

SU_4 羣与基本粒子的对称性*

叶 茂 生

(复旦大学)

提 要

从李羣的一般理论,具体地讨论了 SU_4 的数学处理,给出了羣的代数结构、不可约表示维数的公式、三个基本表示的明显形式及表示直积分解的主要结果。根据 SU_4 对称,下列基本粒子的对称模型被构成:(1) Bacry 和 Van Hove 模型,(2) Schwinger 模型,(3)正反粒子对称的坂田模型,(4)正反粒子对称的八度法模型。在这些模型中,一些与实验一致的新的结果被得到。

一、引 言

基本粒子对称理论的研究,近年来获得了巨大的进展。最初坂田提出了“组合粒子模型”^[1],把所有的粒子归结为三个最基本的粒子: p, n, Λ 。随后在文献[2]中建立了所谓“ $I-O-O$ ”对称性,么正对称概念也就被明确地引入。后来 Gell-Mann 与 Ne'man^[3]各自独立地建立了“八度法”模型,Okubo^[4]一般地证明了质量谱分离公式,则在强相互作用粒子间存在根据“八度法”建立的 SU_3 对称性,便得到了进一步的确认。

但是,如 SU_3 对称并不严重地被破坏,则理论将预言存在由重子与介子构成的新的超重态: $1, 8, 8', 10, 10^*, 27$, 而其中除 $1, 8, 10$ 等多重态外,其他均未被实验很好地发现。

如今除 Gell-Mann^[5]与 Zweig 提出存在分数电荷粒子来解决上述矛盾外,在文献[6]中也提出了以三秩李群对称性解决上述问题的可能性。为了描写这种新的对称性, Bacry 等人使用了 C_3 群。

此外,在原来的 SU_3 对称理论中,重子数是以外加的因素附加其上的,正如在文献[7]中所指出的,这不能不是现有对称理论的一种缺陷。可以指出,这时介子与重子的反粒子是以不平等地位出现在对称图象之中的。

由于这些因素的启示,我们认为有必要以三秩李群去研究基本粒子的对称性,以求改进原有理论不足之处与探求可能获得的新结果。在三秩李群中能引起我们最大兴趣的自然是 SU_4 群,故本文我们将专致力于该群及与之有关的对称性的研究。

二、 SU_4 羣的数学处理

1. SU_4 羣代数的确定

三秩么正么模群 SU_4 , 其代数的独立元素个数为 15, 代数基底的选择,常可使它们满

* 1964年8月3日收到;1964年10月18日收到第一次修改稿;1965年2月24日收到第二次修改稿;1965年8月31日收到第三次修改稿。

足下列标准的对易关系:

$$\left. \begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ [H_i, E_\alpha] &= r_i(\alpha) E_\alpha, \quad \alpha = \pm 1 \cdots \pm 6, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= r_i(\alpha) H_i, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha\beta} E_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由李群的基本理论^[9,10], 我们可求得所有根矢量 $\mathbf{r}(\alpha)$ 与构造常数 $N_{\alpha\beta}$.

根矢量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(1) &= \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} \right), \quad \mathbf{r}(2) = \left(0, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \right), \\ \mathbf{r}(3) &= \left(0, \quad \frac{1}{2}, \quad 0 \right), \quad \mathbf{r}(4) = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \right), \\ \mathbf{r}(5) &= \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \right), \quad \mathbf{r}(6) = \left(0, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

及

$$\mathbf{r}(-\alpha) = -\mathbf{r}(\alpha). \quad (3)$$

其中 $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(2)$ 与 $\mathbf{r}(3)$ 为 SU_4 群之素根系.

