

关于核子的同位旋矢量电磁结构*

曹昌祺 朱允伦† 王苏生†

(北 京 大 学 物 理 系)

提 要

本文根据 Sugawara 和 Kanazawa 所证明的一个定理和 Omnes 关于渐近行为的研究, 讨论了 $G_i(t)$ 和 $F_i(t)$ 色散关系的减出问题。比较仔细地考虑了 $F_i(t)$ 和 $F_\pi(t)$ 中远区奇异性的贡献, 所得的结果可以同时很好地符合电形式因子和磁形式因子。其中 $F_i(t)$ 并满足 Vick 从 πN 实验分析中所提出的要求。计算结果还表明, 核子的矢量总电荷和总磁矩绝大部分是由 2π 中间态贡献的, 核子的核心点电荷和点磁矩很有可能等于零。

一、引言及基本公式

关于核子的同位旋矢量电磁结构, 经过 Frazer 与 Fulco^[1] 以及随后其他一些工作者^[2-4] 的研究, 已经基本上能够解释实验结果, 但也仍然遗留下来一些问题。

核子的矢量电磁形式因子 $G_1^V(t)$ 和 $G_2^V(t)$, 从今天的实验结果看来, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 至多趋于一个有限常数, 因此根据 Sugawara 和 Kanazawa^[5] 所证明的一个定理¹⁾, 可以得出它们将满足下述形式的不减出色散关系²⁾:

$$\left. \begin{aligned} G_1^V(t) &= q_0 + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{\text{Im} G_1^V(t')}{t' - t} dt', \\ G_2^V(t) &= \mu_0 + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{\text{Im} G_2^V(t')}{t' - t} dt'; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $q_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} G_1^V(t)$, $\mu_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} G_2^V(t)$ 分别代表真正核心处的点电荷和点磁矩。 q_0 和 μ_0 的值尚不清楚, 有可能等于零³⁾。至于 $\text{Im} G_i^V(t)$, 在两 π 中间态近似下, 根据么正条件, 有

$$\text{Im} G_i^V(t) \cong -e \frac{q^3}{\sqrt{t}} F_\pi^*(t) \Gamma_i(t) \equiv g_i^V(t). \quad (2)$$

如果将多 π 贡献亦近似地用一常数表示, 则(1)式即可化为

* 1965 年 6 月 17 日收到。

† 1964 年应届毕业生。

1) 该定理内容如下:

设 $f(z)$ 除了在实轴上有两根到 ∞ 的割线和若干实极点以外, 在整个 z 平面上是解析的, $f(z)$ 在 $|z| = \infty$ 处的发散不强于一多项式。如果当 z 沿割线 1 的两侧趋于 ∞ 时, $f(z)$ 具有有限的极限 C^+ 和 C^- , 而且当 z 沿割线 2 两侧趋于 ∞ 时, $\Delta f(z)$ 有确定的极限(不一定有限), 则当 z 在上半平面沿任意方向趋于 ∞ 时, $f(z)$ 趋于同一极限 C^+ , 当 z 在下半平面沿任意方向趋于 ∞ 时, $f(z)$ 趋于同一 C^- , $f(z)$ 并满足下述不作减出的色散关系:

$$f(z) = \sum \frac{R_i}{z - x_i} + \frac{1}{\pi} \left(\int_{x_1}^\infty + \int_{-\infty}^{x_2} \right) \frac{\Delta f(x)}{x - z} dx + \frac{1}{2} (C^+ + C^-).$$

2) 在本文中, 我们取 $\hbar = c = \mu = 1$, 所用的符号基本上与文献[1]相同。

3) 某些大动量转移的实验^[6], 有迹象表明, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, 质子的电磁形式因子趋于零, 如果此结果确实, 而且中子亦有类似行为, 则 q_0 和 μ_0 即为零。

$$\left. \begin{aligned} G_1^V(t) &= q_c + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{g_1^V(t')}{t' - t} dt' = \frac{e}{2} + \frac{t}{\pi} \int_4^\infty \frac{g_1^V(t')}{t'(t' - t)} dt', \\ G_2^V(t) &= \mu_c + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{g_2^V(t')}{t' - t} dt' = \frac{1.85e}{2m} + \frac{t}{\pi} \int_4^\infty \frac{g_2^V(t')}{t'(t' - t)} dt'; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 q_c 和 μ_c 代表内层对电荷和磁矩的贡献, 它们的值由符合总电荷和总磁矩的条件来确定. 根据以上公式, 计算核子矢量电磁结构, 主要涉及的是 $N\bar{N} \rightarrow 2\pi$ 的 P 波湮没振幅 $\Gamma_i(t)$, 和 π 介子的电磁形式因子 $F_\pi(t)$.

