

高度奇異位勢 S 矩陣元的一个表示式*

戴 元 本

(中国科学院)

提 要

本文对滿足文献[1]的条件的高度奇異位勢证明了 S 矩陣元可以表为

$$S(\lambda, k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^{*2}}}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}} \right) e^{i\pi(\lambda - a)}.$$

在文献[1]中,对滿足

(1) $z \sim 0$ 时 $V(z) \sim z^{-n}$, $n > 2$;

(2) $V(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 解析;

(3) $\int_a^{\infty} |zV(z)| dz < \infty$, $a > 0$, 积分路綫在 $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ 內

的奇異位勢作了以下証明:

(A) Jost 函数 $f(\lambda, \pm k)$ 在全 λ 平面全純, 亦即 S 矩陣元 $S(\lambda, k)$ 在全 λ 平面半純;

(B) 当 λ 在 $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}$ 內趋于 ∞ 时, $S(\lambda, k) \rightarrow 1$.

在文献[2]中曾对这些結果作了簡短的报告. 本文中,我們根据这些結果及 S 矩陣元的对称性得到这类奇異位勢的 S 矩陣元的一个表示式.

我們先討論整函数 $f(\lambda, \pm k)$ 的阶. 設 $k > 0$, 散射方程的 Jost 解 $f(\lambda, k, z)$ 滿足积分方程

$$\begin{aligned} f(\lambda, k, z) = & \exp(-ikz) - \frac{1}{2ik} \int_z^{\infty} \{ \exp[ik(z' - z)] - \exp[ik(z - z')] \} \times \\ & \times \left[V(z') - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} \right] f(\lambda, k, z') dz'. \end{aligned} \quad (1)$$

由此可得

$$|f(\lambda, k, z)| < F(z) \exp\left(\frac{|\lambda|^2}{z}\right), \quad (2)$$

其中

$$F(z) = \exp\left\{ \int_z^{\infty} \left[|V(z')| + \frac{1}{4z'^2} \right] dz' \right\}. \quad (2')$$

* 1964 年 8 月 18 日收到.

当 $z' \rightarrow \infty$ 时,

$$F(z) \rightarrow 1. \quad (3)$$

利用文献[1]中的符号, 散射解 $\varphi(\lambda, k, z)$ 满足如下的方程:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, k, z) = & \psi_I(z) - \frac{1}{2} \int_0^z [\psi_I(z')\psi_{II}(z) - \psi_{II}(z')\psi_I(z)] \times \\ & \times \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right] \varphi(\lambda, k, z') dz', \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$V = V_s + V'.$$

当 $z \rightarrow 0$ 时,

$$|V'(z)z^{-2}| < \infty, \quad (5)$$

$$\psi_{I,II}(z) \sim z^{n/4} \exp \left[\mp \int_z^{z_0} \sqrt{V_s(z')} dz' \right]. \quad (5')$$

由此可证

$$|\varphi(\lambda, k, z)| < \Phi(z) \exp \left[|\lambda|^2 \int_0^z \frac{|\psi_I(z')\psi_{II}(z')|}{z'^2} dz' \right], \quad (6)$$

其中

$$\Phi(z) = |\psi_I(z)| \exp \left\{ \int_0^z \left(k^2 + \frac{1}{4z'^2} + |V'(z')| \right) |\psi_I(z')\psi_{II}(z')| dz' \right\}. \quad (6')$$

当 $z \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{\Phi(z)}{\psi_I(z)} \rightarrow 1. \quad (7)$$

由(1)得到

$$\begin{aligned} f'(\lambda, k, z) = & (-ik) \exp(-ikz) + \frac{1}{2} \int_z^\infty \{ \exp[ik(z' - z)] + \\ & + \exp[ik(z - z')] \} \left[V(z') - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} \right] f(\lambda, k, z') dz'. \end{aligned} \quad (8)$$

由此式及(2)式可证明, 当 $z > a$ 时,

$$|f'(\lambda, k, z)| < k + \exp\left(\frac{|\lambda|^2}{a}\right) \int_z^\infty \left[|V(z')| + \frac{|\lambda|^2 + \frac{1}{4}}{z'^2} \right] F(z') dz'. \quad (9)$$

方程(3)保证(9)式中的积分收敛。同样, 由(4)式得

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda, k, z) = & \psi'_I(z) - \frac{1}{2} \int_0^z [\psi_I(z')\psi'_{II}(z) - \psi_{II}(z')\psi'_I(z)] \times \\ & \times \left(k^2 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{z'^2} - V'(z') \right) \varphi(\lambda, k, z') dz'. \end{aligned} \quad (10)$$