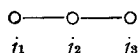
非零构造常数

$$\left. \begin{aligned} N_{12} &= -N_{21} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \quad -N_{-1,-2} = N_{2,-5} = N_{-5,1} = N_{5,-2} = N_{-1,5} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \\ N_{16} &= -N_{61} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \quad -N_{-1,-6} = N_{6,-4} = N_{-4,1} = N_{4,-6} = N_{-1,4} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \\ N_{23} &= -N_{32} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \quad -N_{-2,-3} = N_{3,-6} = N_{-6,2} = N_{6,-3} = N_{-2,6} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \\ N_{35} &= -N_{53} = \sqrt{\frac{1}{8}}; \quad -N_{-3,-5} = N_{5,-4} = N_{-4,3} = N_{4,-5} = N_{-3,4} = \sqrt{\frac{1}{8}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将(2), (3)与(4)式代入(1), 则我们完全确定了 SU_4 群的代数结构.

2. 不可约表示之维数

由李群表示理论知, SU_4 群之所有不可约表示系与下列的邓金 (Дынкин) 图对应:



其中 j_i 是非负的整数或半整数.

以 d 记不可约表示 $(j_1 j_2 j_3)$ 之维数, 则具体计算表明

$$\begin{aligned} d &= (1 + 2j_1)(1 + 2j_2)(1 + 2j_3)(1 + j_1 + j_2)(1 + j_2 + j_3) \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{2}{3}(j_1 + j_2 + j_3) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

与下列邓金图对应的不可约表示之维数是:

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \\ \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \end{array} & d = 4 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \\ \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \end{array} & d = 6 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \\ \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \end{array} & d = 4 \\ \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \end{array} & d = 10 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \end{array} & d = 20 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \end{array} & d = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} & d = 20 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} & d = 15 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} & d = 20 \\
 \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \quad 1 \end{array} & d = 45 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \quad \frac{1}{2} \end{array} & d = 60 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \quad \frac{1}{2} \end{array} & d = 45 \\
 \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{3}{2} \end{array} & d = 50 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} & d = 64 & \begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc \\ 1 \quad 1 \end{array} & d = 84
 \end{array}$$

3. 基本表示的导出

SU_4 群存在三个基本表示 (basic representations): $D^4\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $D^6\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ 与 $D^4\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. 以 A_1 、 A_2 与 A_3 分别表示它们的最高权, 则由关系

$$\frac{A \cdot r(\alpha)}{|r(\alpha)|^2} = j_\alpha, \alpha = 1, 2, 3, \quad (6)$$

我们有

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{4} r(1) + \frac{1}{2} r(2) + \frac{1}{4} r(3) = \left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, 0\right), \\ A_2 &= \frac{1}{2} r(1) + r(2) + \frac{1}{2} r(3) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\right), \\ A_3 &= \frac{1}{4} r(1) + \frac{1}{2} r(2) + \frac{3}{4} r(3) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

若以 W 表示给定不可约表示所有权之集合, 则

$$W = \Delta^0 U \Delta^1 U \Delta^2 \cdots,$$

其中零级权 Δ^0 即为最高权, 其他 k 级权 Δ^k 系由最高权减去 k 个素根而获得. 以 W_1 , W_2 与 W_3 分别表示三个基本表示所有权的集合, 则它们可具体分解如下:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} A_1 \\ | \\ A_1 - r(1) \\ | \\ A_1 - r(1) - r(2) \\ | \\ A_1 - r(1) - r(2) - r(3) \end{array} & \begin{array}{c} A_2 \\ | \\ A_2 - r(2) \\ | \\ A_2 - r(2) - r(3) \quad A_2 - r(2) - r(1) \\ \diagup \quad \diagdown \\ A_2 - r(1) - r(2) - r(3) \\ | \\ A_2 - r(1) - r(3) - 2r(2) \end{array} & \begin{array}{c} A_3 \\ | \\ A_3 - r(3) \\ | \\ A_3 - r(3) - r(2) \\ | \\ A_3 - r(3) - r(2) - r(1) \end{array} \\
 \text{权集合 } W_1 & \text{权集合 } W_2 & \text{权集合 } W_3
 \end{array}$$

由此我们易写出这些基本表示无限小算子之矩阵形式. 对 $D^4\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, 对易算符 H_1 , H_2 与 H_3 可表为

$$H_1 = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & & -2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

对 $D^6\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ 有

$$H_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \\ & & & & -1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

对 $D^4\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 有关系

$$H_i\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = -H_i\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

利用标准的方法^[9],也可求得非对易算子的具体形式. 例如对表示 $D^4\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, 我们有

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_6 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$E_{-a} = (E_a)^+, \quad a = 1, 2, \dots, 6.$$

为简单起见,对基本表示 $D^4\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ 与 $D^6\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, 此处便不一一列出这些算子的具体形式.

