第21卷 第1期 物理学报 Vol. 21, No. 1
1965年1月 ACTA PHYSICA SINICA January, 1965

SU_3 羣不可約表示直乘的分解*

孙洪洲 韓其智
(北京大学物理系)

提要

本文利用 SU_3 羣无穷小算子的对易关系,求出了 SU_3 羣的所有不可約 U 表示,并导出了 SU_3 羣的約化系数滿足的方程.

作为例子,我們計算了 SU_3 羣的 $(01)\times(10)$, $(11)\times(10)$, $(11)\times(11)$, $(30)\times(11)$ 的約化系数.

引言

基本粒子強相互作用么正对称理論的提出及某些成功[1-3],使人們对 SU_3 羣的不可約表示、不可約表示直乘的分解感到兴趣. 現有对 SU_3 羣的研究都涉及較多的对称羣知識,并且运算相当繁复[4-6]. 本文从 SU_3 羣的无穷小算子出发,仅运用角动量耦合及不可約张量的概念,就得到 SU_3 羣不可約表示及其直乘的分解,給出求約化系数(reduction coefficients)較簡单的方法.(SU_3 羣的約化系数与轉动羣的矢量耦合系数类似.)

一、SU_3 羣的不可約 U 表示

选 SU_3 羣的八个无穷小算子 Q_0, ν_0, $\nu_{\pm1}$, $T_{\pm\frac{1}{2}}$, $V_{\pm\frac{1}{2}}$ 滿足对易关系:

$$\left.\begin{aligned}&[Q_0, \nu_0] = 0,\\&[Q_0, \nu_{\pm1}] = 0,\\&[\nu_0, \nu_{\pm1}] = \pm\nu_{\pm1},\\&[\nu_1, \nu_{-1}] = -\nu_0.\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&[Q_0, T_q] = 3T_q,\\&[\nu_0, T_q] = qT_q,\\&[\nu_{\pm1}, T_q] = \mp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right]^{\frac{1}{2}} T_{q\pm1}.\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned}&[Q_0, V_q] = -3V_q,\\&[\nu_0, V_q] = qV_q,\\&[\nu_{\pm1}, V_q] = \mp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mp q\right)\left(\frac{1}{2}\pm q+1\right)\right]^{\frac{1}{2}} V_{q\pm1}.\end{aligned}\right\} \tag{1.2'}$$

* 1963年12月15日收到.

$$\left.\begin{aligned}[T_{\frac{1}{2}}V_{-\frac{1}{2}}] &= -\frac{1}{4}(Q_0+2v_0),\\ [T_{-\frac{1}{2}}V_{\frac{1}{2}}] &= \frac{1}{4}(Q_0-2v_0).\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned}[T_{\frac{1}{2}}V_{\frac{1}{2}}] &= -\sqrt{\frac{1}{2}}\,v_1,\\ [T_{-\frac{1}{2}}V_{-\frac{1}{2}}] &= -\sqrt{\frac{1}{2}}\,v_{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{1.3'}$$

$$\left.\begin{aligned}[T_{\frac{1}{2}}T_{-\frac{1}{2}}] &= 0,\\ [V_{\frac{1}{2}}V_{-\frac{1}{2}}] &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.3''}$$

其中

$$T^{+}_{-q} = (-1)^{q-\frac{1}{2}}V_q. \tag{1.4}$$

它們的三維表示为

$$Q_0=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=-\sqrt{3}\,\lambda_8,\quad v_0=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\lambda_3,$$

$$v_1=\frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1+i\lambda_2),$$

$$v_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1-i\lambda_2),$$

$$T_{\frac{1}{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}(\lambda_6-i\lambda_7),$$

$$T_{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_4-i\lambda_5),$$

$$V_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_4+i\lambda_5),$$

$$V_{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_6+i\lambda_7),$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_8$ 为蓋尔曼[1]所引入的八个无穷小算子.

