

不稳定粒子 η 的衰变分支比 $R\left(\frac{\eta \rightarrow \pi\pi\gamma}{\eta \rightarrow 3\pi}\right)^*$

朱 保 如
(中国科学院)

提 要

本文以 $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ 与 $\eta \rightarrow 3\pi$ 的分支比为例, 讨论了通过对质量作解析延拓, 用色散关系处理不稳定粒子衰变的方法, 尤其是存在有反常阈的情形。在一定近似下, 求得了分支比 $R\left(\frac{\eta \rightarrow \pi\pi\gamma}{\eta \rightarrow 3\pi}\right) \approx 0.65$, 与最新实验结果相近。

一、引 言

近年来, 实验上发现了一系列 $\pi\pi$ 共振和 π 介子-重子共振, 或者可以称之为不稳定粒子。不少作者^[1,2]采用一定的模型讨论了它们的衰变方式。Gell-Mann 等人^[1]采用了“ ρ 中间态”模型处理了 ω 与 η 粒子的衰变。在他们的工作中把 ω 与 η 粒子视作稳定粒子加以处理。

由于色散关系的渐近条件, 严格说来, 排除了对不稳定粒子的处理。因而, 戴元本^[3]建议用对质量作解析延拓^[4]的方法来处理不稳定粒子的衰变过程。也就是说, 先把衰变粒子视作具有较小质量的稳定粒子, 写出色散关系, 然后对质量作解析延拓, 得到相应于物理质量的结果。

对于与衰变过程 $\eta \rightarrow 3\pi$ 相应的散射过程 $\eta + \pi \rightarrow \pi + \pi$, 用色散关系处理时, 要用到阈能以下的么正条件, 因而严格说来, 要用 Mandelstam^[4]所采用的对质量作解析延拓的方法。另外, 由于衰变过程的物理区在运动学图的三角形中(图 1 的阴影区表示 $\eta \rightarrow 3\pi$ 的物理区), 而且由于衰变粒子的质量充分大, 双重谱函数有重迭之处。总之, 由于这些不同于一般散射过程的情况, 衰变过程的色散关系尚有不清楚的地方。然而, 采用对质量作解析延拓的方法似乎可以避开这些问题。

本文以衰变过程 $\eta \rightarrow 3\pi$ 与 $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ 为例, 说明通过对质量作解析延拓用色散关系处理不稳定粒子衰变的方法, 尤其是有反常阈存在的情况。对于所讨论的过程, 比起其它一些工作, 考虑的因素也要细致些。

在第二节中, 列出了运动学结果。第三节是分波么正条件。在第四节中, 写出了质量较小时的分波振幅色散关系, 然后对质量作解析延拓。第五节讨论了近似解。第六节是最

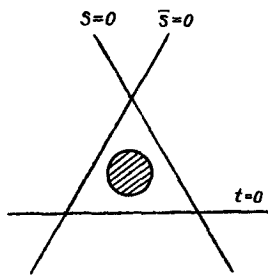


图 1

* 1963 年 8 月 27 日收到。

后计算结果和讨论。

二、运动学

最新实验结果表明, 不稳定粒子 η 之量子数不是 $1^{--}(S^P G)$, 而是 0^{-+} , 其同位旋为 $T = 0$, 因而可以有衰变方式: (i) $\eta \rightarrow 3\pi$; (ii) $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$; (iii) $\eta \rightarrow 2\gamma$, 以及其它高次电磁衰变. 本文讨论(i)与(ii)之分支比.

对于过程 $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$, 定义

$$t = -(p + k)^2 = -(q_1 + q_2)^2, \quad (2.1)$$

$$s = -(p + q_1)^2 = -(k + q_2)^2, \quad (2.2)$$

$$\bar{s} = -(p + q_2)^2 = -(k + q_1)^2, \quad (2.3)$$

其中 p, k, q_i 是 η, γ 及 π 之四维动量能量矢量. 在 t 道质心系中,

$$t = \tau^2 + 2k^2 + 2k\sqrt{\tau^2 + k^2} = 4(q^2 + \mu^2), \quad (2.4)$$

$$s = \mu^2 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{t}{2} + 2kqx, \quad (2.5)$$

$$\bar{s} = \mu^2 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{t}{2} - 2kqx, \quad (2.6)$$

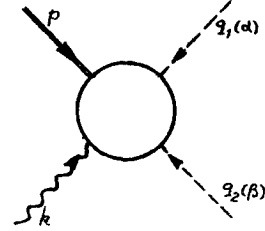


图 2

其中 k 与 q 是初、末态动量大小, 可以用 t 表出:

$$\left. \begin{aligned} q^2 &= \frac{t}{4} - \mu^2, \\ k^2 &= \frac{(t - \tau^2)^2}{4t}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

τ 是 η 粒子的质量, μ 是 π 介子的质量. $x = \cos\theta$, θ 是 t 道质心系散射角.