4. SU_4 群表示直积之分解

以 (i_1, i_2, i_3) 与 (i'_1, i'_2, i'_3) 分别表示 SU_4 群之二个不可约表示, 则它们的直积可约化成不可约表示之直和

$$(i_1 i_2 i_3) \times (i'_1 i'_2 i'_3) = \sum_{(J_1 J_2 J_3)} \nu(J_1 J_2 J_3) (J_1 J_2 J_3), \quad (12)$$

其中 $\nu(J_1 J_2 J_3)$ 代表不可约表示 $(J_1 J_2 J_3)$ 出现之重数.

以下我们仅写出几个主要的约化结果, 它们对以后的应用将是重要的:

$$\left. \begin{aligned} 4 \times 4^* &= 1 + 15, \\ 4 \times 4 &= 6 + 10, \\ 6 \times 6 &= 1 + 15 + 20, \\ 6 \times 15 &= 10 + 10^* + 6 + 64, \\ 6 \times 20 &= 6 + 50 + 64, \\ 15 \times 15 &= 1 + 15 + 15' + 20 + 45 + 45^* + 84. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

三、 SU_4 羣与 Bacry-Van Hove 模型

如同文献[6], 我们假设强相互作用除同位旋与超荷守恒外, 尚存在附加的守恒量子数 D , 这时必须将原来的 Gell-Mann 与 Nishijima 公式改写为

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y + \frac{1}{3} D. \quad (14)$$

对于物理粒子, 其量子数 D 必须恒等于零.

如同 SU_3 中八度法模型的建立, 对 SU_4 羣我们可选取六维表示为最基本的对称性, 并令

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{2\sqrt{6}}{3} H_1, \quad I_3 = 2H_2, \quad Y = -\frac{4\sqrt{3}}{3} H_3, \\ D &= \frac{3}{2} (N - Z), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

这样, 可将这重子数 $N = 1$ 之简并六重态明显地表为

$$\psi = \left\{ \begin{array}{llll} D=1 & I_3=1/2 & Y=1/3 & Q=1 \\ D=1 & I_3=-1/2 & Y=1/3 & Q=0 \\ D=1 & I_3=0 & Y=-2/3 & Q=0 \\ D=2 & I_3=1/2 & Y=-1/3 & Q=1 \\ D=2 & I_3=-1/2 & Y=-1/3 & Q=0 \\ D=2 & I_3=0 & Y=2/3 & Q=1 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

不难看出, 它们即为文献[6]中所称的二个三重态 T 与 Θ .

对于物理介子与介子共振态, 它们应来自 6_1 与 6_{-1} (脚标表重子数) 的乘积表示

$$\begin{aligned} 6_1 \times 6_{-1} &= 1_0 + 15_0 + 20_0, \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 1 + (1+8) + 8 \end{aligned} \quad (17)$$

即其中 $D=0$ 态恰相应于实验上已发现的多重态. 根据具体的量子数, 已知的八个赝标介子将属于 20 维表示, 九个矢量介子将属于 15 维表示, 而一维表示可能与另一赝标介子相对应, 它也许是如今实验发现的 $\eta\pi\pi$ 共振^[11].

