

散射振幅的广义 Regge 表示*

殷鵬程 張春霖

(复旦大学物理系)

提 要

本文建立了 Regge 表示的一般形式

$$f(s, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l + \mu + \nu + 1)}{\sin \pi l} f^{(\mu, \nu)}(l, s) P_l^{(\nu, \mu)}(-z) dl - \sum_i \frac{\beta_i^{(\mu, \nu)}(s)}{\sin \pi \alpha_i^{(\mu, \nu)}(s)} P_{\alpha_i^{(\mu, \nu)}}^{(\nu, \mu)}(-z),$$

$$\operatorname{Re} \mu \geq -1/2, \quad \operatorname{Re} \nu \geq -1/2, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) \geq 0,$$

其中 $P_l^{(\mu, \nu)}(z)$ 为雅可比函数。我们比较详细地研究了它与普通 Regge 表示的关系。在附录中讨论了雅可比函数的若干性质。

一、引 言

Regge^[1] 把分波振幅对角动量作了解析延拓, 应用 W-S 变换于分波展开, 得到了所谓 Regge 表示

$$f(s, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l + 1)}{\sin \pi l} f(l, s) P_l(-z) dl - \sum_i \frac{\beta_i(s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} P_{\alpha_i(s)}(-z). \quad (1.1)$$

Khuri^[2] 首先指出, Regge 表示的形式是不唯一的, 他提出一种以幂函数作为 Regge 项的 Regge 表示。本文提出了 Regge 表示的一般形式

$$f(s, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l + \mu + \nu + 1)}{\sin \pi l} f^{(\mu, \nu)}(l, s) P_l^{(\nu, \mu)}(-z) dl - \sum_i \frac{\beta_i^{(\mu, \nu)}(s)}{\sin \pi \alpha_i^{(\mu, \nu)}(s)} P_{\alpha_i^{(\mu, \nu)}}^{(\nu, \mu)}(-z), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Re} \mu \geq -1/2, \quad \operatorname{Re} \nu \geq -1/2, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) \geq 0;$$

其中 $P_l^{(\mu, \nu)}(z)$ 为雅可比函数。本文的主要工作在于研究表示(1.2)式与(1.1)式的关系。

表示(1.2)式是 Regge 表示(1.1)式的直接推广。考虑到雅可比函数的相当一般性, 可知表示(1.2)式不仅包括了表示(1.1)式, 而且也概括了目前已有的大部分 Regge 表示的形式。由于 Regge 表示的形式是不唯一的, 所以在特定的场合选用特定的形式可能会带来某些方便。Regge 表示的一般形式(1.2)式, 为这种选取提供了可能性和灵活性, 因此表示(1.2)式具有一定的实际意义。本文研究表示(1.2)式的主要目的也就在于此。

二、基本定理

为了从表示(1.1)式过渡到表示(1.2)式, 并研究两者之间的关系, 本节首先叙述并证

* 1964 年 6 月 5 日收到, 1965 年 3 月 18 日收到修改稿。

明一个定理. 这个定理将本文的主要结果加以概括. 它可以看作是 Khuri 定理^[2]的推广, 其证明步骤也颇为相似, 但要复杂得多, 而且其方法——特别是解析延拓的方法——一般地也不一样.

为了叙述的方便, 不妨先研究势散射振幅. 在相对论情况下, 只要略为修改, 本节的结果仍然成立.

记散射振幅为 $f(s, z)$, 其中 s 为能量, $z = \cos \theta$, θ 为质心系散射角. 把 $f(s, z)$ 按 z 的雅可比多项式 $P_n^{(\mu, \nu)}(z)$ 展开:

$$f(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + \mu + \nu + 1) f_n^{(\mu, \nu)}(s) P_n^{(\mu, \nu)}(z), \quad (2.1)$$

此级数在通常的 Lehmann 椭圆内收敛. 利用正交性

$$\int_{-1}^1 (1-z)^\mu (1+z)^\nu P_n^{(\mu, \nu)}(z) P_m^{(\mu, \nu)}(z) dz = g^{(\mu, \nu)}(n) \delta_{m, n},$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1;$$

可得

$$f_n^{(\mu, \nu)}(s) = h^{(\mu, \nu)}(n) \int_{-1}^1 (1-z)^\mu (1+z)^\nu f(s, z) P_n^{(\mu, \nu)}(z) dz, \quad (2.2)$$

其中

$$h^{(\mu, \nu)}(n) = \frac{1}{(2n + \mu + \nu + 1) g^{(\mu, \nu)}(n)} = \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(n + \mu + \nu + 1)}{2^{\mu+\nu+1} \Gamma(n + \mu + 1) \Gamma(n + \nu + 1)}. \quad (2.3)$$