在 Frazer 和 Fulco^[1] 的工作中, 对 $\Gamma_i(t)$ 左割线的远区贡献没有考虑, 所得的结果, 磁形式因子与实验符合较好, 而电形式因子却对左割线的截断甚灵敏. 此外, 他们还假定了 $2\pi P$ 波共振位置 (即 ρ 介子能级) 在 $t = 8-14$ 范围, 而以后实验定出的共振却在 $t = 28$ 附近. Ball 与 Wong 指出^[2], 利用 πN 的向前色散关系, 可以求出 $\Gamma_i(0)$ 和 $\Gamma'_i(0)$. 而在确定了 $\Gamma_i(t)$ 及其微商在 $t = 0$ 的值以后, 就能够较可靠地计算出 $t > 4$ 范围的 $\Gamma_i(t)$. 这时, 可通过一等效极点来适当地考虑割线远区的贡献, 极点的位置和留数即由 $\text{Re } \Gamma_i(0)$ 和 $\text{Re } \Gamma'_i(0)$ 确定. Singh 和 Udgonkar^[3] 采用了上述 Ball-Wong 的规格化方法, 并根据 Balazs^[7] 的考虑, 将远区割线用两个选定位置的极点等效代替, 他们并对 ρ 共振的位置和宽度采用了当时新从实验测出的值. 这样, 在他们的处理中, $g_i^V(t)$ 将不包含待定参量. 不过他们计算出的结果对规格化常数 $\Gamma_i(0)$ 和 $\Gamma'_i(0)$ 很灵敏, 而且当采用 Ball-Wong 给出的数值时, 结果与实验符合得不好¹⁾. 此外, 他们在积分计算中作了 δ 函数近似, 这样, 积分项的贡献化为一极点项, 极点就在共振的位置处 ($t \cong 28$), 但根据 de Vries, Hofstadter 与 Herman 最新的实验结果^[8], $G_i^V(t)$ 可唯象地表为²⁾

$$G_1^V(t) = \frac{e}{2} \left(1 - a_1 + \frac{a_1}{1 - \frac{t}{t_a}} \right), \quad G_2^V(t) = \frac{1.83e}{2m} \left(1 - a_2 + \frac{a_2}{1 - \frac{t}{t_a}} \right), \quad (4)$$

其中 $t_a = 18 \pm 2$, $a_1 = 0.92 \pm 0.10$, $a_2 = 1.10$, 也就是说, 当 $G_i^V(t)$ 用一常数和一等效极点表示时, 其中等效极点位置在 $t = 18$ 附近. 与 ρ 共振位置 $t \cong 28$ 相差甚大. 这些作者并指出, 当 t_a 取为 28 时, 要全面符合实验数值是有困难的.

Ball 与 Wong^[4] 后来又对核子电磁结构进行了研究, 并着重讨论了上述问题. 他们得出, 当不作 δ 函数近似时, $g_i^V(t)$ 中峰的位置将从 $t \cong 28$ 移到 20 附近. 在他们这一工作中, 对 $\Gamma_i(t)$ 的远区割线没有采用上述规格化方法来处理, 而是假定了单核子和 33 共振项在按 Regge 行为作了修正后, 对大的 $(-t)$ 值仍然是主要的. 由于单核子和 33 Regge 轨迹知识的缺乏, 他们引进了两个待定参数, 通过调节参数, 获得与实验符合的结果. 但我们觉得, 这种关于远区割线的假定不一定有充足的根据, 例如还可能有其他更重要的 Regge 轨迹. 此外, 在 $\Gamma_i(t)$ 中引入了两个待定参数也是令人不够满意的. 最近, Omnes^[9] 曾就相同标量粒子的散射证明, 当不变振幅具有 Regge 行为时, 分波振幅在割线上的跳跃, 当 $|t| \rightarrow \infty$ 时, 至多 $\sim t^{\alpha(0)-1}$, $\alpha(0)$ 为交叉道中最高的 Regge 轨迹在 $s = 0$ 处的值. 对

1) 他们曾根据符合实验的需要, 反过来确定 $\Gamma'_i(0)$, 所得的值亦与 Vick 最近计算出的更确切的 $\Gamma'_i(0)$ 不一致, 并落在误差范围之外.

2) 本文中的 G_i^V 与文献^[8]中 F_{iV} 的关系是 $G_1^V = \frac{e}{2} F_{1V}$, $G_2^V = \frac{1.83e}{2m} F_{2V}$.

于我们所讨论的 $N\bar{N} \rightarrow 2\pi$ 湮没振幅, 具体情况虽有所不同, 但至少可以肯定, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $\text{Im } \Gamma_i(t)$ 具有确定的极限 (包括 ∞), 另外, 从么正性条件考虑^[1], 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\Gamma_1(t) \sim \frac{1}{t}$, $\Gamma_2(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$, 因此根据上述 Sugawara-Kanazawa 定理, 可以得知, 当 t 沿任意方向趋于 ∞ 时, 都有

$$\Gamma_1(t) \sim \frac{1}{t}, \quad \Gamma_2(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}. \quad (5)$$

这样, 将 $\Gamma_i(t)$ 割线上远区的贡献用等效极点来考虑, 可能更加合理些 (参见 Balazs^[7] 的讨论).

近来, Vick^[10]研究了 ρ 共振对 πN 散射的贡献, 并附带地考虑了核子电磁结构. 在该项工作中他重新对规格化常数 $\Gamma_i(0)$ 和 $\Gamma'_i(0)$ 作了计算, 给出了比较确切的数值, 同时对左割线上重散射的贡献亦计算得比较精确. 他得出的结论是, 要同时解释 πN 和核子结构, ρ 共振的宽度不能是 ~ 120 MeV, 而只能在 50 MeV 左右, 可是他在计算电磁结构时作了 δ 函数近似, 因而所得的上述结论未必可靠. 同时, 在作了 δ 函数近似后, 当然也同 Singh 和 Udgonkar 一样, (4) 式中的等效极点位置就一定在 $t \cong 28$ 而不是 18 附近.