对于重子与重子共振态, 它们则应来自下列直积约化所生成之不可约表示:

$$\begin{aligned} 6_1 \times 6_1 \times 6_{-1} &= 6_1 + 6_1 + 6_1 + 10_1 \times 10_1^* + 50_1 + 64_1 + 64_1, \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 1 + 10 + 8 + 8 \end{aligned} \quad (18)$$

即 $D=0$ 态亦实验已发现之多重态. 其中 10^* 即表示 $D^0(1, 0, 0)$ 包含一个 $D=0$ 状态, 它可与 $Y^*(1405 \text{ MeV})$ 相对应; 表示 $D^{50}(0, 3/2, 0)$ 包含的十重态恰与 $(N_{33}^*, Y_{13}^*, \Xi_{1/2}^*, \Omega^-)$ 相对应, 二个 64 维表示 $D^{64}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 中的八重态则可分别与 $(N, \Lambda, \Sigma, \Xi)$ 及 $(N_{13}^{**}, Y_{03}^{**}, Y_{13}^{**}, \Xi_{1/2}^{**}(?))$ 相对应.

从以上的讨论可知, 以 SU_3 群为子代数的 SU_4 群, 在物理粒子与量子数 $D=0$ 相对应的假设下, 无论对介子或重子均可获得与实验一致的结果, 因而它可能是基本粒子间一种较好的对称性. 此外, SU_4 群较之其他三秩李群, 例如 B_3, C_3 还具有最简洁的优点.

四、 SU_4 群与 Schwinger 模型

在基本粒子对称理论中, 除“八度法”外, 最近引起人们较大兴趣的是 Schwinger^[8] 提出的 W_3 对称. 在该模型中, 最突出之处是预言存在第九个 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 的重子与 $J^{PG} = 0^{-,+}$ 之介子, 它们分别与已知的八个重子与八个赝标介子构成简并的九重态.

我们引入重子数 $N=2$ 之四重态 ϕ 与重子数 $N=1$ 之四重态 V , 它们分别构成 SU_4 群之基本不可约表示 $D^4(0, 0, \frac{1}{2})$ 的基矢, 同时令

$$\left. \begin{aligned} 4\sqrt{6} H_1 &= D, \\ 2H_2 &= I_3, \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} H_3 &= Y, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

则

$$\phi = \begin{pmatrix} D=1 & I_3=1/2 & Y=1/3 & Q=1 \\ D=1 & I_3=-1/2 & Y=1/3 & Q=0 \\ D=1 & I_3=0 & Y=-2/3 & Q=0 \\ D=-3 & I_3=0 & Y=0 & Q=-1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

对 V , 也有类似的结果.

对物理介子或介子共振态, 它们应来自 $\phi \times \bar{\phi}$ (或 $V \times \bar{V}$) 的约化

$$\phi \times \bar{\phi} = 1_0 + 15_0. \quad (21)$$

对于物理重子则应来自

$$\bar{V} \times \phi = 1_1 + 15_1. \quad (22)$$

表 1 给出了 15 维表示量子数之具体值, 即 $D=0$ 之粒子无论对介子或重子均构成简并的九重态. 因而如同 W_3 对称, 这时应预言存在第九个 $1/2^+$ 之重子与 $0^{-,+}$ 之介子.

表 1

D	0	0	0	0	0	4	4	-4	-4
I	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
Y	0	1	-1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

但不同于 W_3 对称, 如上述讨论的对称性成立, 则还应预言存在基本重子与介子的单重态.

对于介子-重子共振态, 在我们所讨论的模型中, 应来自上列二个正则表示的直积

$$\begin{array}{cccccccc} 15_1 \times 15_0 = & 1_1 & + & 15_1 & + & 15'_1 & + & 20 & + & 45 & + & 45^* & + & 84 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & + & (1+8) & + & (1+8) & + & (8) & + & (8+10) & + & (8+10^*) & + & (1+8+27). \end{array} \quad (23)$$

从上式可注意到, 如上述讨论的对称性并不破坏, 对 45 维表示, 因其中 10 维表示具有 $J^P = \frac{3}{2}^+$ 之空间性质, 故应预言可能存在 $-\frac{3}{2}^+$ 之 SU_3 群之么正八重态. 此外, 在 84 维表示中的八重态, 如与 $J^P = \frac{3}{2}^-$ 之粒子 $[N_{13}^{**}, Y_{13}^{**}, Y_{13}^{**}, E_{Y_2}^{**}(?)]$ 相对应 (自然我们并不排斥这些粒子属于其他表示的可能性), 则要求由“八度法”模型预言存在的 27 维表示也应具有 $\frac{3}{2}^-$ 之空间性质.