S 矩阵元表为

$$S_{fi} = -(2\pi)^4 i \frac{\delta^4(p + k + q_1 + q_2)}{\sqrt{16 E_p k \omega_1 \omega_2}} T, \quad (2.8)$$

T 是不变幅. 由 G 宇称得知, 电磁流中只有同位矢部分参与反应; 再由 Lorentz 不变性及规范不变性, 可知不变幅之结构为

$$T = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{3\alpha\beta} \right) \sum_{\mu\nu\lambda\gamma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} e_\mu k_\nu p_\lambda q_{1\gamma} M(t, s, \bar{s}), \quad (2.9)$$

其中 α, β 是 π 介子的荷电指标. e_μ 是光子的极化矢量.

对于过程 $\eta \rightarrow 3\pi$, 相应地定义三个不变量(以下的符号意义显然, 不再一一解释):

$$t = -(p + q_1)^2 = -(q_2 + q_3)^2, \quad (2.10)$$

$$s = -(p + q_2)^2 = -(q_1 + q_3)^2, \quad (2.11)$$

$$\bar{s} = -(p + q_3)^2 = -(q_1 + q_2)^2. \quad (2.12)$$

在 t 道质心系中, 有

$$t = (\sqrt{p^2 + \tau^2} + \sqrt{p^2 + \mu^2})^2 = 4(q^2 + \mu^2), \quad (2.13)$$

$$s = \frac{\Sigma}{2} - \frac{t}{2} + 2pqx, \quad (2.14)$$

$$\bar{s} = \frac{\Sigma}{2} - \frac{t}{2} - 2pqx, \quad (2.15)$$

其中 $\Sigma = \tau^2 + 3\mu^2$.

$$\left. \begin{aligned} q^2 &= \frac{t}{4} - \mu^2, \\ p^2 &= \frac{[t - (\tau - \mu)^2][t - (\tau + \mu)^2]}{4t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

S 矩阵元写为

$$S_{fi} = -(2\pi)^4 i \frac{\delta^{(4)}(p + q_1 + q_2 + q_3)}{\sqrt{16 E_p \omega_1 \omega_2 \omega_3}} T. \quad (2.17)$$

由于 $\eta + \pi \rightarrow \pi + \pi$ 过程改变了 G 宇称, 故至少有一次中间电磁作用. 即 S 矩阵是同位旋空间的一阶张量. 而电荷守恒又要求它是一阶张量的第三分量, 故易知不变幅 T 之同位旋结构为

$$T = \delta_{3\alpha} \delta_{\beta\gamma} \mathcal{D} + \delta_{3\beta} \delta_{\alpha\gamma} \mathcal{E} + \delta_{3\gamma} \delta_{\alpha\beta} \mathcal{F}, \quad (2.18)$$

其中标量幅 \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{F} 与末态总同位旋为 T 的跃迁幅 $A^{(T)}$ 之

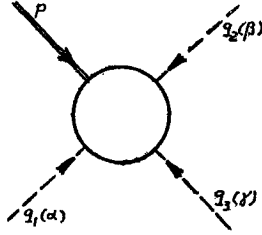


图 3

间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{3} (A^{(0)} - A^{(2)}), \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} (A^{(1)} + A^{(2)}), \\ \mathcal{F} &= -\frac{1}{2} (A^{(1)} - A^{(2)}). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

三、分波么正条件

对于 $\eta + \gamma \rightarrow \pi + \pi$, 不变幅 T 之吸收部分为

$$\begin{aligned} T_a &= -\frac{\sqrt{4 E_p \omega_1}}{2(2\pi)^3} \int d^4 z e^{-\frac{i}{2}(k+q_2)z} \times \\ &\times e_\mu \langle q_1(\alpha) \left| \left[\rho_\beta \left(\frac{z}{2} \right), j_\mu \left(-\frac{z}{2} \right) \right] \right| p \rangle, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ρ 表示 π 介子的源, j_μ 表示电磁源. t 道中的最低强作用中间态是 2π 态: $|q(\gamma), q'(\delta)\rangle$. 它只涉及对易子的第一部分, 这部分计算如下:

$$\begin{aligned} T_i &= -\frac{\sqrt{4 E_p \omega_1}}{2(2\pi)^3} \sum_{rs} \iint \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{q}'}{(2\pi)^6} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - q - q') \times \\ &\times \langle q_1(\alpha) | \rho_\beta(0) | q(\gamma), q'(\delta) \rangle_{\text{out}} e_\mu \langle q(\gamma), q'(\delta) | j_\mu(0) | p \rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

而

$$\langle q_1(\alpha) | \rho_\beta(0) | q(\gamma), q'(\delta) \rangle = -(2\pi)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{8\omega_1\omega\omega'}} f^*. \quad (3.3)$$

f 即是 $\pi\pi$ 散射幅

$$f = A\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + B\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + C\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}. \quad (3.4)$$

又

$$\begin{aligned} e_{\mu} \langle q(\gamma), q'(\delta) | j_{\mu}(0) | p \rangle = \\ = -(2\pi)^{3/2} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{3\gamma\delta} \right) \frac{1}{\sqrt{8E_p\omega\omega'}} \sum_{\mu\nu\lambda\eta} \epsilon_{\mu\nu\lambda\eta} e_{\mu} k_{\nu} p_{\lambda} q_{\eta} M. \end{aligned} \quad (3.5)$$