本文的目的, 就是在 Vick 所给出的一些比较精确的数据的基础上, 对上述问题作进一步的研究.

二、 π 介子形式因子和核子对湮没振幅

$F_\pi(t)$ 的主要部分是 ρ 介子所引起的共振峰, 可以说, 只要峰的部分能较好地确定, 整个 $F_\pi(t)$ 就大致不差了. 确定峰的要素是峰的位置、宽度和高度. 位置和宽度基本上可由实验测定的 ρ 介子质量和能级宽度来确定, 但峰的高度却没有这样确切简单的确定办法. 这种情况与 $\pi\pi$ 散射的 P 波振幅不同, 在那里峰高可以从么正条件¹⁾定出. 实际上, 在不同作者所采取的各种不同形式的 $F_\pi(t)$ 中, 峰的高度就是不一样的, 即使把峰的位置和宽度都调到相同的数值.

Frazer 与 Fulco, Ball 与 Wong, 以及 Singh 和 Udgonkar, 对 $F_\pi(t)$ 都采取下述公式:

$$F_\pi(t) = \frac{D(0)}{D(t)}, \quad (6)$$

其中 $D(t)$ 为 N/D 解法中 $\pi\pi$ 散射的 $f_{l=1}^{-1}(t)$ 振幅的 D 函数. 他们将 $N(t)$ 用一个或二个等效极点代替 (在后二工作中, 为保证 $f_l(t)$ 的阈行为, 在 $N(t)$ 中加入了一常数项), 然后用一次减出的色散关系求出了 $D(t)$ 的近似表示式.

Bowcock 等^[11]采取的是较为简单的 Breit-Wigner 公式

$$F_\pi(t) = \frac{t_r - \gamma}{t_r - t - i\gamma\nu^{3/2}}, \quad (7)$$

其中 $\nu^{3/2}$ 的割线取自 0 到 ∞ . Frazer^[12]曾认为他们由 (6) 式给出 $|F_\pi|^2$, 在 $t > 4$ 时, 约与下述形式的 Breit-Wigner 公式相当:

1) 用另外的语言来说, 在 $\pi\pi$ 散射中, 只涉及 $\pi\pi\rho$ 的耦合常数, 此常数由 ρ 介子宽度确定. 而在 F_π 中, 除了 $\pi\pi\rho$ 的耦合常数外, 还包含 $\gamma\rho$ 的耦合常数.

$$|F_{\pi}|^2 \cong \frac{t_r^2}{(t_r - t)^2 + 16T_0^2 \frac{v^3}{v+1}},$$

从而亦约与(7)式给出的 $|F_{\pi}|^2$ 相当。可是我们实际上计算两者峰值时,发现两者相差约1.7倍。又如 Ball 与 Wong 的单极点解和双极点解,与同样宽度的 Breit-Wigner 公式所给出的 $|F_{\pi}|^2$ 峰值之间,相差达二、三倍,具体数值见表1。

表 1

	B. W. 的单极点解	B. W. 的双极点解	Breit-Wigner 公式
$ F_{\pi}(t_r) ^2$	14.2	(1)10.7, (2)10.5	31.3

从色散关系的理论看来,(6)式和(7)式都不能认为是可靠的。首先,非弹性过程的贡献没有考虑,由于共振峰的位置甚高,非弹性过程对 F_{π} 绝对值的贡献未必能忽略。其次,即使非弹性过程可以完全忽略,由于渐近行为不清楚, $F_{\pi}(t)$ 与 $D(0)/D(t)$ 或 Omnes 解

$$F_0(t) = e^{\frac{t}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\delta(t')}{t'(t'-t)} dt'} \quad (8)$$

之间,仍可能差一个整函数的因子^[12];此外在 D 的色散关系中还存在减出次数的问题等。

我们认为,在共振区中,将 $F_{\pi}(t)$ 近似表为

$$F_{\pi}(t) = \frac{A}{t_r - t - i\gamma v^{3/2}} \quad (9)$$

还是可以的,它在此区中具有近似正确的位相¹⁾,并给出与 ρ 振幅相近的峰的位置和宽度。但是,若将其中常数 A 通过规格化条件

$$F_{\pi}(0) = 1 \quad (10)$$

来确定,象(7)式那样,就不正确了。因为 t_r 离 $t=0$ 甚远,而(9)式只在共振区适用。这样, $|F_{\pi}|^2$ 中峰的高度将是未知的,正如前面所指出的一样。

虽然实际所需要的只是 $t > 4$ 的 $F_{\pi}(t)$,但保持规格化条件(10)式仍然是方便的。为此,我们将 A 看作 t 的缓变函数。如果再简单地将 $A(t)$ 取作一线性形式 $a\left(1 - \frac{t}{R}\right)$ [其中 a 可由(10)式定出],则即得 Vick 的结果

$$F_{\pi}(t) = \frac{t_r - \gamma}{t_r - t - i\gamma v^{3/2}} \left(1 - \frac{t}{R}\right), \quad (11)$$

式中 R 将决定峰的高度, R 的值应落在我们所考虑的物理区之外。估计 $v^{3/2} \cot \delta$ 在共振区以下直到阈值仍然接近于一直线,因而(11)式可以一直用到 $t=4$ 的地方(在共振区以外, $|F_{\pi}|^2$ 甚小,即使有一些误差,也影响不大)。