由(1.1)知,算符 Q_0, $v^2=-v_1v_{-1}-v_{-1}v_1+v_0v_0$, v_0 是可对易的. 又知 v_1, v_{-1}, v_0 满足的对易关系与角动量 J_1, J_{-1}, J_0 满足的对易关系相同，故 Q_0, v^2, v_0 的共同本征函数

$|\epsilon\Lambda K\rangle$满足

$$\left.\begin{aligned}Q_0|\epsilon\Lambda K\rangle &= \epsilon|\epsilon\Lambda K\rangle,\\ \nu^2|\epsilon\Lambda K\rangle &= \Lambda(\Lambda+1)|\epsilon\Lambda K\rangle,\\ \nu_0|\epsilon\Lambda K\rangle &= K|\epsilon\Lambda K\rangle,\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

其中Λ可取任何非負整数或半整数，而K取

$$K=\Lambda,\Lambda-1,\cdots,-\Lambda.$$

在么正对称理論中，Λ和K就是同位旋和其第三分量量子数，而ϵ則与奇异量子数或超电荷相联系．在板田模型中，$S=\frac{-1}{3}(\epsilon+N)$，在盖尔曼模型中，$Y=-\frac{1}{3}\epsilon$．規定$|\epsilon\Lambda K\rangle$間的相因子，使

$$\langle\epsilon\Lambda K'|\nu_{\pm1}|\epsilon\Lambda K\rangle=\mp\left[\frac{1}{2}(\Lambda\mp K)(\Lambda\pm K+1)\right]^{\frac{1}{2}}\delta(K',K\pm1). \tag{1.6}$$

設U是SU_3羣的一个表示，可以取其表示空間R的基矢为$|\epsilon\Lambda K\rangle$，对应$Q_0,\nu_0,\nu_{\pm1}$的矩陣已由(1.5)，(1.6)給出．从(1.2)，(1.2′)知，算符T_q及V_q和$\nu_{\pm1},\nu_0$間的对易关系与$\frac{1}{2}$阶不可約张量和角动量所满足的对易关系相同，故有

$$\left.\begin{aligned}\langle\epsilon'\Lambda'K'|T_q|\epsilon\Lambda K\rangle &= \delta(\epsilon'\epsilon+3)\frac{\langle\epsilon+3\ \Lambda'\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle}{\sqrt{2\Lambda'+1}}\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}q\middle|\Lambda'K'\right\rangle,\\ \langle\epsilon'\Lambda'K'|V_q|\epsilon\Lambda K\rangle &= \delta(\epsilon'\epsilon-3)\frac{\langle\epsilon-3\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle}{\sqrt{2\Lambda'+1}}\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}q\middle|\Lambda'K'\right\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

$\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}q\middle|\Lambda'K'\right\rangle$为 C. G. 系数，$\langle\epsilon+3\ \Lambda'\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle$，$\langle\epsilon-3\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle$为約化矩陣元，由(1.4)可得

$$\langle\epsilon+3\ \Lambda'\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle=(-1)^{\frac{1}{2}+\Lambda'-\Lambda}\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon+3\ \Lambda'\rangle. \tag{1.7′}$$

若$\langle\quad\|T\|\quad\rangle$已知，則对应$V_q,T_q$的矩陣已知，就得到$SU_3$羣的一个表示．

設$|\epsilon_{\max}\Lambda_0 K\rangle$是表示空間$R$的一个子空間中$\epsilon$最大的基矢，則容易看出子空間

$$\left.\begin{aligned}&|\epsilon_{\max}\Lambda_0 K\rangle,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &|\epsilon-3\ \Lambda'K'\rangle=(-1)^{\frac{1}{2}+\Lambda-\Lambda'}C(\epsilon\Lambda\Lambda')\sum_{Kq}\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}q|\Lambda'K'\right\rangle V_q|\epsilon\Lambda K\rangle,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