$f_n^{(\mu, \nu)}(s)$ 可称为雅可比振幅. 当 $\mu = \nu = 0$ 时, 雅可比振幅即退化为普通的分波振幅 $f_n^{(0,0)}(s)$. 我们将研究当 n 为复变数 l 时雅可比振幅 $f_n^{(\mu, \nu)}(s)$ 的解析延拓 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$. 本节的主要目的是建立各种雅可比振幅的解析延拓 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 在 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 平面上解析性之间相互联系的定理. 为了以后叙述方便, 称满足条件

$$\operatorname{Re} \mu \geq -1/2, \quad \operatorname{Re} \nu \geq -1/2, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) \geq 0 \quad (2.4)$$

的雅可比振幅 $f_n^{(\mu, \nu)}(s)$ 为正常雅可比振幅, 于是可以证明以下的定理:

[定理] 若任意的正常雅可比振幅 $f_n^{(\mu_0, \nu_0)}(s)$ 对于 n 存在唯一的解析延拓 $f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s)$, 且

(1) 对于 l 在 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 平面上半纯, 具有有限个单极点 $\alpha_i(s)$, $\operatorname{Re} \alpha_i(s) > -1/2$, $i = 1, 2, \dots, M$;

(2) 具有渐近行为

$$|f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s)| \leq \frac{C^{(\mu_0, \nu_0)}(s)}{\sqrt{|l|}} e^{-\operatorname{Re} l \cdot \xi_0}, \quad \xi_0 > 0, \quad |l| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} l > -1/2;$$

$$f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s) \rightarrow 0, \quad \text{当 } |\operatorname{Im} l| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} l > -1/2;$$

则任意其它的正常雅可比振幅 $f_n^{(\mu, \nu)}(s)$ 对于 n 必定也存在唯一的解析延拓 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$, 它

(1) 对于 l 在 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 平面上半纯, 具有单极点:

$$\text{i. } \alpha_i(s), \alpha_i(s) - 2, \alpha_i(s) - 4, \dots, \alpha_i(s) - 2m_i,$$

$$\sup_i \operatorname{Re} [\alpha_i(s) - 2m_i] > -1/2, \quad 2m_i \leq p + q,$$

当 p, q 都为正整数, 而且 h, k 同时为零时;

$$\text{ii. } \alpha_i(s), \alpha_i(s) - 1, \alpha_i(s) - 2, \dots, \alpha_i(s) - n_i,$$

$$\sup_i \operatorname{Re} [\alpha_i(s) - n_i] > -1/2, \quad n_i \leq p + q,$$

当 p, q 都为正整数, 而且 h, k 都不或者至少有一个不为零;

$$\text{iii. } \alpha_i(s), \alpha_i(s) - 1, \alpha_i(s) - 2, \dots, \alpha_i(s) - n_i,$$

$$\sup_s \operatorname{Re} [\alpha_i(s) - n_i] > -1/2,$$

当 p, q, h, k 处在所有其它情况下;

(2) 具有渐近行为

$$|f^{(\mu, \nu)}(l, s)| \leq \frac{C^{(\mu, \nu)}(s)}{\sqrt{|l|}} e^{-\operatorname{Re} l \xi_0}, \quad \xi_0 > 0, \quad |l| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} l > -1/2;$$

$$f^{(\mu, \nu)}(l, s) \rightarrow 0, \quad \text{当 } |\operatorname{Im} l| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} l > -1/2,$$

以上

$$\mu - \mu_0 = p, \quad \nu - \nu_0 = q, \quad \mu - \nu = h, \quad \mu_0 - \nu_0 = k,$$

$$i = 1, 2, \dots, M.$$

【证明】 利用雅可比多项式的性质

$$P_n^{(\mu, \nu)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\nu, \mu)}(x), \quad (2.5)$$

由给定的条件, 可把展式(2.1)改写为 W-S 积分

$$f(s, z) = \frac{1}{2i} \int_c \frac{(2l + \mu_0 + \nu_0 + 1)}{\sin \pi l} f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s) P_l^{(\nu_0, \mu_0)}(-z) dl, \quad (2.6)$$

其中 $P_l^{(\mu, \nu)}(z)$ 为附录 I 中所定义的雅可比函数. 由给定的条件并利用附录 I 中 (I.8) 式, 设 z 不在沿实轴的 $z > 1$ 的割线上, 则可将 (2.6) 式改写为

$$\begin{aligned} f(s, z) &= \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l + \mu_0 + \nu_0 + 1)}{\sin \pi l} f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s) P_l^{(\nu_0, \mu_0)}(-z) dl - \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \frac{\beta_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} P_{\alpha_i(s)}^{(\nu_0, \mu_0)}(-z), \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中

$$\beta_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s) = \pi [2\alpha_i(s) + \mu_0 + \nu_0 + 1] \lim_{l \rightarrow \alpha_i} [(l - \alpha_i) f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s)]. \quad (2.8)$$

根据雅可比函数的解析性质, 由 (2.7) 式知, 散射振幅满足固定能量的色散关系. 利用附录 I 中的 (I.3) 式, 可得其吸收部分

$$\begin{aligned} D(s, z) &= \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2l + \mu_0 + \nu_0 + 1) f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s) \left[P_l^{(\mu_0, \nu_0)}(z) + \frac{2}{\pi} \sin \pi \mu_0 Q_l^{(\mu_0, \nu_0)}(z) \right] dl + \\ &\quad + \sum_{i=1}^M \beta_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s) \left[P_{\alpha_i(s)}^{(\mu_0, \nu_0)}(z) + \frac{2}{\pi} \sin \pi \mu_0 Q_{\alpha_i(s)}^{(\mu_0, \nu_0)}(z) \right], \quad z > 1; \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 $Q_l^{(\mu, \nu)}(z)$ 为第二类雅可比函数.