关于 $F_{\pi}(t)$ 或者说关于 $A(t)$ 的更好的表达式,可以从 Omnes 解(8)式得到。将相移

$$v^{3/2} \cot \delta = \frac{1}{\gamma} (t_r - t) \quad (12)$$

1) 即满足 $v^{3/2} \cot \delta = \frac{1}{\gamma} (t_r - t)$ 。

代入(8)式后,可求得¹⁾

$$F_0(t) = \frac{t_r - \gamma}{t_r - t - i\gamma\nu^{3/2}} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \quad (13)$$

其中 τ 为方程 $t_r - t - i\gamma\nu^{3/2} = 0$ 的实根($\tau < 0$). 考虑到 1) 实际上(12)式只在从 $t = 4$ 到共振区的范围内才是好的近似, 当 t 大于某个 t'_0 时, 该相移需要加上一个修正 $\Delta\delta(t)$; 2) 当 t 大于另外某个 t'_0 时, 么正条件中多 π 中间态的项开始重要了, 因而 F_π 不再具有 $\pi\pi$ 散射的位相, 我们将 $F_\pi(t)$ 写成为(13)式所确定的 $F_0(t)$ 与某个函数 $\beta(t)$ 的乘积, 得出

$$\beta(t) = \frac{F_\pi(t)}{F_0(t)} \quad (14)$$

具有从 t_0 到 $+\infty$ 的割线, 其中 t_0 为 t'_0 和 t''_0 中的较小者. 由于 $F_0(t)$ 没有零点, $\beta(t)$ 不再有其他奇点(极点). 此外它还满足规格化条件

$$\beta(0) = 1. \quad (15)$$

我们称 $\beta(t)$ 为高能修正, 它既包含多 π 中间态的影响, 也包含高能相移偏离(12)式所引起的修正, 甚至包含前面所提到的不定的整函数因子. 例如当只考虑上述第二个因素时, $\beta(t)$ 可表为

$$\beta(t) = e^{i\pi \int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta\delta(t')}{t'(t'-t)} dt'}. \quad (16)$$

一般情况, $\beta(t)$ 应满足一次减出的色散系:

$$\beta(t) = 1 + \frac{t}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\text{Im} \beta(t')}{t'(t'-t)} dt', \quad (17)$$

因为参照核子电磁形式因子的行为, 可以合理地假定 $F_\pi(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时至多趋于一有限常数, 于是得 $\beta(t)$ 至多 $\sim t^{1/2}$.

如果将(17)式中的积分用一个选定位置的极点来近似, 将

$$\beta(t) = 1 + \frac{\alpha t}{t - t_p} \quad (18)$$

代入(14)式, 就可得到低能区的 F_π 近似表达式

$$F_\pi(t) = \frac{t_r - \gamma}{t_r - t - i\gamma\nu^{3/2}} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \left(1 + \frac{\alpha t}{t - t_p}\right); \quad (19)$$

此式不包含“多余”的极点 τ , 在 $\beta(t)$ 的近似上亦要比(11)式更好一些.

下面, 再对 $\Gamma_i(t)$ 作简单的讨论. $\Gamma_i(t)$ 的左割线的近区部分, 可以通过交叉对称性从 πN 的低能散射实验数据计算出. 在右割线弹性物理区, 根据么正条件, $\Gamma_i(t)$ 应该具有 $\pi\pi$ 散射的位相, 因此只要找一个函数 $H(t)$ 满足 1) 在自 $4 \rightarrow +\infty$ 割开的平面中解析, 2) $H^*(t) = H(t^*)$, 3) 在右割线近区亦具有 $\pi\pi$ 散射的位相, 则在“ $\Gamma_i(t)$ 与 $H(t)$ 的比”中, 右割线的近区部分将被消去. (13)式所确定的 $F_0(t)$ 或(11)式所确定 $F_\pi(t)$ 都满足这种要

1) 要证明在 δ 由(12)式给定时, (8)式与(13)式恒等, 最简单的方法是从解析性和渐近行为考虑. 显然, 两者都在从 $t = 0$ 到 $t = +\infty$ 割开的平面中正规解析, 且都无零点. 另外, 不难求出, 当 δ 的极限是某个常数 δ_0 时, (8)式的渐近行为是 $\sim t^{-\frac{\delta_0}{\pi}}$, 而(12)式给出的 δ_0 为 $\frac{\pi}{2}$, 于是(8)式与(13)式渐近行为亦相同, 再加上 $t = 0$ 时都等于 1, 故两者必定恒等.

求。另外, 它们的渐近行为都是 $\sim \frac{1}{t^{1/2}}$, 再根据 $\Gamma_i(t)$ 的渐近行为(5)式, 若令

$$J_i(t) = \frac{\Gamma_i(t)}{F(t)}, \quad (20)$$

其中 $F(t)$ 代表上述 $F_0(t)$ 或(11)式所定义的 $F_\pi(t)$, 则得

$$J_1(t) \sim \frac{1}{t^{1/2}}, \quad J_2(t) \sim \frac{1}{t}. \quad (21)$$

因而 $J_i(t)$ 满足不减出的色散关系:

$$J_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^a \frac{\text{Im } \Gamma_i(t')}{F(t')(t' - t)} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{t_l}^{\infty} \frac{\text{Im } J_i(t')}{t' - t} dt',$$

$$a = 4 \left(1 - \frac{1}{4m^2} \right),$$

由此

$$\Gamma_i(t) = \frac{1}{\pi} F(t) \left[\int_{-\infty}^a \frac{\text{Im } \Gamma_i(t')}{F(t')(t' - t)} dt' + \int_{t_l}^{\infty} \frac{\text{Im } J_i(t')}{t' - t} dt' \right]. \quad (22)$$