$[(-1)^{\frac{1}{2}+\Lambda-\Lambda'}C(\epsilon\Lambda\Lambda')$是归一化常数，取$C(\epsilon\Lambda\Lambda')$为正实数]，对应唯一的一組$\epsilon_{\max}$，$\Lambda_0$构成一个$R$的不可約不变子空間$R_0$，由系数$\left\langle\Lambda K\frac{1}{2}q\middle|\Lambda'K'\right\rangle$的性质与(1.3″)可以看出，$R_0$的基矢$|\epsilon\Lambda K\rangle$是不簡并的(即$Q_0,\nu^2,\nu_0$构成完全对易集合)．$R_0$中的基矢是正交的，故它給出$SU_3$羣的一个不可約$U$表示．因此一定的$\epsilon_{\max}$，$\Lambda_0$对应一定的$SU_3$羣的不可約$U$表示．对应不等价不可約$U$表示的基正交．

設$|\epsilon\Lambda K\rangle$是$SU_3$羣的某个不可約$U$表示的一組基矢，它們之間的相因子由(1.8)决定．由(1.8)可得

$$\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon-3\ \Lambda'\rangle=\sqrt{2\Lambda'+1}\ C^{-1}(\epsilon\Lambda\Lambda')=\text{正实数}. \tag{1.9}$$

由(1.3)可得[1)]

$$\left.\begin{aligned}
\left|\left\langle \epsilon\ \Lambda \| T \| \epsilon-3\ \Lambda+\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 &= (\Lambda+1)\left(\frac{\epsilon}{2}-\Lambda\right)+\\
&+\frac{1}{2\Lambda+1}\left|\left\langle \epsilon+3\ \Lambda+\frac{1}{2}\| T \| \epsilon\ \Lambda\right\rangle\right|^2+\\
&+\frac{2\Lambda+2}{2\Lambda+1}\left|\left\langle \epsilon+3\ \Lambda-\frac{1}{2}\| T \| \epsilon\ \Lambda\right\rangle\right|^2,\\
\left|\left\langle \epsilon\ \Lambda \| T \| \epsilon-3\ \Lambda-\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 &= \Lambda\left(\frac{\epsilon}{2}+\Lambda+1\right)+\\
&+\frac{2\Lambda}{2\Lambda+1}\left|\left\langle \epsilon+3\ \Lambda+\frac{1}{2}\| T \| \epsilon\ \Lambda\right\rangle\right|^2-\\
&-\frac{1}{2\Lambda+1}\left|\left\langle \epsilon+3\ \Lambda-\frac{1}{2}\| T \| \epsilon\ \Lambda\right\rangle\right|^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.9')$$

用数学归納法从(1.9′)可証明

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\left\langle \epsilon_{\max}-3n\ \Lambda_0+\frac{n}{2}-i \| T \| \epsilon_{\max}-3n-3\ \Lambda_0+\frac{n+1}{2}-i\right\rangle\right|^2=\\
&=\frac{1}{4}(1+n-i)(2\Lambda_0+2+n-i)(\epsilon_{\max}-2\ \Lambda_0-2n+2i)=a_i(n),\\
&\left|\left\langle \epsilon_{\max}-3n\ \Lambda_0+\frac{n}{2}-i \| T \| \epsilon_{\max}-3n-3\ \Lambda_0+\frac{n-1}{2}-i\right\rangle\right|^2=\\
&=\frac{1}{4}(i+1)(2\Lambda_0-i)(\epsilon_{\max}+2\ \Lambda_0+2-2i)=b_i(n)\\
&\qquad\qquad i\leqslant n,\quad i, n=0, 1, 2, \cdots.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.9'')$$

設 $\epsilon_{\max}\neq 2(\lambda+\Lambda_0)$, λ 为 0 或正整数. 由(1.9″)知 $(\epsilon_{\max}-2\Lambda_0)>0$, 故可找到正整数 n, 使

$$2>\epsilon_{\max}-2\ \Lambda_0-2n>0, \quad 即 \quad a_i(n-i)>0,$$

故 $\left|\epsilon_{\max}-3n\ \Lambda_0+\frac{n}{2}-i\right\rangle\neq 0$. 再应用(1.9″),有