由此式及(6)式可証明, 当 $z < a'$ (a' 足够小时),

$$|\varphi'(\lambda, k, z)| < \exp(B|\lambda|^2)|\psi'(z)| \left[\exp(-B|\lambda|^2) + \int_0^z \left(k^2 + \frac{|\lambda|^2 + \frac{1}{4}}{z'^2} + |V'(z')| \right) |\psi_H(z')| |\Phi(z')| dz' \right]. \quad (11)$$

(7)式保証(11)中的积分收敛. 因为

$$f(\lambda, k) = w[f(\lambda, k, z), \varphi(\lambda, k, z)],$$

由(2), (6), (9)和(11)式可得在 $|\lambda|$ 很大时,

$$|f(\lambda, k)| < c|\lambda|^2 \exp(\tau|\lambda|^2). \quad (12)$$

同样,

$$|f(\lambda, -k)| < c'|\lambda|^2 \exp(\tau'|\lambda|^2). \quad (12')$$

在高度奇异位势的情形, 由于散射解 $\varphi(\lambda, k, z)$ 的边界条件与 λ 无关, Jost 函数 $f(\lambda, \pm k)$ 是 λ 的偶函数:

$$f(\lambda, \pm k) = f(-\lambda, \pm k). \quad (13)$$

令 $w = \lambda^2$, 则由(A)及(13)知,

$$\tilde{f}(w, \pm k) \equiv f(\lambda, \pm k)$$

为 w 的整函数. 由(12), (12')知道, $\tilde{f}(w, \pm k)$ 的阶 ≤ 1 .

引入函数

$$F(w, k) = \frac{1}{S(\lambda, k)} \exp(i\pi\lambda) = \frac{\tilde{f}(w, -k)}{\tilde{f}(w, k)} \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right).$$

考虑到 $f(\lambda, k)$ 在 λ 的第一象限 $0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ 没有零点, 可知 $F(w, k)$ 在 w 的上半平面 $\operatorname{Im} w \geq 0$ 解析. 令 $m(r)$ 表示 $\tilde{f}(w, k)$ 的极小模, $r = |w|$, 则^[3]

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} m(r) e^{r(\tau+\epsilon)} = \infty. \quad (14)$$

由(12')及(14)式得

$$\alpha = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F(w)|}{r} < \tau' + \tau + \epsilon < \infty. \quad (15)$$

由广义么正条件

$$S(\lambda, k) = S^*(\lambda^*, k)^{-1} \quad (16)$$

得到当 λ 为正数时

$$|S(\lambda, k)| = 1. \quad (17)$$

由(13)可得

$$S(-\lambda, k) = S(\lambda, k) \exp(-2\pi i \lambda). \quad (18)$$

由(16)和(18)可以得到在 λ 的正虚轴上,

$$|S(i|\lambda|, k)| = \exp(-\pi|\lambda|). \quad (19)$$

因此, 由(17)和(19), 当 w 为实数时,

$$|F(w, k)| = 1. \quad (20)$$

由(B)知道,

$$F(w, k) \rightarrow \exp(i\pi\sqrt{w}), \quad 0 \leq \arg w < \pi. \quad (21)$$

由 $F(w, k)$ 在上半 w 平面 $\operatorname{Im} w \geq 0$ 的解析性及 (15) 式, 利用 Nevanlinna 定理^[3] 可知, $F(w, k)$ 满足如下的公式:

$$\log |F(w)| = \log \left| \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{w_n}}{1 - \frac{w}{w_n^*}} \right| + v\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |F(t)| dt}{(t-u)^2 + v^2} + cv, \quad (22)$$

其中 $w = u + iv$, 只要上式中的积分是收敛的, 由 (20) 式知此积分为零. 由 (21) 式知道, 在 $0 \leq \arg w < \pi$ 时,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F(w)|}{r} = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{-\pi\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 0. \quad (23)$$

由 (B) 知道, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\arg w_n \rightarrow \pi$. 因此由 Ahlfors-Heins 定理^[3], 在 $0 < \arg w < \pi$ 时,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \log \left| \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{w_n}}{1 - \frac{w}{w_n^*}} \right| \right) = 0. \quad (24)$$

由 (22), (23) 和 (24) 得到 $c = 0$. 因此有

$$F(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{w}{w_n}}{1 - \frac{w}{w_n^*}} \right) e^{i\pi a}, \quad (25)$$

即

$$S(\lambda, k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^{*2}}}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}} \right) e^{i\pi(\lambda-a)}, \quad (26)$$

其中 $0 < \arg \lambda_n < \frac{\pi}{2}$. 这就是我们求得的 $S(\lambda, k)$ 的表示式, 上式中的无穷乘积数学家称为 Blaschke 乘积.