我们将上式中左割线远区(自 $-\infty$ 到某个 $-T$, $T \lesssim 26$) 的贡献同右割线的贡献合在一起用等效极点来近似¹⁾, 近似的方案可以有下列几种:

(i) 用一个位置可变的等效极点来代替, 如 Vick 所作的那样, 这时

$$\Gamma_i(t) = \frac{1}{\pi} F(t) \left[\int_{-T}^a \frac{\text{Im } \Gamma_i(t')}{F(t')(t' - t)} dt' + \frac{r_i}{t - t_i} \right]. \quad (23)$$

(ii) 用一个常数及一个位置选定的极点来代替。这相当于先对 $J_i(t)$ 作一次减出, 然后将远区割线用一位置选定的极点来代替

$$\begin{aligned} \Gamma_i(t) &= F(t) \left[C_i + \frac{t}{\pi} \left(\int_{-T}^a \frac{\text{Im } \Gamma_i(t')}{F(t')(t' - t)} dt' + \frac{r_i}{t - t_i} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} F(t) \left[\int_{-T}^a \frac{\text{Im } \Gamma_i(t')}{F(t')(t' - t)} dt' + c_i + \frac{r_i}{t - t_i} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

(iii) 按照 Balazs 的方案, 用两个位置选定的等效极点来代替。当 $F(t)$ 取作(11)式的 $F_\pi(t)$ 时, 等效极点之一可以选在 $t = R$ 处。如果将一个极点选在 ∞ , 它就化为上一方案的结果

$$\Gamma_i(t) = \frac{1}{\pi} F(t) \left[\int_{-T}^a \frac{\text{Im } \Gamma_i(t')}{F(t')(t' - t)} dt' + \frac{r'_i}{t - t'_i} + \frac{r''_i}{t - t''_i} \right]. \quad (25)$$

在上述三个方案中, 都包含两个待定参数, 它们可由 Ball-Wong 的规格化常数 $\text{Re } \Gamma_i(0)$ 和 $\text{Re } \Gamma'_i(0)$ 确定。用上述方法求出的 $\Gamma_i(t)$, 在左割线上 $-T$ 到 a 段具有正确的跳跃, 在右割线上 4 到 t_l 段具有 $\pi\pi$ 散射的位相, 并且在 $t = 0$ 处具有正确的值和一次微商值, 因此在较低能量应该还是比较可靠的。遗憾的是共振峰离 $t = 0$ 较远, 在峰区由于割线远区的等效处理所引起的误差可能不小。上述三种方案结果间的差异, 可作为割线远区近似处理

1) 当 $F(t)$ 选作(11)式的 F_π 时, 在 $t = R$ 处, $J_i(t)$ 有一极点。此极点位于远区 (R 约在 40 以上), 它的贡献亦包含在等效极点中。若以后定出的 R 离共振区不太远, 则 $F(t)$ 取作(11)式 $F_\pi(t)$ 将不如取作 $F_0(t)$ 好。

的不确定性的一种度量¹⁾.

三、結果和討論

在我们的数值计算中, πN 重散射对 $\Gamma_i(t)$ 左割线上跳跃的贡献以及 Ball-Wong 规格化常数都取用的是 Vick 所给出的较精确的值. πN 耦合常数 f^2 取为 0.081.

ρ 共振的宽度,一般给出的是 $\Gamma \cong 120 \text{ MeV}$, 相应的 $\gamma \cong 0.31$, 但近来 Caldwell 等的实验^[13]给出较窄的宽度 $\Gamma \lesssim 50 \text{ MeV}$, 相应的 $\gamma \lesssim 0.13$. 在 Caldwell 等的实验中,产生的 ρ 介子具有很高的能量 (10—15 GeV), 它在衰变以前平均走了 10^{-11} 厘米的距离,从而显著地消除了末态相互作用的影响,所得的结果应该是较为可靠的. 另外, Stonchill 与 Kraybill^[14]以及 Button^[15]等的实验也支持较窄宽度的结论. 不过,现在也还不能排除 $\gamma = 0.31$ 的可能性.

为了同 Vick 的结果相比较,我们先取 π 介子形式因子以及(20)中的 $F(t)$ 为(11)的形式,即

$$F_{\pi}(t) = F(t) = \frac{t_r - \gamma}{t_r - t - i\gamma\nu^{3/2}} \left(1 - \frac{t}{R}\right), \quad (26)$$

远区奇异性亦用第一种方案来处理. 这时在 $g_i^V(t)$ 和 $\Gamma_i(t)$ 中只含一个待定参数 R , 而且这个参数还从“符合 πN 散射实验”的要求,大致限制在 40—60 的范围内. Vick 根据 δ 函数近似所选定的参数是 $R = 49$, $\gamma = 0.13$, 我们取这组参数用数值积分对核子结构进行了计算,所得结果与实验符合不好,如图 1、2 中曲线 D 所示. 为了符合电形式因子,我们得出,在 $\gamma = 0.13$ 时, R 需调节到 43, 计算结果见图 1 曲线 A ²⁾. 再用这一参数去计算磁形式因子,亦得出较好的结果(图 2 曲线 A). 新的 $J_i(t)$ 与 Vick 给出的值十分相近,相差在 1% 以内.