利用^[4]

$$Q_n^{(\mu, \nu)}(z) = \frac{1}{2} (z-1)^{-\mu} (z+1)^{-\nu} \int_{-1}^1 (z-t)^{-1} (1-t)^{\mu} (1+t)^{\nu} P_n^{(\mu, \nu)}(t) dt, \quad (2.10)$$

$$\operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1,$$

可得

$$f_n^{(\mu, \nu)}(s) = \frac{2}{\pi} h^{(\mu, \nu)}(n) \int_{z_0}^{\infty} D(s, z) (z-1)^{\mu} (z+1)^{\nu} Q_n^{(\mu, \nu)}(z) dz, \quad (2.11)$$

其中 z_0 为固定能量色散关系中割线的起点, $z_0 > 1$. 设 N 为这种色散关系中削减的次数,

则 $n = l$ 时在 $\operatorname{Re} l > N$ 区域中的唯一解析延拓为

$$f^{(\mu, \nu)}(l, s) = \frac{2}{\pi} h^{(\mu, \nu)}(l) \int_{z_0}^{\infty} D(s, z) (z-1)^{\mu} (z+1)^{\nu} Q_l^{(\mu, \nu)}(z) dz, \quad \operatorname{Re} l > N. \quad (2.12)$$

显然, 在条件(2.4)下, $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 对于 l 在 $\operatorname{Re} l > N$ 平面上全纯.

由定义(2.12)式, 并利用附录 I 中的 (I.9) 式以及文献[3]中的

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right], \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

可得

$$f^{(\mu, \nu)}(l, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{z_0}^{\infty} D(s, z) \frac{e^{-\lambda\xi}}{\sqrt{\sinh \xi}} \left[\frac{1-e^{-\xi}}{2} \right]^{\mu} \left[\frac{1+e^{-\xi}}{2} \right]^{\nu} \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] dz, \\ |l| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} l > N, \quad \lambda = l + \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

此外, 由(2.9)式知

$$|D(s, z)| \leq C(s) z^N, \quad z > z_0 > 1,$$

于是我们可对(2.14)式作以下的估计

$$|f^{(\mu, \nu)}(l, s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi|\lambda|}} \int_{z_0}^{\infty} |D(s, z)| \cdot \frac{e^{-(\operatorname{Re} l + \frac{1}{2})\xi}}{\sqrt{\sinh \xi}} \times \\ \times \left| \left[\frac{1-e^{-\xi}}{2} \right]^{\mu} \left[\frac{1+e^{-\xi}}{2} \right]^{\nu} \right| \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] dz \leq \\ \leq \frac{C(s)}{\sqrt{2\pi|\lambda|}} \cdot \sup_{\xi \in [\xi_0, \infty]} \left| \left[\frac{1-e^{-\xi}}{2} \right]^{\mu} \left[\frac{1+e^{-\xi}}{2} \right]^{\nu} \right| \times \\ \times \int_{z_0}^{\infty} z^N \frac{e^{-(\operatorname{Re} l + \frac{1}{2})\xi}}{\sqrt{\sinh \xi}} \left[1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right] dz \leq \\ \leq \frac{C^{(\mu, \nu)}(s)}{\sqrt{|l|}} e^{-\operatorname{Re} l \cdot \xi_0}, \quad \xi_0 = \cosh^{-1} z_0 > 0, \quad |l| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} l > N. \quad (2.15)$$

由此可见, 不同的正常雅可比振幅的解析延拓 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 对于 l 在 l 的右半平面上具有相同的渐近行为, 最多相差一个与 l 无关的因子.