以(3.3)与(3.5)式代入(3.2)式,得

$$\begin{aligned} T_i = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{3\alpha\beta} \right) \frac{1}{2(2\pi)^2} \iint d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \delta^{(4)}(p + k - q - q') \times \\ \times \frac{1}{4\omega\omega'\sqrt{4E_p\omega_1}} \sum_{\mu\nu\lambda\eta} \epsilon_{\mu\nu\lambda\eta} e_{\mu} k_{\nu} p_{\lambda} q_{\eta} M f^{(1)*}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $f^{(1)}$ 表示同位旋为 1 的 π - π 散射幅。

对于象 $\eta + \gamma \rightarrow \pi + \pi$ 这样的具有赝标结构的不变幅, 宜于采用如下的分波展开:

$$M(t, s, \bar{s}) = \sum_l M_l(t) P_l^i(x). \quad (3.7)$$

其逆式为

$$M_{l+1}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_l(x) - P_{l+2}(x)] M(t, x) dx. \quad (3.8)$$

在(3.6)式中, 把 M 与 f 作分波展开 (f 按通常方法展开: $f = \sum_l (2l+1) P_l(x) f_l$), 经过较繁复的计算, 且注意吸收部分 T_i 与 $\text{Im } M$ 之间的关系, 即可得到分波振幅的么正条件:

$$\text{Im } M_l = -\frac{q}{8\pi W} M_l f_l^{(1)*} (l = \text{奇}), \quad (3.9)$$

W 是质心系总能, $W = \sqrt{t}$. 只存在 $T = 1, l = \text{奇}$ 的幅, 这一点可以直接看出。

对于过程 $\eta + \pi \rightarrow \pi + \pi$, t 道中间态对不变幅 T 的吸收部分的贡献是

$$\begin{aligned} T_i = -\frac{\sqrt{4E_p\omega_3}}{2(2\pi)^3} \int d^4z e^{-\frac{i}{2}(q_1+q_2)z} \times \\ \times S_n \left[\left\langle q_3(\gamma) \left| \rho_{\beta} \left(\frac{z}{2} \right) \right| n_{\text{out}} \right\rangle \left\langle n_{\text{out}} \left| \rho_{\alpha} \left(-\frac{z}{2} \right) \right| p \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

最低强作用中间态为 2π 态: $|n\rangle = |q(\delta), q'(\rho)\rangle$; 由此所求得的分波么正条件与(3.9)式相似:

$$\text{Im } A_l(t) = -\frac{q}{8\pi W} A_l f_l^*, \quad (3.11)$$

其中 $A_l(t)$ 统表 $\eta + \pi \rightarrow \pi + \pi$ 的分波标量幅。

另外, 最低电磁中间态为一个 π 介子与一个光子的态: $|n\rangle = |q'(\delta), k(e^{\lambda})\rangle$. 注意到

$$\begin{aligned} \langle q'(\delta), k(e^{\lambda}) | \rho_{\alpha}(0) | p \rangle = \\ = -(2\pi)^{3/2} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{3\alpha\delta} \right) \frac{1}{\sqrt{8E_p\omega'k}} \sum \epsilon_{\mu\nu\lambda\eta} e_{\mu}^{\lambda} k_{\nu} p_{\lambda} q'_{\eta} M, \end{aligned} \quad (3.12)$$

及

$$\begin{aligned} \langle q_3(\gamma) | \rho_a(0) | q'(\delta), k(e^i) \rangle_{\text{out}} &= \\ &= -(2\pi)^{3/2} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{\delta\beta\gamma} \right)^* \frac{1}{\sqrt{8\omega'\omega_3k}} \sum \epsilon_{\xi\zeta\alpha\sigma} e^{\frac{1}{2}k_\zeta q'_\alpha A_{2\sigma}} F^*, \end{aligned} \quad (3.13)$$

采用赧标结构幅的展开式(3.7)及

$$F = \sum_l P_l(\cos\theta) F_l, \quad (3.14)$$

即可由(3.10)得到 $|\pi\gamma\rangle$ 中間态的分波么正条件。但是为了简单起见,我們只写出近似式。 $\gamma + \pi \rightarrow \pi + \pi$ 过程的电磁流中只有同位标部分参与贡献,故 F 只含 l 为奇的分波。在低能下,可以合理地认为最低波是最重要的,即近似地取为 $F \approx F_1$, 这样所得的分波么正条件为

$$\text{Im } A_1 = \frac{1}{36\pi} W p q k^3 M_1 F_1^*, \quad \text{Im } A_l \approx 0 (l \neq 1), \quad (3.15)$$

其中 $W = \sqrt{s}$, p, k, q 分别是 t 道质心系中初、中、末态的动量大小。

同时,也不难知道 (π, γ) 中間态只对下列同位旋结构的振幅有贡献:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha_1 \epsilon_2 \beta \gamma} - \delta_{\alpha_2 \epsilon_1 \beta \gamma}). \quad (3.16)$$