Vick 曾认为较大的宽度 ($\gamma \cong 0.31$) 不能同时符合核子结构和 πN 散射,因核子结构要求 $R = \infty$, 与 πN 散射的要求 (R 在 40—60 间)相矛盾. 不过,由于他处理核子结构时用了较粗糙的 δ 函数近似,所以结论未必可靠. 当我们真正去作数值积分时,发现 $R = \infty$, $\gamma = 0.31$ 所给出的电形式因子与实验相差很大(见图 1 曲线 E),但是若将 R 调到 67³⁾, 则不仅电形式因子而且磁形式因子都与实验⁴⁾ 符合得甚好. 而 R 的取值亦大致符合 πN 散射的要求. 因此从核子结构和 πN 散射亦尚不能排除 $\Gamma \cong 120 \text{ MeV}$ 的可能性.

为了估计对远区奇异性近似处理所引起的不确定性,我们亦按第二和第三方案进行了计算. 对于 $\gamma = 0.13$ 的情况,若保持 R 和 T 不变,在第二种方案,当极点 $t_1 = -25$ 时, $J_1(t_r)$ 值变到 -0.087 (原来为 -0.094),而在第三种方案,当 $t_1' = -25$, $t_1'' = R$ 时, $J_1(t_r)$ 变到 -0.063 ,后者减少了 30% 左右,表明远区的近似处理,仍有相当的不确定性.

1) 当然,也可以将 $H(t)$ 取作(7)式所定义的函数,但这时,相应的 $J_1(t) \sim t^{1/2}$, $J_2(t) \sim 1$, 因而对 $J_i(t)$ 需用一次减出的色散关系,在总共只有二个待定参数的限制下,减出后远区割线只能用一个位置选定的等效极点来代替. 这时所得的结果将与(24)式在 $F(t)$ 取作(11)式的 $F_{\pi}(t)$ 而且等效极点之一选在 R 处时的结果相同.

2) 左截断仍取在 $T = -20$, 这时等效极点位置 $t_1 = -19.8$.

3) 当 $R = 67$, $\gamma = 0.31$ 时,估计 $J_i(t)$ 与原来的相差亦只在 1% 左右,因而计算 $g_i^V(t)$ 时,对 $J_i(t)$ 就直接利用了原来的结果.

4) 我们认为,文献[8]将 F_{1n} 的“实验点”用一个略渐平的曲线来表示是未必适宜的,因此本文中对(4)式的参数 a_1 作了少许调整,将 a_1 的值取为 0.98,此值相应于 $F_{1n} \cong 0$.

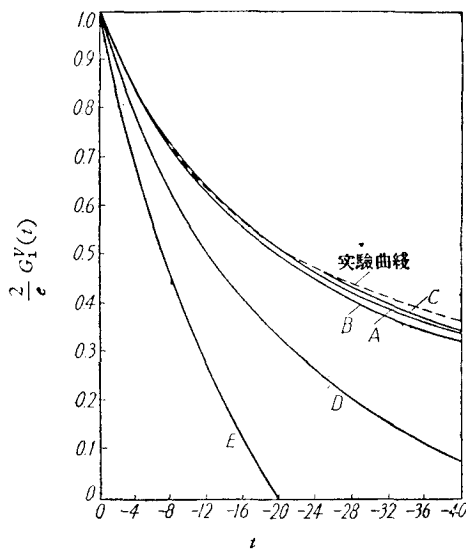


图 1

—— 实验唯象公式(4) $\begin{cases} t_a = 18 \\ a_1 = 0.98 \end{cases}$

A: $\gamma = 0.13$, $R = 43$; B: $\gamma = 0.31$, $R = 67$;
C: $\gamma = 0.13$, $\alpha = 0.84$; D: $\gamma = 0.13$, $R = 49$;
E: $\gamma = 0.31$, $R = \infty$.

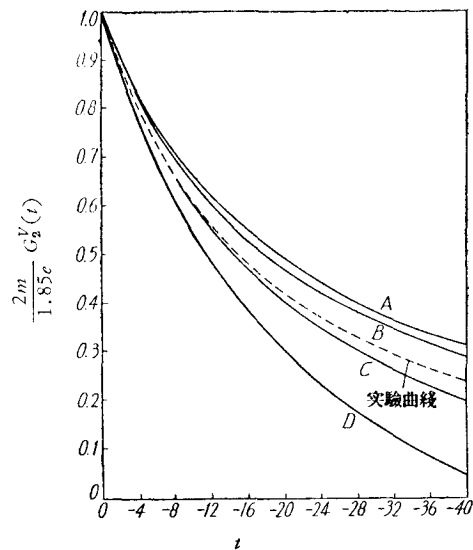


图 2

—— 实验唯象公式(4) $\begin{cases} t_a = 18 \\ a_2 = 1.10 \end{cases}$

A: $\gamma = 0.13$, $R = 43$; B: $\gamma = 0.31$, $R = 67$;
C: $\gamma = 0.13$, $\alpha = 0.84$; D: $\gamma = 0.13$, $R = 49$.