$$a_i(n+1-i)<0.$$

这是不可能的,所以

$$\epsilon_{\max}=2(\lambda+\Lambda_0).$$

由于 Λ_0 为整数或半整数,故有

$$\epsilon_{\max}=2\lambda+\mu, \quad \Lambda_0=\frac{\mu}{2}. \qquad (1.10)$$

以后就用 λ, μ 标示 $\epsilon_{\max}$, Λ_0 所对应的 SU_3 羣的不可約 U 表示. 在表示 $(\lambda\mu)$ 中, 无穷小算子的矩陣元由(1.5), (1.6), (1.7), (1.7′), (1.9″)給出. 从(1.9″)可以求出 SU_3 羣表示 $(\lambda\mu)$ 表示空間 R_0 包含的 $|\epsilon\Lambda K\rangle$ 及其維数 $d^{(\lambda\mu)}$ (見表 1). $d^{(\lambda\mu)}=\frac{1}{2}(1+\lambda)(1+\mu)\times\times(2+\lambda+\mu)$.

1) 由(1.3′),(1.3″)得不到新的关系.

表 1 SU_3 羣的不可約表示 $U^{(\lambda\mu)}$ 所包含的 $|\epsilon\Lambda K\rangle$

ϵ	Λ				
$\epsilon_{\max}=2\lambda+\mu$					$\Lambda_0=\frac{\mu}{2}$
$\epsilon_{\max}-3$				$\Lambda_0-\frac{1}{2}$	$\Lambda_0+\frac{1}{2}$
$\epsilon_{\max}-6$			Λ_0-1	Λ_0	⋮
⋮		⋮	$\Lambda_0-\frac{3}{2}$	⋮	⋮
$\epsilon_{\max}-3\mu$	0	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	$\frac{1}{2}$	⋮	⋮	⋮	⋮
$\epsilon_{\max}-3\lambda$	⋮	⋮	⋮	⋮	$\Lambda_{\max}=\Lambda_0+\frac{\lambda}{2}$
	⋮	⋮	⋮	$\Lambda_{\max}-\frac{1}{2}$	
	⋮	⋮	$\Lambda_{\max}-1$		
⋮	⋮	⋮			
$\epsilon_{\max}-3(\lambda+\mu)$	$\frac{\lambda}{2}$				

二、SU_3 羣不可約表示直乘的分解与約化系数

SU_3 羣两个不可約 U 表示 $(\lambda_1\mu_1)$ 和 $(\lambda_2\mu_2)$ 的直乘可以分解为不可約 U 表示 $(\lambda\mu)$ 的直和:

$$(\lambda_1\mu_1)\times(\lambda_2\mu_2)=\sum_{\lambda\mu}C_{\lambda\mu}(\lambda\mu). \tag{2.1}$$

相应于表示 $(\lambda_1\mu_1)\times(\lambda_2\mu_2)$ 的无穷小算子为

$$Q_{01}+Q_{02},\quad v_{01}+v_{02},\ \cdots.$$

設表示 $(\lambda_1\mu_1)\times(\lambda_2\mu_2)$ 及 $(\lambda\mu)$ 的表示空間为 R 及 $R(\lambda\mu)$, 则 R 应与 $\sum_{\lambda\mu}C_{\lambda\mu}R(\lambda\mu)$ 重合. R 包含那些 Q_0, v^2, v_0 的本征函数可用类似角动量耦合的办法求出. $R(\lambda\mu)$ 包含那些 Q_0, v^2, v_0 的本征函数已由上节給出,因此 $C_{\lambda\mu}$ 可以定出. 此結果由通常的 U 羣理論

也很容易得到[4].

設 $|\epsilon_1\Lambda_1K_1\rangle$, $|\epsilon_2\Lambda_2K_2\rangle$, $|(\lambda\mu)\epsilon\Lambda K\rangle$ 是 $(\lambda_1\mu_1)$, $(\lambda_2\mu_2)$, $(\lambda\mu)$ 表示空間的基矢，則

$$|(\lambda\mu)\epsilon\Lambda K\rangle = \sum_{\epsilon_1\epsilon_2\Lambda_1\Lambda_2} \langle \epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|(\lambda\mu)\epsilon\Lambda\rangle |\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2\Lambda K\rangle, \tag{2.2}$$