由 (16) 及 (19) 式得到

$$|S(-i|\lambda|, k)| = \exp(\pi|\lambda|).$$

因此不可能沿虚轴进行 Watson-Sommerfeld 积分. 这个事实已为 Durso 和 Signell^[4] 注意到. 很自然会产生一个问题: 能不能沿某一条平行于虚轴的直线进行 Watson-Sommerfeld 积分? 对于 z^{-1} 排斥位势答案是否定的. 此时^[5]

$$S(\lambda, k) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{\cos \pi\beta + i(e^{-2\phi} + \sin^2 \pi\beta)^{1/2}},$$

而当 λ 在 $-\pi < \arg \left(\frac{ik}{\lambda^2} \right) < \pi$ 内趋于 ∞ 时,

$$\cos \pi\beta \rightarrow \cos \pi\lambda \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \right),$$

$$e^{-2\phi} \rightarrow e^{-4\lambda[\ln \lambda - \ln(2\sqrt{igk}) - r - 1]}.$$

因此当 $k > 0$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ 而 $\lambda_2 \rightarrow \infty$ 时,

$$|S(\lambda, k)| \rightarrow c(\lambda_1) \frac{\exp(-\pi\lambda_2)}{\lambda_2^{4\lambda_1}}.$$

这个事实与广义么正条件结合起来, 使得沿任何平行于虚轴的直线进行的 Watson-Sommerfeld 积分都是发散的. 对于一般的情形我们还没有严格的证明, 但是无穷乘积(26)在 $\arg \lambda$ 接近 $\pi/2$ 时的复杂行为使得 Watson-Sommerfeld 积分的成立成为非常可疑的.

还可以注意一个有趣的事实. 对于硬排斥心位势虽然条件(2)不满足, $S(\lambda, k)$ 也有和 z^{-4} 排斥位势相似的行为, 此时

$$S(\lambda, k) = -\frac{H_\lambda^{(2)}(ka)}{H_\lambda^{(1)}(ka)}.$$

因为当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,

$$J_\lambda(ka) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \lambda \left(1 + \ln \frac{ka}{2} \right) - \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \ln \lambda \right\},$$

我们得到当 λ 在 $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ 中趋于 ∞ 时,

$$S(\lambda, k) \rightarrow 1,$$

而当 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ 时,

$$S(\lambda, k) \rightarrow c'(\lambda_1) \frac{e^{\pi|\lambda_2|}}{|\lambda|^{2\lambda_1+1}}.$$

因此沿任何平行于虚轴的 Watson-Sommerfeld 积分都发散. 此时 $S(\lambda, k)$ 也有无穷多个极点 λ_n , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\arg \lambda_n \rightarrow \pi/2$, 而 $\operatorname{Re} \lambda_n$ 和 $\operatorname{Im} \lambda_n$ 同时趋于 ∞ [6]. 这些性质可以与 z^{-4} 排斥位势的相似性质比较 [5].

Hankel 函数有如下的表示 [6]:

$$H_\lambda^{(1)}(ka) = e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} H_0^{(1)}(ka) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right),$$

$$H_\lambda^{(2)}(ka) = e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} H_0^{(2)}(ka) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right).$$

把这两个方程结合起来就得到表示式(26).

如果对奇异位势不能进行 Watson-Sommerfeld 变换, 这将使人对现在流行的关于总散射振幅的 Regge 渐近理论产生很大怀疑, 因为排斥心的存在是物理上所期望的.

参 考 文 献

- [1] 戴元本, 物理学报, **20** (1964), 863.
- [2] Dai Yuan-ben (戴元本), *Scientia Sinica*, **12** (1963), 1395.
- [3] Boas, R. P. Jr., *Entire Functions*, N. Y., Acad., 1954, p. 276.
- [4] Durso, J. W. and Signell, P., *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 350.
- [5] 戴元本, 物理学报, **21** (1965), 263.
- [6] Magnus, W. and Kotin, L., *Numerische Mathematik*, **2** (1960), 228.

A REPRESENTATION OF THE S MATRIX ELEMENT FOR A HIGHLY SINGULAR POTENTIAL

DAI YUAN-BEN

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

It is proved that for the highly singular potential satisfying the conditions expressed in a previous paper [1] the S matrix element $S(\lambda, k)$ has the representation

$$S(\lambda, k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^{*2}}}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}} \right) e^{i\pi(\lambda-a)}.$$