为了将(2.12)式所定义的 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 唯一地解析延拓到 $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} l < N$ 的区域中去, 可以把附录 I 中的 (I.5) 式代入(2.9)式得

$$D(s, z) = T^{(\mu_0, \nu_0)}(s, z) + \sum_{i=1}^M 2^{-\alpha_i} B_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s) \times \\ \times (z+1)^{\alpha_i} F \left[-\alpha_i, -\alpha_i - \nu_0, -2\alpha_i - \mu_0 - \nu_0, \frac{2}{z+1} \right], \quad (2.16)$$

其中

$$T^{(\mu_0, \nu_0)}(s, z) = \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2l + \mu_0 + \nu_0 + 1) f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s) \left[P_l^{(\mu_0, \nu_0)}(z) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sin \pi \mu_0 Q_l^{(\mu_0, \nu_0)}(z) \right] dl - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^M \beta_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s) \times \\ \times \left\{ \frac{\sin \pi \alpha_i \cdot \sin [\pi(\alpha_i + \nu_0)]}{\sin [\pi(2\alpha_i + \mu_0 + \nu_0 + 1)]} - \sin \pi \mu_0 \right\} Q_{\alpha_i}^{(\mu_0, \nu_0)}(z), \quad (2.17)$$

$$B_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s) = \frac{\Gamma(2\alpha_i + \mu_0 + \nu_0 + 1)}{\Gamma(\alpha_i + 1)\Gamma(\alpha_i + \mu_0 + \nu_0 + 1)} \beta_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s).$$

显然

$$T^{(\mu_0, \nu_0)}(s, z) = O(z^{-\frac{1}{2}}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re}(\mu_0 + \nu_0) \geq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha_i > -1/2. \quad (2.18)$$

将(2.16)式代入(2.12)式得

$$f^{(\mu, \nu)}(l, s) = f_0^{(\mu, \nu)}(l, s) + \sum_{i=1}^M B_i^{(\mu_0, \nu_0)}(s) f_i^{(\mu, \nu)}(l, s), \quad \operatorname{Re} l > N; \quad (2.19)$$

其中

$$f_0^{(\mu, \nu)}(l, s) = \frac{2}{\pi} h^{(\mu, \nu)}(l) \int_{z_0}^{\infty} T^{(\mu_0, \nu_0)}(s, z) (z-1)^{\mu} (z+1)^{\nu} Q_l^{(\mu, \nu)}(z) dz, \quad (2.20)$$

$$f_i^{(\mu, \nu)}(l, s) = \frac{2^{1-\alpha_i}}{\pi} h^{(\mu, \nu)}(l) \int_{z_0}^{\infty} (z-1)^{\mu} (z+1)^{\nu+\alpha_i} Q_l^{(\mu, \nu)}(z) \times \\ \times F \left[-\alpha_i, -\alpha_i - \nu_0, -2\alpha_i - \mu_0 - \nu_0, \frac{2}{z+1} \right] dz, \quad \operatorname{Re} l > N. \quad (2.21)$$

注意到(2.4)式可知, $f_0^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 对于 l 在 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 平面上全纯, 而且当 $|\operatorname{Im} l| \rightarrow \infty$ 时, $f_0^{(\mu, \nu)}(l, s) \rightarrow 0$. 所以, 只要设法将 $f_i^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 解析延拓到 $-1/2 < \operatorname{Re} l < N$ 的区域中即可. 为此, 将 $Q_l^{(\mu, \nu)}(z)$ 的超几何函数表示代入(2.21)式并引进积分变量代换

$$x = \frac{2}{z+1}, \quad x_0 = \frac{2}{z_0+1} < 1, \quad (2.22)$$

又可将 $f_i^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 改写为

$$f_i^{(\mu, \nu)}(l, s) = \int_0^{x_0} x^{l-\alpha_i-1} G_i(l, x) dx, \quad \operatorname{Re} l > N, \quad (2.23)$$

其中

$$G_i(l, x) = \frac{1}{\pi} B[l+1, l+\mu+\nu+1] \cdot F[-\alpha_i, -\alpha_i - \nu_0, -2\alpha_i - \mu_0 - \nu_0, x] \times \\ \times F[l+1, l+\nu+1, 2l+\mu+\nu+2, x]. \quad (2.24)$$

对(2.23)式分部积分 n_i 次

$$f_i^{(\mu, \nu)}(l, s) = \frac{x_0^{l-\alpha_i}}{l-\alpha_i} G_i(l, x_0) - \frac{x_0^{l-\alpha_i+1}}{(l-\alpha_i)(l-\alpha_i+1)} \left[\frac{\partial}{\partial x} G_i(l, x) \right]_{x_0} + \\ + \cdots + (-1)^m \frac{x_0^{l-\alpha_i+m}}{(l-\alpha_i)(l-\alpha_i+1) \cdots (l-\alpha_i+m)} \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} G_i(l, x) \right]_{x_0} + \\ + \cdots + (-1)^{n_i} \frac{x_0^{l-\alpha_i+n_i}}{(l-\alpha_i)(l-\alpha_i+1) \cdots (l-\alpha_i+m) \cdots (l-\alpha_i+n_i)} \times \\ \times \left[\frac{\partial^{n_i}}{\partial x^{n_i}} G_i(l, x) \right]_{x_0} + \frac{(-1)^{n_i+1}}{(l-\alpha_i)(l-\alpha_i+1) \cdots (l-\alpha_i+m) \cdots (l-\alpha_i+n_i)} \times \\ \times \int_0^{x_0} x^{l-\alpha_i+n_i} \left[\frac{\partial^{(n_i+1)}}{\partial x^{(n_i+1)}} G_i(l, x) \right] dx, \quad (2.25)$$