如前所述, $F(t)$ 更好的选择可能是 $F_0(t)$, 对于 $\gamma = 0.13$ 的情况, $F_0(t)$ 中的 $\tau = -3.83 \times 10^3$. 当远区贡献用第一种方案处理时, 在用了 Ball-Wong 规格化条件后, $F_i(t)$ 中将不含待定参量. 在第二和第三种方案的情况下, 若极点位置选定, $F_i(t)$ 亦将不含待定参数, 可是实际上由于共振区位置较高, 不同的方案以及同一方案中极点位置的选择对 $J_i(t_r)$ 的影响仍较大, 关于 J_1 的结果如表 2 所示.

表 2

	方 案 1 (t_1 定出为 -7.44)	方 案 2			方 案 3			
		$t_1 = -15$	$t_1 = -18$	$t_1 = -25$	$t'_1 = -25$ $t'_2 = -60$	$t'_1 = -25$ $t'_2 = -100$	$t'_1 = -17$ $t'_2 = 300$	$t'_1 = -17$ $t'_2 = 100$
$J_1(t_r)$	-0.0539	-0.0487	-0.0406	-0.0253	-0.0454	-0.0390	-0.0390	-0.0275

根据 Vick 的工作, 为符合 πN 实验, 这里的 $J_1(t_r)$ 应在 -0.028 到 -0.05 的范围内 [在 $J_2(t_r) \approx \frac{1.85}{m} J_1(t_r)$ 的条件下], 而最佳取值约为 -0.04 左右. 表 2 给出的数值大致与此范围相合, 而最佳取值对应于其中第 3、6、7 的情况¹⁾. 对这三种情况的 $J_1(t)$ 进行计算的结果, 发现它们在整个所需要的范围 (即 $t = 4$ 到 35) 都很接近, 后二者相差一般在 2% 以内, 前二者相差一般在 5% 以内²⁾. 由此可见, 单从 Ball-Wong 常数尚不能很好地决

1) 在这三种情况, $\frac{mJ_2(t_r)}{1.85J_1(t_r)}$ 的值分别为 1.14, 1.23, 1.13, 都能满足上述条件的要求.

2) 只在个别不太重要的区段, 相差超过这些数值, 在上述整个范围, 前二者最大相差约为 12%, 后二者约为 7%.

定 $\Gamma_1(t)$, 但若能从 πN 实验补充得到 $\Gamma_1(t_r)$ 的知识, 则整个 $\Gamma_1(t)$ 将很精确地被确定.

对于 $F_*(t)$, 我们亦选用了较好的 (19) 的形式, 并将其中 t_p 选为 60. 由于 $|\tau|$ 很大, 因而若 $t_p \rightarrow \infty$, 则 (19) 式即化为 (11) 式, 从 $\beta(t)$ 渐近行为来看, t_p 取一个较大的有限值, 总要比 ∞ 更合理些.

为了符合电形式因子, 我们选择 $\alpha = 0.84$, 所得结果如图 1 曲线 C 所示, $J_1(t)$ 用的是双极点方案 ($t'_1 = -25, t'_2 = -100$) 的值. 再用同样的双极点位置和 α 值去计算磁形式因子, 结果亦符合得很好 (图 2 曲线 C), 比曲线 A 更有所改进.

最后, 我们再对下述几个问题作一些讨论.

1. 关于远区奇异性贡献的重要性问题.

我们的结果表明, 远区贡献是重要的, 特别对于电形式因子. 具体情况是: 在曲线 A 的情况, $J_1(t_r) = -0.0943$, $J_2(t_r) = -0.0262$, 其中近区贡献 (-20 到 a 的积分) 分别为 -0.0544 和 -0.0206 , 远区贡献分别为 -0.0399 和 -0.0056 . 在曲线 C 情况, $J_1(t_r) = -0.0390$, $J_2(t_r) = -0.0133$, 而近区贡献分别为 -0.0645 和 -0.0221 , 远区贡献分别为 0.0255 和 0.0088 , 由于两者符号相反, 故在这里远区贡献更为重要.

2. 关于结果对 Ball-Wong 参数的灵敏度问题. 在曲线 A 的情况, $J_1(t_r)$ 对参数的依赖并不很灵敏, 例如当 R 和 $\text{Re } \Gamma_1(0)$ 不变, $\text{Re } \Gamma'_1(0)$ 由 0.0404 变到 0.0414 时¹⁾, 若不改变左截断 ($-T$), 则 $J_1(t_r)$ 改变 4.4% , 若调节 ($-T$) 使仍与等效极点位置相同^[10], 则 $J_1(t_r)$ 只改变 2.6% . $J_2(t_r)$ 在 $\text{Re } \Gamma'_2(0)$ 由 -0.00557 改变到 -0.00584 时, 即使 ($-T$) 不调节, 亦只改变 7% .

在曲线 C 的情况, $J_i(t_r)$ 随 $\text{Re } \Gamma'_i(0)$ 变化比较灵敏, 改变约在 25% 左右, 这进一步表明 $|\Gamma_i(t_r)|$ 的知识在这里的重要性.

3. 关于 2π 中间态的贡献问题.

我们计算了 2π 中间态对总(矢量)电荷和总(矢量)磁矩的贡献, 结果列于表 3.