四、分波振幅色散关系及其对质量的解析延拓

在本节中,我們研究分波振幅的奇异性,写出当 τ^2 比较小时的色散关系,然后把它对 τ^2 作解析延拓。

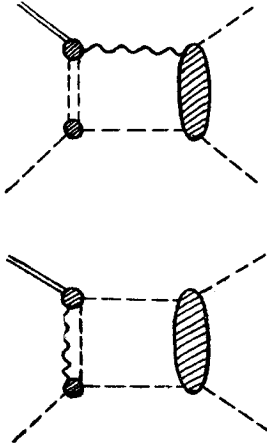


图 4

首先考虑过程 $\eta + \pi \rightarrow \pi + \pi$ 。前面已经指出,这一过程至少有一次中間电磁作用,因而如果认为低能下最低中間态是重要的话,那么图 4 中的两个图是重要的。

下面,我們只限于考虑一个道取 2π 中間态,另两个道取 (π, γ) 中間态的情况。结果表明,在这种情况下,将出现一个很长的反常阈,它给出了较大的贡献。

如果我们取一个道,如 t 道的中間态为 2π 态,另两个道的中間态为 (π, γ) 态,那么过程 $\eta + \pi \rightarrow \pi + \pi$ 的分波幅的奇异性来自于:

- (i) $t' - t = 0$, 贡献右割縫 $t = 4\mu^2 \rightarrow \infty$ 。
- (ii) $\bar{s}' - \bar{s} = 0$ 及 $s' - s = 0$, 贡献左割縫。

左割縫的右端点 a 确定如下: 把 \bar{s}' 或 s' 的最小值 μ^2 及 $x = \pm 1$ 代入方程 $\bar{s}' - \bar{s} = 0$ 或 $s' - s = 0$ 中,得真正的根为

$$a(\tau) = \frac{\tau^2 + 2\mu^2}{2} + \sqrt{3\tau^2 \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\tau^2 \right)}. \quad (4.1)$$

$a(\tau)$ 有一极大值,当 $\tau^2 = 3\mu^2$ 时, $a(\tau) = 4\mu^2$ 。

根据上述分波幅的奇异性,即可写出 τ 较小时的色散关系。例如当 $\tau^2 = \mu^2$ 时, $a(\tau)$

$= 3\mu^2$. 色散关系为

$$A_l(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^a \frac{\text{Im } A_l(t', \tau)}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } A_l(t', \tau)}{t' - t} dt'. \quad (4.2)$$

下面我们右割缝的积分项为例, 阐明对质量作解析延拓. 至于左割缝积分项, 则可作类似考虑, 不作赘述.

右割缝积分项中的虚部由(3.11)给出:

$$\text{Im } A_l(t, \tau) = -\frac{q}{8\pi W} A_l(t, \tau) f_l^*(t).$$

根据色散关系(4.2)式, $t = a$ 是 $A_l(t, \tau)$ 的支点, 因而也是 $\text{Im } A_l(t, \tau)$ 的一个支点. 在对 τ^2 作解析延拓时, 当 τ 尚未到达 η 之物理质量 $m \approx 4\mu$ 时, $\text{Im } A_l(t, \tau)$ 之支点 $a(\tau)$ 即可到达积分端点 $4\mu^2$ (此时 $\tau^2 = 3\mu^2$), 因而要避免这一点. 为此, 我们拟给 τ^2 一个小虚部, 最后让小虚部趋于零. 也就是说, 把物理振幅视为 τ^2 平面上的边界值. 当然, 我们要区分所加小虚部为正或为负这两种情况. 在文献[3]中已经指出对外线质量 τ^2 要加正的小虚部, 所以我们在(4.1)式中作替代:

$$\tau^2 \rightarrow \tau^2 + i\epsilon.$$

此时 $a(\tau)$ 随 τ^2 变化的轨迹如图 5 虚线所示, 即从上面绕过支点 $4\mu^2$, 当 τ^2 大于 $4\mu^2$ (相应的 $a(\tau) = 3\mu^2$) 时, $a(\tau)$ 到达复平面中. 当 τ 取 η 之物理质量值 ($\tau^2 \approx 16\mu^2$) 时, $a(\tau)$ 最终到达点 $(9 - 12i)\mu^2$.

当解析延拓到 $\tau^2 > 3\mu^2$ 时, 把右割缝作相应的变形, 如图 5 中的实线状. 把 $A_l(t)$ 沿左割缝的不连续量表为 $\text{dis } A_l(t)$. 最后使右割缝上反常阈两边的迴路无限接近虚线后, 即得

$$\begin{aligned} A_l(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{dis } A_l(t')}{t' - t} dt' + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt'}{t' - t} \left[\frac{q'}{8\pi W'} \text{dis } A_l^{\text{II}}(t') f_l^{\text{II}*}(t') \right] - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{q'}{8\pi W'} A_l(t') f_l^*(t'), \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中“左”表示左割缝(其上, $\text{dis } A_l(t)$ 取第一或第二叶的值未加标出), “反”表示反常阈, “II”表示第二叶. (4.3)式即是(4.2)式对 τ^2 的解析延拓.