其中 n_i 满足条件

$$\sup_s \operatorname{Re} [\alpha_i(s) - n_i] > -1/2. \quad (2.26)$$

显然, 由定义(2.24)式, 并注意(2.4)式可知, $\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} G_i(l, x) \right]$ 对于 l 在 $\operatorname{Re} l > -1/2$

平面上全纯. 所以在(2.26)式的条件下, (2.25)式中最后一项的积分已在 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 区域中全纯. 于是我们可以利用(2.19), (2.20)和(2.25)式将 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 一直解析延拓到 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 的平面上去. 可以看到, 这时 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 将有一串单极点

$$\alpha_i, \alpha_i - 1, \dots, \alpha_i - n_i, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad (2.27)$$

其中 n_i 由(2.26)式所决定.

其次, 由定义(2.24)式和文献[3]的77页(16)式不难证明

$$x^l \left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} G_i(l, x) \right] \sim \frac{l^m}{\sqrt{l}} e^{-l\xi}, \quad |l| \rightarrow \infty, \quad |\arg l| < \pi, \\ \xi = \cosh^{-1} z > 0, \quad z = \frac{2-x}{x}, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.28)$$

所以(2.25)式中的每一项对于 l 都具有所需要的渐近行为. 例如当 $|\operatorname{Im} l| \rightarrow \infty$ 时, (2.25)式中的每一项都趋向于零, 等等.

迄今为止, 我们已经证明了, 若 $f^{(\mu_0, \nu_0)}(l, s)$ 具有极点 α_i , 则一般地说, $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 将具有一串极点, 由(2.27)式所表示. 但在特殊情况下, 亦即当 p, q 为正整数时, 由(2.27)式所表示的极点从 $\alpha_i - 1$ 开始以后其留数可能恒为零, 也就是说, 这时它们并非真正的极点. 这可证明如下:

由附录 II 知, 当 p, q 为正整数时

$$f_n^{(\mu, \nu)}(s) = \sum_{j=0}^{p+q} \frac{h^{(\mu, \nu)}(n)}{h^{(\mu_0, \nu_0)}(n+j)} C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) f_{n+j}^{(\mu_0, \nu_0)}(s), \quad (2.29)$$

其中系数 $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n)$ 具有性质

- i、 $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) = (-1)^j C_j(\nu, \mu, \nu_0, \mu_0, n)$;
- ii、 $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l) \rightarrow \text{常数}, \quad |l| \rightarrow \infty$;
- iii、 $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l)$ 对于 l 在 $\operatorname{Re} l > -1/2$ 平面上全纯.

引入函数 $\varphi(l)$, 定义为

$$\varphi(l) = f^{(\mu, \nu)}(l, s) - \sum_{j=0}^{p+q} \frac{h^{(\mu, \nu)}(l)}{h^{(\mu_0, \nu_0)}(l+j)} C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l) f^{(\mu_0, \nu_0)}(l+j, s), \quad \operatorname{Re} l > -1/2, \quad (2.30)$$

其中 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 是由(2.19), (2.20)和(2.25)式所定义的 $f_n^{(\mu, \nu)}(s)$ 的解析延拓. 显然

$$\varphi(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

注意 $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l)$ 的性质 ii, 以及

$$\lim_{|l| \rightarrow \infty} \frac{h^{(\mu, \nu)}(l)}{h^{(\mu_0, \nu_0)}(l+j)} = 2^{-(p+q)} = \text{常数},$$

由定理所给定的条件和已经证明了的 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 对于 l 的渐近行为, 应用 Carlson 定理于函数 $\varphi(l)$, 立即推出

$$\varphi(l) \equiv 0,$$

亦即

$$f^{(\mu, \nu)}(l, s) = \sum_{j=0}^{p+q} \frac{h^{(\mu, \nu)}(l)}{h^{(\mu_0, \nu_0)}(l+j)} C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l) f^{(\mu_0, \nu_0)}(l+j, s), \quad \operatorname{Re} l > -1/2. \quad (2.31)$$

注意, 当 $\mu = \nu, \mu_0 = \nu_0$ 时, 上式只需对偶数 j 求和. 由此, 并注意(2.3), (2.4)式和 C_j 的

性质 iii, 不难推出所需要的结论.

综上所述结果, 又可将散射振幅另外表为

$$f(s, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l + \mu + \nu + 1)}{\sin \pi l} f^{(\mu, \nu)}(l, s) P_l^{(\nu, \mu)}(-z) dl - \sum_i \frac{\beta_i^{(\mu, \nu)}(s)}{\sin \pi \alpha_i^{(\mu, \nu)}(s)} P_{\alpha_i^{(\mu, \nu)}}^{(\nu, \mu)}(-z). \quad (2.32)$$

比较(2.7)和(2.32)两式在 $|z| \rightarrow \infty$ 时的渐近行为, 可以论证, 由(2.12)式所定义的 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 在 $-1/2 < \text{Re } l < N$ 区域中的解析延拓是唯一的. 因而我们所得到的 $f_n^{(\mu, \nu)}(s)$ 在 $\text{Re } l > -1/2$ 平面上的解析延拓 $f^{(\mu, \nu)}(l, s)$ 确实是唯一的.

