升“時間常数”充分大才可略去温度及电阻值随电流瞬时值而改变的特点, 認为温度及电阻值仅为电流有效值的非綫性函数, 即将非綫性电阻元件視为具有热慣性的. 本文正是采用了电流有效值而不是瞬时值进行計算. 也可以不这样做而采用比較严格的分析方法, 比如用漸近法中的平均原則. 指出: 本文所得結果与用平均原則的一次近似所得結果完全一致.

3. 再說明曲綫  $Z = 0$  的形状. 由  $Z = 0$  可得

$$z - z_L = - \frac{d}{r^2(n + ar^2)^2 - c}$$

以及

$$\frac{dz}{dr^2} = - \frac{\frac{\partial Z}{\partial r^2}}{\frac{\partial Z}{\partial z}} = \frac{d(n^2 + 4ar^2 + 3a^2r^4)}{[r^2(n + ar^2)^2 - c]^2}.$$

注意到  $a, n, c, d > 0$ , 可見

$$\text{当 } r^2 = 0, \quad z - z_L = \frac{d}{c}, \quad \frac{dz}{dr^2} = \frac{dn^2}{c^2};$$

当  $r^2 = r_0^2$ , 此  $r_0^2$  滿足  $r^2(n + ar^2)^2 - c = 0^{(1)}$ , 則

$$z = \pm \infty, \quad \frac{dz}{dr^2} = \infty;$$

$$\text{当 } 0 \leq r^2 < r_0^2, \quad z_L + \frac{d}{c} \leq z < \infty,$$

$$\frac{dn^2}{c^2} \leq \frac{dz}{dr^2} < \infty;$$

$$\text{当 } r_0^2 < r^2, \quad -\infty < z < z_L,$$

$$\infty > \frac{dz}{dr^2} > 0;$$

則在  $(r^2, z)$  平面的第一二象限, 曲綫  $Z = 0$  的形状如图 15. 图中  $\alpha$  滿足

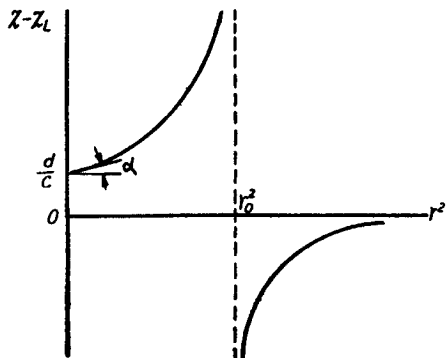


图 15

1) 因常数项为负, 至少有一正实根; 又因各项系数符号变化数为 1, 最多只有一正根; 因而存在唯一正根  $r_0^2$ .



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dn^2}{c^2}.$$

4. 正文中所利用的普遍牛頓公式是很粗略的近似公式, 可以作得更精確些, 方法之一是作圖。

用實驗先測得燈泡的伏安特性。由於在靜態情況有  $\phi(\theta, \theta_0) = u_{R\theta} i = I^2 R \theta$ , 據此可作出  $\phi \sim R\theta$  關係曲綫。由於在一般情況下式(1.12)應寫為

$$\lambda \frac{dz}{d\tau} = r^2 [n + ar^2]^2 [z - z_L] - \frac{2\phi}{E^2 \omega C_1},$$

不難作出  $\phi = \frac{2\phi}{E^2 \omega C_1}$  與  $z$  的關係曲綫。則上式成為

$$\lambda \frac{dz}{d\tau} = r^2 [n + ar^2]^2 [z - z_L] - \phi(z) = Z.$$

根據這個方程, 作曲綫  $Z = 0$  以及求奇點等問題可與正文中進行的討論一樣地進行。

### 參 考 文 獻

- [1] 夏承銓, 物理學報, 18(1962), 646; 或西安交大學報, 2(1962).
- [2] Андронов, А. А., Витт, А. А. и Хайкин, С. Э., Теория колебаний, Физматгиз (1959).
- [3] Бессонов, Л. А., Автоколебания в электрических цепях со сталью, ГЭИ (1958).
- [4] Касаткин, А. С., Медленные колебания в феррорезонансных цепях, электричество, 3 (1940).
- [5] Соломонович, А. Е., Автомодаляция при феррорезонансе, ЖТФ, вып 2 (1952).
- [6] Бессонов, Л. А., Электрические цепи со сталью, ГЭИ (1948).
- [7] Каудерер, Т., Нелинейная механика, ИИЛ, 1961.
- [8] Cunningham, W. J., Introduction to nonlinear analysis (1958).
- [9] Hayashi C., Forced oscillations in nonlinear systems, Nippon Printing and Publishing Company, Osaka, Japan (1953).
- [10] М. А. 巴比科夫, 電器學, 第一卷, 電力工業出版社, 1956.
- [11] W. S. 布沙特, А. W. 班登, 方程式論, 商務印書館.

## КВАЗИРЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЯХ

Гу Сяо-хун

(Чэндуский радиотехнический институт)

Резюме

В результате запаздывания времени изменения активного сопротивления цепи по отношению к изменению амплитуды тока, периодические скачки амплитуды тока или напряжения—квазирелаксационные колебания могут происходить в нелинейных последовательных цепях. В данной статье изучены вопросы о необходимых и достаточных условиях, вызывающих эти колебания, о поведении системы при изменении параметра и т. д.