至于过程 $\eta + \gamma \rightarrow \pi + \pi$, 可以仿照上面那样讨论. 分波幅的奇异性为: 右割缝 $t = 4\mu^2 \rightarrow \infty$, 左割缝 $-\infty \rightarrow a(\tau)$. 考虑到 s 及 \bar{s} 道的最低强作用中间态为 3π 态, 即得

$$a(\tau) = \frac{5\tau^2 - 32\mu^2}{9} + \frac{4}{9} \sqrt{(\tau^2 - 16\mu^2)(\tau^2 - 4\mu^2)}. \quad (4.4)$$

当 τ 较小时, 例如 $\tau^2 = \mu^2$ 时, $a(\tau) = \left(-3 + \frac{4}{3}\sqrt{5}\right)\mu^2$, 分波幅的色散关系为

$$M_l(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{a(\tau)} \frac{\text{Im } M_l(t', \tau)}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } M_l(t', \tau)}{t' - t} dt'. \quad (4.5)$$

由(4.4)式, 可以看到当 τ^2 增大至 $16\mu^2$ 时, $a(\tau)$ 并不碰到支点 $4\mu^2$, 所以(4.5)式对 τ^2 的

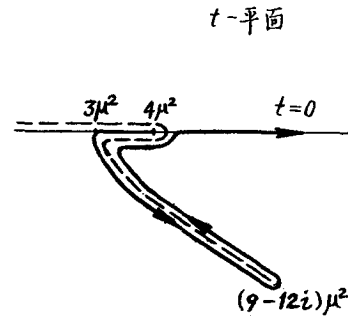


图 5 $\eta \rightarrow 3\pi$ 过程的反常阈

解析延拓的结果只是 $a(\tau)$ 取相应的值。

五、近 似 解

首先,我们对过程 $\eta + \gamma \rightarrow \pi + \pi$ 的幅作近似。前面已指出,只有奇分波幅。在低能下,我们近似地只取 P 波幅。令

$$D_l(t) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\delta_l(t')}{t' - t} \right], \quad (5.1)$$

其中 $\delta_l(t)$ 是 $\pi\text{-}\pi$ 散射的 l 分波相移。 $D_l(t)$ 具有右割缝 $4\mu^2 \rightarrow \infty$, 其上岸有相因子 $e^{-i\delta_l}$, 故 $M_1(t)D_1(t)$ 只有 $16\mu^2 \rightarrow \infty$ 之右割缝及左割缝:

$$\begin{aligned} M_1(t)D_1(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{a(t)} \frac{\text{Im}(M_1(t')D_1(t'))}{t' - t} dt' + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im}(M_1(t')D_1(t'))}{t' - t} dt'. \end{aligned} \quad (5.2)$$

在低能下,可以近似地认为右方是 t 的缓变函数,视之为一常数 g_η 。故得近似解:

$$M(t) \approx M_1(t) \approx g_\eta / D_1(t). \quad (5.3)$$

这一近似解虽是在 $\eta + \gamma \rightarrow \pi + \pi$ 的物理区中求得,但在下面我们将象通常那样把它用于衰变 $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ 的物理区中去。这是因为在衰变物理区中, s 与 \bar{s} 虽则为正,但是离共振位置甚远,而 s 道与 \bar{s} 道相应于 $\eta + \pi \rightarrow (\text{中间态 } 2\pi) \rightarrow \pi + \gamma$, 与 t 道 $\eta + \gamma \rightarrow (\text{中间态 } 2\pi) \rightarrow \pi + \pi$ 相比是较不重要的(因为 $\eta\pi \rightarrow \pi\pi$ 尚含有中间电磁作用)。所以我们可望把近似解(5.3)延拓到衰变物理区中仍是一个可用的粗糙近似。

其次,近似地求解(4.3)式。与前相似,根据 Cauchy 定理,可直接写出 $A_l(t)D_l(t)$ 之表式:

$$\begin{aligned} A_l(t)D_l(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pm} \frac{\text{dis } A_l(t')D_l(t')}{t' - t} dt' + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt'}{t' - t} \left[\frac{q'}{8\pi W'} \text{dis } A_l^{\text{II}}(t')f_l^{\text{II}}(t')D_l^{\text{II}}(t') \right] - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{q'}{8\pi W'} A_l(t')f_l^*(t')D_l(t'). \end{aligned} \quad (5.4)$$

在低能下,我们可以把远割缝 $16\mu^2 \rightarrow \infty$ 的贡献以及左割缝中未伸入反常阈的部分的贡献近似地抛去。这样得到(4.3)式的近似解:

$$A_l(t)D_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt'}{t' - t} \text{dis } A_l^{\text{II}}(t')D_l^{\text{II}}(t') \times \left[1 + \frac{q'}{8\pi W'} f_l^{\text{II}*}(t') \right], \quad (5.5)$$