定理证毕.

三、广义 Regge 表示

由上节所证明了的定理知, 只要有一个正常雅可比振幅具有定理的假设中所要求的那些性质, 就可推出所有其它的正常雅可比振幅也具有类似的性质. 显然, 分波振幅是一个正常雅可比振幅, 而且在特殊情况下^[1], 具有定理的假设中所要求的性质. 这时, 可以推知, 所有其它正常雅可比振幅必具有类似的性质. 这就说明了, 若散射振幅满足普通的 Regge 表示(1.1)式, 则一般地也满足(1.2)式, 即满足

$$f(s, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l + \mu + \nu + 1)}{\sin \pi l} f^{(\mu, \nu)}(l, s) P_l^{(\nu, \mu)}(-z) dl - \sum_i \frac{\beta_i^{(\mu, \nu)}(s)}{\sin \pi \alpha_i^{(\mu, \nu)}(s)} P_{\alpha_i^{(\mu, \nu)}}^{(\nu, \mu)}(-z),$$

$$\text{Re } \mu \geq -1/2, \quad \text{Re } \nu \geq -1/2, \quad \text{Re } (\mu + \nu) \geq 0.$$

当 $\mu = \nu = 0$ 时, $\alpha^{(\mu, \nu)}(s)$ 便退化为普通的 Regge 极点 $\alpha(s) = \alpha^{(0,0)}(s)$, 而表示(1.2)式则退化为普通的 Regge 表示(1.1)式. 因此我们称(1.2)式为广义的 Regge 表示. 在一般的情况下, $\alpha^{(\mu, \nu)}(s)$ 与 $\alpha^{(0,0)}(s)$ 的关系已为上节所建立的定理所阐明. $\beta^{(\mu, \nu)}(s)$ 与 $\beta^{(0,0)}(s)$ 的关系一般地可由(2.19), (2.24), (2.25)式求出.

广义 Regge 表示(1.2)式具有相当的一般性. 当 $\mu = \nu = 0$ 时即退化为普通的 Regge 表示, 如上所述; 当 $\mu = \nu = 1/2$ 时, 退化为由第二类契比雪夫函数作为 Regge 项的 Regge 表示; 当 $\mu = \nu = \sigma$ 时, 退化为由盖根鲍尔函数作为 Regge 项的 Regge 表示; 固定 ν , 令 $|\mu| \rightarrow \infty$, 可以得到 Khuri 的幂函数 Regge 表示^[2], 等等.

除了它的一般性以外, 表示(1.2)式在处理左半平面的极点时较普通的 Regge 表示为方便. 事实上, 当 Regge 极点进入左半平面 ($\text{Re } \alpha < -1/2$) 时, 我们只要选取充分大的 $\text{Re } (\mu + \nu)$, 就可使 Regge 项在 $|z| \rightarrow \infty$ 时仍然保持 z^α 的方式趋向于零.

从物理的角度来考虑, 分波展开及其 Regge 表示具有最直接的物理意义; 然而从数学的观点来看, 在一般情况下, 勒让德函数展开未必是最方便的. 例如在文献[4]的情况下, 第二类契比雪夫函数展开较之分波展开更为方便. 本文一方面在 Khuri^[2] 的基础上进一步说明了对 Regge 极点的研究不必局限在角动量平面上, 另一方面也说明了对 Regge 表示的应用也不必局限于它原来的形式. 当然, 关于这方面的具体应用, 还有待于进一步的探索.

最后, 作者对叶芄生同志的讨论表示感谢.

附 录 I

本附录讨论正文中所需要的雅可比函数的若干性质.

我们分别定义第一、第二类雅可比函数为

$$P_l^{(\mu, \nu)}(z) = \frac{\Gamma(l + \mu + 1)}{\Gamma(l + 1)\Gamma(\mu + 1)} F \left[-l, l + \mu + \nu + 1, \mu + 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \right]; \quad (\text{I. 1})$$

$$Q_l^{(\mu, \nu)}(z) = \frac{2^{l+\mu+\nu} B[l + \mu + 1, l + \nu + 1]}{(z - 1)^{l+\mu+1}(z + 1)^\nu} F[l + 1, l + \mu + 1, 2l + \mu + \nu + 2, 2(1 - z)^{-1}], \quad (\text{I. 2})$$

以上 μ, ν, l 和 z 都为复变量.

从定义出发, 利用超几何函数的一般理论^[3], 容易得出所需要的雅可比函数的性质.