在 W_3 对称中, 介子-重子共振态应来自下列直积的约化^[12]:

$$(\bar{3}, 3) \times (1, 8) = (\bar{3}, 3) + (\bar{3}, \bar{6}) + (\bar{3}, 15), \quad (24)$$

其中 18 维与 45 维表示, 亦可按 SU_3 多重态分解:

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{3}, \bar{6}) = 8 + 10^*, \\ (\bar{3}, 15) = 8 + 10 + 27, \end{array} \right\} \quad (25)$$

其中表示 $(\bar{3}, \bar{6})$ 与 (23) 式中表示 45^* 相类似, 但在表示 $(\bar{3}, 15)$ 中, 因十重态已很好确定有 $J^P = 3/2^+$ 之空间性质, 故 27 维表示也应具有相同的空间性质. 由于 W_3 对称与 SU_4 对称对 SU_3 群之多重态 27 的空间性质可以有不同的预言, 故实验将能提供对这二种对称性的具体检验.

五、正、反粒子对称的坂田模型

至今基本粒子对称理论的共同缺点之一, 正如在文献[7]中提及的, 是没有明显地包含重子数这一守恒量子数. 此外, 在这些讨论的对称图象中, 对介子而言, 其正、反粒子是同时出现的, 因而满足电荷共轭的要求; 但对重子或重子共振态, 却仅包含了它们的正粒子. 从目前实验情况视之, 不仅所有过去称之基本粒子之重子, 其所有反粒子都已被实验相继地发现, 且一些介子-重子共振态的反粒子如 $\bar{Y}_1^*$, 也在一些反应中产生^[13]. 因而为了在对称理论中明显地包含重子数, 并使介子与重子的正、反粒子同时出现在我们所讨论的图象中, 我们必须适当地修改现有的对称理论. 为做到这点, 利用 SU_4 群是适宜的.

改变六维表示三个对易算子 H_1, H_2, H_3 之定义:

$$\left. \begin{array}{l} -2\sqrt{6} H_1 = N, \\ 2H_2 = I_3, \\ \frac{4}{3}(\sqrt{3} H_3 - \sqrt{6} H_1) = Y, \end{array} \right\} \quad (26)$$

则简并六重态 $(p n \Lambda \bar{p} \bar{n} \bar{\Lambda})$ 构成基本表示之基底.

对玻色子族应来自下列基本表示之约化:

$$6 \times 6 = 1 + 15 + 20, \quad (27)$$

表 2 给出这些表示的量子数之具体值.

表 2

表示维数	15						20					
重子数	0			2			0			2		
同位旋	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
超荷	0	1	-1	0	0	1	2	0	1	-1	0	0
对应粒子	ρ	K^*	$\bar{K}^*$	ω	φ	$(NA) \frac{1}{2}H^2$	反粒子	π	K	$\bar{K}$	η	$(NN) (NA) (AA)$

对于费米子族,应来自下列表示直积的约化:

$$6 \times 6 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 10 + 10^* + 50 + 64 + 64. \quad (28)$$

表 3—5 分别列出这些表示的量子数之具体值. 从这些表可知,对正、反粒子对称的坂田模型具有下列二个明显的特点.

表 3

表示维数	10						10^*					
重子数	1			-1			-1			1		
同位旋	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
超荷	0	1	2	-1	0	-2	0	-1	-2	1	0	2
对应粒子	Y_{13}^{**}	N_{13}^{**}	$Z^+(?)$	反粒子	反粒子	反粒子	反粒子	反粒子	反粒子	Y_{33}^{**}	$\Delta H^3(?)$	

表 4 表示 $D^{64}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

重子数	1						-1					
同位旋	$\frac{3}{2}$	1(2)	1	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{1}{2}$	0(2)	0	$\frac{3}{2}$	1(2)	1	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{1}{2}$
超荷	1	0	2	1	-1	0	2	-1	0	-2	-1	1
对应粒子	Σ	N	Ξ	Λ	$N_{\frac{1}{2}}^*$		反粒子			He^8	H^8	ΔH^8