表 3

	曲线 A 的情况	曲线 B 的情况	曲线 C 的情况
2π 对总电荷的贡献	$1.05\left(\frac{e}{2}\right)$	1.07	1.03
2π 对总磁矩的贡献	$1.09\left(\frac{1.85e}{2m}\right)$	1.11	1.07

由此可见, 内层对总电荷和总磁矩的贡献是很小的, 只占百分之几. 这也表明若在 (3) 式中略去 q_c 和 μ_c 而只考虑 2π 的贡献, 所得的 $G_i^V(t)$ 与实验亦只有百分之几的相差. 内层贡献的不重要, 意味着很有可能 (1) 式中的 q_0 和 μ_0 等于零, 即核子并不具有核心点电荷和

1) Vick 所给出的 Ball-Wong 参数如下:

	$\text{Re } \Gamma_1(0)$	$\text{Re } \Gamma_2(0)$	$\text{Re } \Gamma'_1(0)$	$\text{Re } \Gamma'_2(0)$
未作减出的结果	-0.141 ± 0.004	0.0087 ± 0.0015	0.0407 ± 0.0010	-0.00584 ± 0.00015
作减出的结果	-0.142 ± 0.003	0.0093 ± 0.0015	0.0402 ± 0.0013	-0.00582 ± 0.00025

点磁矩. 这一点是很有趣的, 若真是如此, 核子将不能被看作为“基本粒子”.

从我们计算的 $G_i^V(t)$ 与唯象公式(4)符合得甚好, 还可以得出 2π 的贡献不是等效于一个位于 28 的极点项, 而是约相当于一个常数加上一个较近极点的贡献, 即

$$\frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{g_1^V(t')}{t' - t} dt' \cong \frac{e}{2} \left(1 - a_1 + \frac{a_1}{1 - \frac{t}{t_a}} \right) - q_c,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{g_2^V(t')}{t' - t} dt' \cong \frac{1.85}{2m} \left(1 - a_2 + \frac{a_2}{1 - \frac{t}{t_a}} \right) - \mu_c,$$

其中 $t_a \approx 18$; 用静电学的比喻来说, 相当于把一个分布在 $t = 28$ 附近的线电荷所产生的势, 用两个分别位于 18 和 ∞ 的点电荷的势来代替. 由此可见, 唯象公式(4)中的 t_a 既不是 ρ 介子的共振位置也不就是 $g_i^V(t)$ 峰的位置 (如 Ball 与 Wong 所认为的), 实际上, 在 $\gamma = 0.13$ 的情况, $g_i^V(t)$ 的峰也不可能由 $t_r = 28$ 移到 18 附近.

附记 在本文送出后, 我们看见了 de Vries 等一篇新的文章^[16], 它给出最近的实验结果, 其中除了 F_{1n} 外, 其他变化很小. 在文献[8]中, F_{1n} 略渐负, 而新的 F_{1n} 为零或略渐正, 由于我们已对文献[8]中的参数 a_1 作了调整, 因而同新结果是比较相符的.

参 考 文 献

- [1] Frazer and Fulco, *Phys. Rev.*, **117** (1960), 1609.
- [2] Ball and Wong, *Phys. Rev. Letters*, **6** (1961), 29.
- [3] Singh and Udgonkar, *Phys. Rev.*, **128** (1962), 1820.
- [4] Ball and Wong, *Phys. Rev.*, **130** (1963), 2112.
- [5] Sugawara and Kanazawa, *Phys. Rev.*, **123** (1961), 1895.
- [6] Chen, Cone, Dunning, Frank, Ramsey, Walker, and Wilson, *Phys. Rev. Letters*, **11** (1963), 561.
- [7] Balazs, *Phys. Rev.*, **125** (1962), 2179.
- [8] de Vries, Hofstadter and Herman, *Phys. Rev. Letters*, **8** (1962), 381.
- [9] Omnes, *Phys. Rev.*, **133** (1964), B1543.
- [10] Vick, *Nuovo Cimento*, **31** (1964), 643.
- [11] Bowcock, Cottingham and Lurie, *Nuovo Cimento*, **16** (1960), 918.
- [12] Frazer, 讲演稿, 见 *Dispersion Relation*, 227. (Screaton 主编)
- [13] Caldwell, Bleuler, Elsner, Jones and Zacharov, *Phys. Letters*, **2** (1962), 253.
- [14] Stonehill and Kraybill, *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 503.
- [15] Button, Kalbfleisch, Lunch, Maglić, Rosenfeld and Stevenson, *Phys. Rev.*, **126** (1962), 1858.
- [16] de Vries, Hofstadter, Johansson, and Herman, *Phys. Rev.*, **134** (1964), B848.

ON THE ISOTOPIC VECTOR ELECTRIC AND MAGNETIC FORM FACTORS OF THE NUCLEONS

TSAO CHANG-CHIE TSU YUNG-LON WANG SU-SEN

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

In reference to a theorem proved by Sugawara and Kanazawa together with recent studies of asymptotic behaviour by Omnes, the subtraction in the dispersion relations of $G_i(t)$ and $\Gamma_i(t)$ is discussed. The contributions to the $\Gamma_i(t)$ and $F_\pi(t)$ by the "far away" singularities are accounted for more carefully; the results so obtained seem to agree pretty well with both the electric and magnetic isotopic vector form factors; the $\Gamma_i(t)$ satisfies the requirement proposed by Vick from the analysis of π -N scattering data. Our calculation also shows that the total isotopic vector charge and magnetic moment are mainly due to the 2π intermediate state contribution; it is very probable that there exist no core point charge and magnetic moment at all.