式中 $\pi\text{-}\pi$ 散射幅为

$$f_l(t) = -\frac{8\pi W}{q} e^{i\delta_l} \sin \delta_l. \quad (5.6)$$

在以下计算中,我们只限于 S 及 P 波。目前已有相当的证据表明 S 、 P 波低能 $\pi\text{-}\pi$ 散射存在有共振。本文采用共振的 Breit-Wigner 型公式,即

$$f_l(t) = -8\pi W \frac{\gamma q^{2l+1}}{t_r - t - i\gamma q^{2l+1}}, \quad (5.7)$$

t_r 是共振点的 t 值, γ 是相应于共振宽度的一个参量。

在同样近似下, π 介子的形式因子为

$$F_{\pi}(t) = \frac{D_1(0)}{D_1(t)} = \frac{t_r - \gamma}{t_r - t - i\gamma q^3}, \quad (5.8)$$

所以我們把 $D_i(t)$ 取为

$$D_i(t) = \frac{t_r - t - i\gamma q^{2i+1}}{t_r - \gamma}. \quad (5.9)$$

至于左割縫上的不連續量 $\text{dis } A_i(t)$, 可以近似地求出. 首先不难知道, 振幅 A 在左割縫上的不連續量为

$$\text{dis } A(t, s) = A_s(s, t) + A_{\bar{s}}(\bar{s}, t), \quad (5.10)$$

A_s 与 $A_{\bar{s}}$ 分别是 s 道与 \bar{s} 道的虚部. 前已得

$$A_s(t, s) = \frac{1}{12\pi} W p q k^3 M_1 F_1^* z, \quad (5.11)$$

其中 W , p , q , k 及 z 是 s 道质心系中的总能量、动量大小及散射角的余弦; 而

$$M_1(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_0(z) - P_2(z)] M(s, z) dz.$$

以近似解(5.3)式代入上式, 而且注意到在我們所討論的范围中, $t_r \gg |t|$, 故可以取近似

$\frac{1}{D(t)} \approx \frac{t}{t_r - t}$, 如此可以算得

$$M_1(s) \approx g_{\eta} \left[1 + \frac{1}{2t_r} \left(\Sigma - s + \frac{\mu^2(m^2 - \mu^2)}{s} \right) \right]. \quad (5.12)$$

另外, 根据获得近似解(5.3)所作的类似的考虑, 可得 $F_1(s)$ 之近似解:

$$F_1(s) = \frac{g_{\gamma}}{D(s)}. \quad (5.13)$$

与 H. S. Wong^[5] 之单极点结果相比, 可知在低能下, 两者差不多一样. 采用归一化 $F_1(1) = \Lambda e$, 知 $g_{\gamma} = \Lambda e D(1)$.

把(5.12)及(5.13)代入(5.11)式, 注意 $t_r \gg |t|$, 再把 \bar{s} 道的贡献类似地考虑进去, 最后, 可以近似地算得:

$$\text{dis } A_i(t) = \frac{g_{\eta} g_{\gamma}}{12 \times 128\pi} \int_{-1}^{+1} f(s) P_i(x) dx + (s \rightarrow \bar{s}), \quad (5.14)$$

其中

$$f(s) = \frac{(s - \mu^2)^3 (2t - \Sigma + s)}{s} \left[1 + \frac{1}{2t_r} \left(\Sigma + s + \frac{\mu^2(m^2 - \mu^2)}{s} \right) \right]. \quad (5.15)$$

同位旋结构的加入是极其简单的. 第一项的同位旋结构是

$$\frac{1}{2} (\delta_{\beta_1 \epsilon_{2\alpha\gamma}} - \delta_{\beta_2 \epsilon_{1\alpha\gamma}}) = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha_3 \delta_{\beta\gamma}} - \delta_{\gamma_3 \delta_{\alpha\beta}}). \quad (5.16)$$

第二项的同位旋结构只要在上式中作替代 $\beta \rightarrow \gamma$ 便得.

把(5.7), (5.9)及(5.14)代入(5.4)式中, 即可算出 $A_i(t)$.

在数字计算过程中, 我們把 $\pi-\pi$ 的 P 波共振参数取为

$$\text{共振位置 } W_r = 760 \text{ MeV}, \quad \text{共振宽度 } \Gamma = 110 \text{ MeV}.$$

在 $\mu = \hbar = c = 1$ 的单位中, 相应于

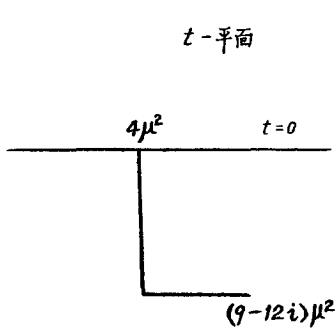


图 6

$$t_r \approx 29, \quad \gamma \approx \frac{1}{4}.$$

S 波共振的参数取为

$$W_r = 310\text{MeV}, \quad \Gamma = 20\text{MeV}.$$

相应于 $t_r \approx 4.88$, $\gamma \approx 2/3$.