其中

$$|\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2\Lambda K\rangle = \sum_{K_1K_2} \langle \Lambda_1K_1\Lambda_2K_2|\Lambda K\rangle |\epsilon_1\Lambda_1K_1\rangle |\epsilon_2\Lambda_2K_2\rangle. \tag{2.3}$$

$\langle \Lambda_1K_1\Lambda_2K_2|\Lambda K\rangle$ 是 C.G. 系数. $\langle \epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|(\lambda\mu)\epsilon\Lambda\rangle$ 为 SU_3 羣的約化系数. $|(\lambda\mu)\epsilon_{\max}\Lambda_0K\rangle$ 滿足条件

$$T_q|(\lambda\mu)\epsilon_{\max}\Lambda_0K\rangle = 0, \quad T_q = T_{q_1} + T_{q_2}. \tag{2.4}$$

由(2.2),(2.4)得

$$\sum_{\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2} \langle \epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'\Lambda'\|T_1 + T_2\|\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2\Lambda_0\rangle \langle \epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|(\lambda\mu)\epsilon_{\max}\Lambda_0\rangle = 0. \tag{2.5}$$

应用张量代数,得[7]

$$\left.\begin{aligned} \langle \epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'\Lambda'\|T_1\|\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2\Lambda\rangle &= f(\Lambda_1'\Lambda_2\Lambda'\Lambda_1\Lambda_2\Lambda)\delta(\epsilon_2'\epsilon_2)\delta(\Lambda_2'\Lambda_2)\langle \epsilon_1'\Lambda_1'\|T_1\|\epsilon_1\Lambda_1\rangle, \\ \langle \epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'\Lambda'\|T_2\|\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2\Lambda\rangle &= g(\Lambda_1\Lambda_2'\Lambda'\Lambda_1\Lambda_2\Lambda)\delta(\epsilon_1'\epsilon_1)\delta(\Lambda_1'\Lambda_1)\langle \epsilon_2'\Lambda_2'\|T_2\|\epsilon_2\Lambda_2\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} f(\Lambda_1'\Lambda_2\Lambda'\Lambda_1\Lambda_2\Lambda) &= (-)^{\Lambda_1'+\Lambda_2+\Lambda+\frac{1}{2}}[(2\Lambda'+1)(2\Lambda+1)]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \Lambda_1 & \Lambda_1' \\ \Lambda_2 & \Lambda' & \Lambda \end{Bmatrix}, \\ g(\Lambda_1\Lambda_2'\Lambda'\Lambda_1\Lambda_2\Lambda) &= (-)^{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda'+\frac{1}{2}}[(2\Lambda'+1)(2\Lambda+1)]^{\frac{1}{2}}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \Lambda_2 & \Lambda_2' \\ \Lambda_1 & \Lambda' & \Lambda \end{Bmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

{ } 是 $6j$ 系数.

若 $(\lambda_1\mu_1)\times(\lambda_2\mu_2)$ 包含 $(\lambda\mu)$ 只一次，則(2.5)只有一組解 $\langle \epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|(\lambda\mu)\epsilon_{\max}\Lambda_0\rangle$，它即是約化系数. 若 $(\lambda_1\mu_1)\times(\lambda_2\mu_2)$ 包含 $(\lambda\mu)$ 两次或两次以上,則(2.5)有两組或两組以上的解 $\langle \epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|\alpha(\lambda\mu)\epsilon_{\max}\Lambda_0\rangle$，每一組解都是相应的約化系数,至于量子数 α 的选择,目前尙无一定的方法.

应用(1.8),可得

$$\left.\begin{aligned} &\langle \epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|(\lambda\mu)\ \epsilon-3\ \Lambda\rangle = \{\langle \epsilon\Lambda'\|T\|\epsilon-3\ \Lambda\rangle\}^{-1}, \\ &\sum_{\epsilon_1'\epsilon_2'\Lambda_1'\Lambda_2'} \langle \epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'|(\lambda\mu)\epsilon\Lambda'\rangle \langle \epsilon_1'\Lambda_1'\epsilon_2'\Lambda_2'\Lambda'\|T_1+T_2\|\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2\Lambda\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

反复应用(2.8)可求出全部約化系数.