表 5 表示 $D^{50}(0, 3/2, 0)$

重子数	1						-1					
同位旋	$\frac{3}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
超荷	1	2	0	1	-1	0	-1	-2	0	-1	1	0
对应粒子	N_{33}^*	Y_{13}^*	$\Xi_{1/2}^*$				反粒子					

(1) 无论对于介子或重子,它们的粒子与反粒子的对称性完全处于相同的地位. 如果我们在重子数坐标的原点置一镜面,则在我们所讨论的模型中,整个强相互作用的基本粒子世界,对镜面的反映将是完全对称的,而介子恰好处于镜面之上.

(2) 所有粒子被区分为两大类,即重子数为偶数的玻色子族与重子数为奇数之费米子族,同族的粒子可以构成 SU_4 群的某些不可约表示.

在玻色子族中,对 15 维表示,因 $N = 0$ 之介子自旋为 1, 故氘核有 $(N, I, Y) = (2, 0, 2)$ 之位置. 对于 20 维表示, 由于 $N = 0$ 是赝标介子, 故应预言存在 $N = 2$ 自旋为零之粒子. 正如最早由 Barut^[14] 提出的, 对于质子-质子应存在阈附近 S 波的凝聚(enhance), 并且在理论与实验上也曾广泛地研究了 S 态双中子(di-neutron)结合之可能性^[15]. 此外, 如 SU_4 对称未受到严重破坏, 则对重子数 $N = 2$, 我们还要求存在 $S = -1, I = 1/2$, 自旋为 1 之超裂片, 及 $S = -1, I = 1/2$ 与 $S = -2, I = 0$ 之标量超裂片. 但必须指出, 在我们所讨论的模型中, 比之 Oakes 在文献[16]中要求出现重子数为 2 的粒子的数目却大大地减少了. 最近在文献[17]中曾报导了发现 $N = 2, S = -1, M = 2.36 \text{ BeV}$ 之核子-超子共振态, 而该粒子正是我们要求存在的. 如果该粒子自旋为 1, 则应属于 15 维表示; 如自旋为零, 则应属于 20 维表示.

在费米子族中, 对于 64 维表示, 因 $N=1$ 之粒子与自旋 $1/2$ 之重子 $(N, \Xi, \Lambda, \Sigma)$ 等对应, 故要求存在 $N = 3$ 、自旋亦为 $1/2$ 之原子核及超核, 而 He^3, H^3 及 ${}^4\text{H}^3$ 等恰好满足这个要求. 对于 50 维表示, 我们应预言存在 $N = 3$ 之超核简并十重态, 且它们将与 N_{33}^*, Y_{33}^* 等具有相同之自旋, 并且或者带正电, 或不带电, 它们可能是未发现之新的重子结合态或为已有原子核或超核之激发态.

最后我们应指出, 如果 SU_4 对称并不严重破坏, 则在我们上述模型中, 尚要求存在一些新的共振态, 例如对 64 维表示除八个基本重子外, 还应存在 $J^P = \frac{1}{2}^+$ 之粒子: $I = 3/2, Y = 1; I = 0, Y = 0; I = 1, Y = 2; I = 0, Y = 2; I = 1, Y = 0$, 及二个 $I = 1/2, Y = 1$. 如今实验发现的 $M = 1400 \text{ MeV}$ 的核子共振态 $N_{14}^{[18]}$ 恰巧可占据其中 ($I = 1/2, Y = 1$) 之位置, 而所有其他粒子均有赖实验的进一步发现, 对于它们的质量, 我们将在以后加以具体讨论. 此外, 该模型的一个缺点, 是在较低维表示中并不包含 $I = 0, S = -3$ 之粒子, 而该粒子如今却被实验所发现^[19].