并且,为计算方便起见,可把反常阈变形成 L 形,如图 6 所示,然后用数值积分法计算二重积分 $A_i(t)$ 。

在我们所讨论的能量范围内,由于 $A_i(t)$ 之近似解 (5.4) 式中含有因子 $D_i^{-1}(t)$, 所以 S 波的贡献远比 P 波贡献大,因而在计算中只计 S 波:

$$A(t) \approx A_0(t). \quad (5.17)$$

在计算 $A_0(t)$ 时,把 (5.14) 式中形如 $\int_{-1}^{+1} f(t, s) dx$ 的积分化为 $\int_0^1 [f(t, s) + f(t, \bar{s})] dx$, 再代入 $A_0(t)$ 中,进行对 t 与 x 的二重积分计算. 对于变形后的反常阈上的 $4\mu^2 - (4 - 12i)\mu^2$ 一段,取 13 个点;对于 $(4 - 12i)\mu^2 - (9 - 12i)\mu^2$ 一段,取 8 个点,最后得到

$$\frac{1}{12 \times 128\pi} \int_{t_0}^{t'} \frac{dt'}{t' - t_0} \left[1 + \frac{q'}{8\pi W'} f_0^{11*}(t') \right] D_0^{11}(t') \int_{-1}^{+1} f(s) dx \approx -19 - 7.1i.$$

t_0 之取值参看下节.

六、结果及讨论

$\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ 之衰变几率为

$$W = \sum_{\alpha\beta} \sum_{\lambda'} \iiint \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} \left| (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(\Sigma \mathbf{p})}{\sqrt{16 E_p \omega_1 \omega_2 k}} T \right|^2 / VT. \quad (6.1)$$

注意到 $VT = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$, 选择 $\mathbf{p} = 0$ 之系统,则

$$(2\pi)^5 W = \frac{\pi^2 m}{2} \int q_1^2 d\omega_1 \int q_2^2 d\omega_2 |M(t)|^2 \times \left[1 - \left(\frac{m^2 + 2\mu^2 - 2m(\omega_1 + \omega_2) + 2\omega_1 \omega_2}{2q_1 q_2} \right)^2 \right]. \quad (6.2)$$

1) 承王元先生指出,对于二重积分

$$J = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y),$$

可以采用下列近似算法. 令

$$x = 6 \left(\frac{x'^2}{2} - \frac{x'^2}{3} \right), \quad y = 6 \left(\frac{y'^2}{2} - \frac{y'^2}{3} \right),$$

且令

$$\varphi(x', y') = f(x, y) \times 36x'(1-x')y'(1-y'),$$

则

$$J \approx \frac{1}{q_n} \sum_{k=1}^{q_n} \varphi \left(\frac{k}{q_n}, \frac{q_{n-1}k}{q_n} \right).$$

其中 q_i 满足

$$q_i = q_{i-1} + q_{i-2}, \quad q_0 = q_1 = 1.$$

这一方法具有优良的精确度,以致减少了数字计算工作量. 作者向王元先生深致谢意.

为计算方便起见, 把标量幅 $M(t)$ 用点 $t_0 = \frac{1}{3}(m^2 + 2\mu^2)$ 的值代替, 提出积分号外, 则

$$(2\pi)^5 W = \frac{1}{2} \pi^2 m |M(t_0)|^2 \Omega, \quad (6.3)$$

其中

$$\Omega = \int_{\mu}^{m/2} q_1^2 d\omega_1 \int_{\omega_2^-}^{\omega_2^+} q_2^2 d\omega_2 \left[1 - \left(\frac{m^2 + 2\mu^2 - 2m(\omega_1 + \omega_2) + 2\omega_1\omega_2}{2q_1q_2} \right)^2 \right]. \quad (6.4)$$

$d\omega_2$ 之积分限 ω_2^{\pm} 由 $x = \cos\theta$ 必须在 $[-1, 1]$ 中的条件定出:

$$\omega_2^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ (m - \omega_1) \left(\frac{m^2 + 2\mu^2 - 2m\omega_1}{m^2 + \mu^2 - 2m\omega_1} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{m^2 + 2\mu^2 - 2m\omega_1}{m^2 + \mu^2 - 2m\omega_1} \right)^2 (\omega_1 - m)^2 - \frac{(m^2 + 2\mu^2 - 2m\omega_1)^2}{m^2 + \mu^2 - 2m\omega_1} - \frac{4\mu^2(\omega_1^2 - \mu^2)}{m^2 + \mu^2 - 2m\omega_1}} \right\}; \quad (6.5)$$

$d\omega_1$ 的积分限由 ω_2^{\pm} 为实数的条件定出. 完成对 $d\omega_2$ 的积分后, $d\omega_1$ 的积分用数值法积出, 结果为

$$\Omega \approx 0.61. \quad (6.6)$$

$\eta \rightarrow 3\pi$ 的衰变几率为

$$W = \sum_{\alpha\beta\gamma} \iiint \frac{d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3}{(2\pi)^9} \left| (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(\Sigma p)}{\sqrt{16 E_p \omega_1 \omega_2 \omega_3}} T \right|^2 / VT. \quad (6.7)$$