用此方法我們求出了 SU_3 羣的 $(01)\times(10)$, $(11)\times(10)$, $(11)\times(11)$, $(30)\times(11)$ 的約化系数,其中 $(11)\times(11)$ 包含(11)两次,我們取滿足对称条件的为 $(11)_2$,滿足反对称条件的为 $(11)_1$. 結果在表 2 中給出.

表 2 約化系数 $\langle\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2|(\lambda\mu)\epsilon\Lambda\rangle$ 表

1. $(01)\times(10)=(11)+(00)$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$1\ \frac{1}{2},\ 2\ 0$	$1\ \frac{1}{2},\ -1\ \frac{1}{2}$	$-2\ 0,\ 2\ 0$	$-2\ 0,\ -1\ \frac{1}{2}$
$(11)\ 3\ \frac{1}{2}$	1			
$(11)\ 0\ 1$		1		
$(11)\ 0\ 0$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
$(00)\ 0\ 0$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
$(11)\ -3\ \frac{1}{2}$				1

2. $(11)\times(10)=(21)+(02)+(10)$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$3\ \frac{1}{2},\ 2\ 0$	$3\ \frac{1}{2},\ -1\ \frac{1}{2}$	$0\ 1,\ 2\ 0$	$0\ 0,\ 2\ 0$
$(21)\ 5\ \frac{1}{2}$	1			
$(21)\ 2\ 1$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$(02)\ 2\ 1$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$(21)\ 2\ 0$		$-\sqrt{\frac{1}{4}}$		$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$(10)\ 2\ 0$		$\sqrt{\frac{3}{4}}$		$\sqrt{\frac{1}{4}}$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$0\ 1,\ -1\ \frac{1}{2}$	$0\ 0,\ -1\ \frac{1}{2}$	$-3\ \frac{1}{2},\ 2\ 0$	$-3\ \frac{1}{2},\ -1\ \frac{1}{2}$
$(21)\ -1\ \frac{3}{2}$	1			
$(21)\ -1\ \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$(10)\ -1\ \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$(02)\ -1\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	
$(21)\ -4\ 1$				1
$(02)\ -4\ 0$				1

3. $(11)\times(11)=(22)+(30)+(03)+(11)_1+(11)_2+(00)$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$3\ \frac{1}{2},\ 3\ \frac{1}{2}$	$3\ \frac{1}{2},\ 0\ 1$	$0\ 1,\ 3\ \frac{1}{2}$	$3\ \frac{1}{2},\ 0\ 0$	$0\ 0,\ 3\ \frac{1}{2}$
$(22)\ 6\ 1$	1				
$(30)\ 6\ 0$	1				
$(22)\ 3\ \frac{3}{2}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$		
$(03)\ 3\ \frac{3}{2}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		
$(22)\ 3\ \frac{1}{2}$		$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{9}{20}}$
$(30)\ 3\ \frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
$(11)_1\ 3\ \frac{1}{2}$		$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
$(11)_2\ 3\ \frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$3\ \frac{1}{2},\ -3\ \frac{1}{2}$	$-3\ \frac{1}{2},\ 3\ \frac{1}{2}$	$0\ 0,\ 0\ 1$	$0\ 1,\ 0\ 0$	$0\ 1,\ 0\ 1$	$0\ 0,\ 0\ 0$
$(22)\ 0\ 2$					1	
$(22)\ 0\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	
$(30)\ 0\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	
$(03)\ 0\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	
$(11)_1\ 0\ 1$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
$(11)_2\ 0\ 1$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	
$(22)\ 0\ 0$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}$	$\sqrt{\frac{3}{20}}$			$-\sqrt{\frac{1}{40}}$	$\sqrt{\frac{27}{40}}$
$(11)_1\ 0\ 0$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$			0	0
$(11)_2\ 0\ 0$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{10}}$			$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$
$(00)\ 0\ 0$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$			$\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{8}}$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$0\ 1,\ -3\ \frac{1}{2}$	$-3\ \frac{1}{2},\ 0\ 1$	$0\ 0,\ -3\ \frac{1}{2}$	$-3\ \frac{1}{2},\ 0\ 0$	$-3\ \frac{1}{2},\ -3\ \frac{1}{2}$
$(22)\ -3\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$			
$(30)\ -3\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$			
$(22)\ -3\ \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	
$(03)\ -3\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	
$(11)_1\ -3\ \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	
$(11)_2\ -3\ \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	
$(22)\ -6\ 1$					1
$(03)\ -6\ 0$					1