首先, 它们之间有以下关系:

$$P_l^{(\nu, \mu)}(-z) = e^{\mp i\pi l} P_l^{(\mu, \nu)}(z) - \frac{2}{\pi} \sin \pi l e^{\pm i\pi \mu} Q_l^{(\mu, \nu)}(z), \quad (\text{I. 3})$$

$$Q_l^{(\nu, \mu)}(-z) = -e^{\pm i\pi(l+\mu+\nu)} Q_l^{(\mu, \nu)}(z), \quad (\text{I. 4})$$

$$P_l^{(\mu, \nu)}(z) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \pi l \cdot \sin[\pi(l + \nu)]}{\sin[\pi(2l + \mu + \nu)]} \left[Q_l^{(\mu, \nu)}(z) - \frac{B[-l, l + \nu + 1]}{B[-l - \mu, l + \mu + \nu + 1]} Q_{-l-\mu-\nu-1}^{(\mu, \nu)}(z) \right], \quad (\text{I. 5})$$

以上上面(下面)的符号对应于 $\text{Im } z > 0$ ($\text{Im } z < 0$).

其次, 在 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 具有以下的渐近式:

$$P_l^{(\mu, \nu)}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{2^{-l} \Gamma(2l + \mu + \nu + 1)}{\Gamma(l + 1) \Gamma(l + \mu + \nu + 1)} \cdot z^l, & \text{Re } l > -\frac{1}{2} \text{Re}(\mu + \nu + 1), \\ -\pi^{-1} 2^{l+\mu+\nu+1} \sin \pi l \cdot B[l + \mu + 1, -2l - \mu - \nu - 1] \cdot z^{-l-\mu-\nu-1}, & \text{Re } l < -\frac{1}{2} \text{Re}(\mu + \nu + 1); \end{cases} \quad (\text{I. 6})$$

$$Q_l^{(\mu, \nu)}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 2^{l+\mu+\nu} B[l + \mu + 1, l + \nu + 1] \cdot z^{-l-\mu-\nu-1}. \quad (\text{I. 7})$$

第三, 对于 l 具有以下的渐近展开:

$$P_{\lambda-1/2}^{(\mu, \nu)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda \sinh \xi}} \left[\frac{1 - e^{-\xi}}{2} \right]^{-\mu} \cdot \left[\frac{1 + e^{-\xi}}{2} \right]^{-\nu} \times \\ \times [e^{\lambda\xi} + i e^{i\pi\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu+\nu)\xi}] \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], \\ |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \xi = \cosh^{-1} z, \quad \text{Im } z \gtrsim 0, \\ -\pi/2 + \delta < \arg \lambda < \pi/2 + \text{tg}^{-1}(\pi/\xi) - \delta, \quad \delta > 0; \quad (\text{I. 8})$$

$$Q_{\lambda-1/2}^{(\mu, \nu)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda \sinh \xi}} (z - 1)^{-\mu} \cdot (z + 1)^{-\nu} \cdot (1 - e^{-\xi})^\mu \times \\ \times (1 + e^{-\xi})^\nu \cdot e^{-\lambda\xi} \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], \\ |\lambda| \rightarrow \infty, \quad |\arg \lambda| \leq \pi - \delta, \quad \delta > 0, \quad \xi = \cosh^{-1} z, \quad \text{Im } z \gtrsim 0. \quad (\text{I. 9})$$

最后,正文中曾用到以下的特殊情况:

$$\begin{aligned} P_l^{(0,0)}(z) &= P_l(z), \\ P_l^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(l+3/2)}{\Gamma(l+2)} U_l(z), \\ P_l^{(\sigma,\sigma)}(z) &= \frac{4^\sigma}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\sigma+1/2)\Gamma(l+\sigma+1)}{\Gamma(l+2\sigma+1)} C_l^{\sigma+\frac{1}{2}}(z), \\ \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} [\mu^{-l} P_l^{(\mu,\nu)}(z)] &= \frac{1}{\Gamma(l+1)} \left(\frac{z+1}{2} \right)^l, \quad \operatorname{Re} l > -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\nu+1), \end{aligned}$$

以上 $U_l(z)$ 为第二类契比雪夫函数, $C_\nu^l(z)$ 为盖根鲍尔函数.

附 录 II

本附录证明(2.29)式,并研究系数 $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n)$ 的某些性质.