仍用最大对称点 $t_0 = \frac{1}{3}(m^2 + 3\mu^2)$ 处的值作为标量幅的值, 最后得

$$(2\pi)^5 W = \frac{\pi^2}{2m} J, \quad (6.8)$$

其中

$$J = \int d\omega_2 \int d\omega_3 = \int_{\mu}^{\frac{m^2 - 3\mu^2}{2m}} d\omega_2 \sqrt{\frac{(m^2 - 3\mu^2 - 2m\omega_2)(\omega_2^2 - \mu^2)}{m^2 + \mu^2 - 2m\omega_2}}. \quad (6.9)$$

数值积分结果,

$$J \approx 0.76. \quad (6.10)$$

由此得 $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ 与 $\eta \rightarrow \pi\pi\pi$ 之分支比:

$$R = \frac{W_{\eta \rightarrow \pi\pi\gamma}}{W_{\eta \rightarrow 3\pi}} \approx \frac{2.6}{\Lambda^2}. \quad (6.11)$$

在确定耦合常数 Λ 值方面, 已有不少工作. 最近, Robinson 等从 π^+ 介子光生过程中定得 $\Lambda \approx -1.5 \pm 0.5$, 彭宏安、杨震华及作者^[7]对于同一过程研究的结果得出 $\Lambda \approx -2.8$. 所以, 如果认为 $\Lambda \approx -2$, 则分支比为

$$R \approx 0.65. \quad (6.12)$$

由同位旋结构(2.18)与(5.16)可以看出, 在本文的近似下, $\eta \rightarrow 3\pi$ 过程中只包括 $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 部分, 而未包括 $\eta \rightarrow 3\pi^0$. 最新实验结果^[8]表明,

$$R = \frac{\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)}{\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)} = 0.26 \pm 0.08.$$

本文结果与此大致相符, 而理论结果偏大这一点也是自然的. 一方面, 本文在计算中作了不少近似; 另外, 可以想象, 本文未加考虑的一些机制会使 $\eta \rightarrow 3\pi$ 的几率比现在的结果

要大。

M. Gell-Mann 等人^[1]的工作未曾討論本文所討論的分支比。Brown 与 Singer^[2] 基于同本文类似的思想,即取“中間 ABC 粒子”模型,用微扰論算得寬度 $\Gamma_\eta(\pi^+\pi^-\gamma) = 20\text{ev}$, $\Gamma_\eta(3\pi) = 50\text{ev}$ 。然而,这一結果是以分支比 $\frac{\Gamma_\eta(2\gamma)}{\Gamma_\eta(3\pi)} \approx 3.3$ 为前提而間接得到的,而这一分支比的理論值与实验矛盾(实验上发现 $\eta \rightarrow 3\pi$ 之几率最大)。因而,他們关于 $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ 与 $\eta \rightarrow 3\pi$ 的分支比的結果从邏輯上說来似乎是不可信的。

本文的結果表明,对于 η 量子数为 0^{-+} 的判定,并不象初看的那样,即 $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ 的矩陣元是 e 的数量級,而 $\eta \rightarrow 3\pi$ 的矩陣元是 e^2 的数量級,因而导致与实验的矛盾。相反,从本文的理論結果看来,可以得到与实验不矛盾的結果,从而也进一步旁証了 0^{-+} 量子数判定的合理性。

作者对戴元本同志表示深切的謝意,因为他向作者建議了这一题目,并在工作过程中給我很多帮助;对张宗燧先生的鼓励与帮助亦致以深切的謝意。

参 考 文 献

- [1] Gell-Mann, M., Sharp, D. and Wagner, W. G., *Phys. Rev. Letters*, 8 (1962), 261.
- [2] Brown, Laurie, M. and Paul Singer, *Phys. Rev. Letters*, 8 (1962), 460.
- [3] 戴元本, 中国科学, 12 (1963), 1110.
- [4] Mandelstam, S., *Phys. Rev. Letters*, 4 (1962), 84.
- [5] Wang, H. S., *Phys. Rev. Letters*, 5 (1960), 70.
- [6] Booth, Norman, E., Alexander Abashian and Crowe, Kenneth, M., *Phys. Rev. Letters*, 7 (1961), 35; Burton Richter, *Phys. Rev. Letters*, 9 (1962), 217.
- [7] 朱保如、楊震华、彭宏安, 物理学报, 20 (1964), 501.
- [8] Fowler, Earle, C., et al., *Phys. Rev. Letters*, 10 (1963), 110.

ON THE DECAY BRANCH RATIO OF THE UNSTABLE

PARTICLE $\eta: R\left(\frac{\eta \rightarrow \pi\pi\gamma}{\eta \rightarrow 3\pi}\right)$

TZU PAO-RU

(Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the branch ratio of $\eta \rightarrow \pi\pi\gamma$ and $\eta \rightarrow 3\pi$ is studied through the analytic continuation of a dispersive relation with respect to the mass of η . It is pointed out that the anomalous threshold and complex singularities are both present. Under appropriate approximation, we obtain the branch ratio $R\left(\frac{\eta \rightarrow \pi\pi\gamma}{\eta \rightarrow 3\pi}\right) \approx 0.65$, which is close to recent experimental results.