4. $(30)\times(11)=(41)+(22)+(30)+(11)$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$6\ 0,\ 3\ \frac{1}{2}$	$6\ 0,\ 0\ 1$	$6\ 0,\ 0\ 0$	$3\ \frac{1}{2},\ 3\ \frac{1}{2}$
$(41)\ 9\ \frac{1}{2}$	1			
$(41)\ 6\ 1$		$\sqrt{\frac{1}{4}}$		$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$(22)\ 6\ 1$		$\sqrt{\frac{3}{4}}$		$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
$(41)\ 6\ 0$			$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$(30)\ 6\ 0$			$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$3\ \frac{1}{2},\ 0\ 1$	$0\ 1,\ 3\ \frac{1}{2}$	$6\ 0,\ -3\ \frac{1}{2}$	$3\ \frac{1}{2},\ 0\ 0$
$(41)\ 3\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$		
$(22)\ 3\ \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		
$(41)\ 3\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{4}$
$(22)\ 3\ \frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$
$(30)\ 3\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$(11)\ 3\ \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$3\ \frac{1}{2},\ -3\ \frac{1}{2}$	$0\ 1,\ 0\ 1$	$0\ 1,\ 0\ 0$	$-3\ \frac{3}{2},\ 3\ \frac{1}{2}$
(41)　0　2		$\sqrt{\frac{3}{4}}$		$\sqrt{\frac{1}{4}}$
(22)　0　2		$\sqrt{\frac{1}{4}}$		$-\sqrt{\frac{3}{4}}$
(41)　0　1	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$
(22)　0　1	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$
(30)　0　1	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
(11)　0　1	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{8}{15}}$
(22)　0　0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$		
(11)　0　0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		

$(\lambda\mu)\epsilon\Lambda$ \ $\epsilon_1\Lambda_1\epsilon_2\Lambda_2$	$0\ 1,\ -3\ \frac{1}{2}$	$-3\ \frac{3}{2},\ 0\ 1$	$-3\ \frac{3}{2},\ 0\ 0$	$-3\ \frac{3}{2},\ -3\ \frac{1}{2}$
(41)　-3　$\frac{5}{2}$		1		
(41)　-3　$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	
(22)　-3　$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{3}{4}$	
(30)　-3　$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$	
(22)　-3　$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$		
(11)　-3　$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{5}}$		
(41)　-6　2				1
(22)　-6　1				1

以上求約化系数的方法比現有的方法簡单，而且不涉及任何对称羣的知識，这个方法也可以用来求 C_2 羣（B_2 羣）与 G_2 羣的不可約表示和約化系数，这方面的工作已由楊国楨、关洪、孙洪洲等作出。

作者向导师胡宁教授及楊立銘教授表示感謝。

参 考 文 献

[1] Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **125** (1962), 1067.
[2] Ohubo, *Prog. Theor. Phys.*, **27** (1962), 949.
[3] Matthews and Salam, *Proc. Phys. Soc.*, **80** (1962), 28.
[4] Edmonds, *Proc. Roy. Soc.*, **268** (1962), 567.
[5] Rashid, *Nuovo Cimento*, **26** (1962), 118.
[6] Moshinsky, *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 813.
[7] Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics (Princeton, New Jersey, 1957).

THE DECOMPOSITION OF DIRECT PRODUCTS OF IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF SU_3

SUN HUNG-CHOU HAN QI-ZHI
(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

Using the familiar concepts of rotation group, we obtain the irreducible unitary representations and the reduction coefficients of the group SU_3. (These coefficients may be called the generalized Clebsch-Gordan coefficients.) This method is easier than those given by other authors.