当 p, q 都为正整数时,可将雅可比多项式 $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 表为

$$P_n^{(\mu,\nu)}(x) = (1-x)^{-p}(1+x)^{-q} \sum_{j=0}^{p+q} C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) P_{n+j}^{(\mu_0,\nu_0)}(x), \quad (\text{II. 1})$$

$$\mu - \mu_0 = p \geq 0, \quad \nu - \nu_0 = q \geq 0.$$

利用(2.5)式知

$$C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) = (-1)^j C_j(\nu, \mu, \nu_0, \mu_0, n), \quad (\text{II. 2})$$

所以

$$C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) = 0, \quad \text{当 } \mu = \nu, \mu_0 = \nu_0, j \text{ 为奇数.} \quad (\text{II. 3})$$

利用公式^[4]

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \nu + 1 \right) (1-x) P_n^{(\mu+1,\nu)}(x) &= (n+\mu+1) P_n^{(\mu,\nu)}(x) - (n+1) P_{n+1}^{(\mu,\nu)}(x), \\ \left(n + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \nu + 1 \right) (1+x) P_n^{(\mu,\nu+1)}(x) &= (n+\nu+1) P_n^{(\mu,\nu)}(x) + (n+1) P_{n+1}^{(\mu,\nu)}(x), \end{aligned}$$

可以证明

$$\left. \begin{aligned} C_0(\mu+1, \nu, \mu_0, \nu_0, n) &= \left(\frac{n+\mu+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_0(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n), \\ C_j(\mu+1, \nu, \mu_0, \nu_0, n) &= \left(\frac{n+\mu+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) - \\ &\quad - \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_{j-1}(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n+1), \\ 1 \leq p+q, \quad 1 \leq j \leq p+q, \\ C_{p+q+1}(\mu+1, \nu, \mu_0, \nu_0, n) &= - \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_{p+q}(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n+1); \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 4})$$

以及

$$\left. \begin{aligned}
 C_0(\mu, \nu+1, \mu_0, \nu_0, n) &= \left(\frac{n+\nu+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_0(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n), \\
 C_j(\mu, \nu+1, \mu_0, \nu_0, n) &= \left(\frac{n+\nu+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) + \\
 &\quad + \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_{j-1}(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n+1), \\
 &\quad 1 \leq p+q, \quad 1 \leq j \leq p+q, \\
 C_{p+q+1}(\mu, \nu+1, \mu_0, \nu_0, n) &= \left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1} \right) C_{p+q}(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n+1).
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 5})$$

显然

$$C_0(\mu_0, \nu_0, \mu_0, \nu_0, m) = 1, \quad \text{当 } m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots,$$

由此不难证明

$$C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l) \rightarrow \text{常数}, \quad |l| \rightarrow \infty.$$

此外, 由给定的条件 $\text{Re}(\mu_0 + \nu_0) \geq 0$ 易知, $C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, l)$ 对于 l 在 $\text{Re } l > -1/2$ 平面全纯.

把 (II. 1) 代入 (2.2) 式知

$$f_n^{(\mu, \nu)}(s) = \sum_{j=0}^{p+q} \frac{h^{(\mu, \nu)}(n)}{h^{(\mu_0, \nu_0)}(n+j)} C_j(\mu, \nu, \mu_0, \nu_0, n) f_{n+j}^{(\mu_0, \nu_0)}(s). \quad (\text{II. 6})$$

特别地, 当 $\mu_0 = \nu_0 = 0$ 时, 上式简化为

$$\begin{aligned}
 f_n^{(\mu, \nu)}(s) &= 2h^{(\mu, \nu)}(n) \sum_{j=0}^{\mu+\nu} C_j(\mu, \nu, n) f_{n+j}^{(0,0)}(s), \\
 C_j(\mu, \nu, n) &= C_j(\mu, \nu, 0, 0, n).
 \end{aligned} \quad (\text{II. 7})$$

(II. 7) 式表明, 当 μ, ν 为正整数时, 雅可比振幅为有限个分波振幅的带权迭加.

参 考 文 献

- [1] Regge, T., *Nuovo Cimento*, **14** (1959), 951.
- [2] Khuri, N. N., *Phys. Rev.*, **132** (1963), 914.
- [3] Bateman, H., *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1 (McGraw-Hill Book Company, inc., New York, 1953), 47; 77.
- [4] Bateman, H., *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2 (McGraw-Hill Book Company, inc., New York, 1953), 171; 173.
- [5] Baker, M., et al., *Phys. Rev.*, **132** (1963), 2291.

THE GENERALIZED REGGE REPRESENTATION OF THE SCATTERING AMPLITUDE

YIN PONG-CHENG CHANG CHUN-TING

(*Department of Physics, Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, the general form of the Regge representation of the scattering amplitude has been established as

$$f(s, z) = \frac{i}{2} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{(2l+\mu+\nu+1)}{\sin \pi l} f^{(\mu,\nu)}(l, s) P_l^{(\nu,\mu)}(-z) dl -$$

$$- \sum_i \frac{\beta_i^{(\mu,\nu)}(s)}{\sin \pi \alpha_i^{(\mu,\nu)}(s)} P_{\alpha_i^{(\mu,\nu)}}^{(\nu,\mu)}(-z),$$

$$\operatorname{Re} \mu \geq -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} \nu \geq -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) \geq 0,$$

where $P_l^{(\mu,\nu)}(z)$ is the Jacobi function. The relationship between such a representation and the usual Regge representation has been studied in detail. Some properties of the Jacobi functions are discussed in the appendix.