六、正、反粒子对称的 Gell-Mann 模型

由于在上节所讨论的模型中, 其低维表示并未包含 Q^- 粒子, 且“八度法”如今又获得较大的成就, 因而本节我们希望利用 SU_4 群构成正、反粒子对称之 Gell-Mann 与 Ne'eman 模型.

为此我们只需在作为基本对称之六维表示中令

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} H_3 = N, \quad 2H_2 = I_3, \quad -\frac{4\sqrt{3}}{3} H_3 = Y, \quad (29)$$

则作为基本粒子的应为

$$\phi = \begin{pmatrix} N = 1/3 & I_3 = 1/2 & Y = 1/3 & Q = 2/3 \\ N = 1/3 & I_3 = -1/2 & Y = 1/3 & Q = -1/3 \\ N = 1/3 & I_3 = 0 & Y = -2/3 & Q = -1/3 \\ N = -1/3 & I_3 = 1/2 & Y = -1/3 & Q = 1/3 \\ N = -1/3 & I_3 = -1/2 & Y = -1/3 & Q = -2/3 \\ N = -1/3 & I_3 = 0 & Y = 2/3 & Q = 1/3 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

由于带有分数电荷之粒子实验并未发现,故我们可假设所有物理粒子均与 $N = \text{整数}$ 之状态相对应,六重态 ψ 则可视为一种“数学粒子”。

于是,对于介子仍有

$$6 \times 6 = 1 + 15 + 20, \quad (31)$$

其结果仍与上述各模型类似。对重子有

$$6 \times 6 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 10 + 10^* + 50 + 64 + 64. \quad (32)$$

其中 64 维表示恰好包含 $N = 1$ 与 $N = -1$ 之八重态,它们可与八个重子与八个反重子相对应;在 50 维表示中包含 $N = 1$ 与 $N = -1$ 之十重态,前者恰与 N_{33}^* , Y_{13}^* , $\Sigma_{1/2}^*$ 和 Ω^- 相对应,后者为这些粒子的反粒子。因而在该模型中不仅明显地反映了正、反粒子的对称性,且出现的多重态也正是实验所发现的,不过我们将分数重子数的粒子视为数学粒子,这不能认为是该模型的一个缺点。

七、結 論

本文根据李群的一般理论,具体地给出了 SU_4 群的代数结构、各不可约表示的维数公式、三个基本表示之明显形式及直积分解的主要结果。

在强相互作用存在超荷、同位旋及附加量子数 D 守恒之假定下,并认为物理粒子与量子数 $D = 0$ 相对应,我们以 SU_4 对称导得了 Bacry 与 Van Hove 以 C_3 对称所获得的结果,既避免了分数电荷粒子的出现,又能限于仅出现实验已发现的几个超多重态。

在相似的假设下,如取 $N = 2$ 与 $N = 1$ 之四重态分别构成 SU_4 群不可约表示 $D^4\left(00 \frac{1}{2}\right)$ 之基矢,则我们预言存在九个基本重子与介子,它们分别构成正则表示 $D^{15}\left(\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}\right)$ 物理粒子之基底。但不同于 Schwinger 模型,在 W_3 对称时,介子-重子共振态构成 1, 8, 9, 18, 45 等超多重态,而在 SU_4 对称下,则构成 1, 15, 20, 45, 45* 与 84 等表示中物理粒子 1, 8, 9, 18, 18*, 36 等超多重态。此外, W_3 对称要求 SU_3 群之超多重态 27 有 $3/2^+$ 之空间性质,而 SU_4 对称可能要求有 $3/2^-$ 之空间性质,这将提供实验对上述二种对称性的一个具体检验。

最后,为了克服原有对称模型不包含重子数之不足,我们以 SU_4 群分别讨论了正、反粒子对称之坂田模型与“八度法”模型。这时无无论对介子或重子,其正、反粒子将以对称的方式出现在我们的图象中。此外,特别对坂田模型,对重子数 $N = 2$, 我们将预言存在自旋为 1 的三重态及自旋为零的六重态;对 $N = 3$, 将预言存在自旋为 $1/2$ 之八重态与自旋为 $3/2$ 之十重态,而其中一些粒子如今已被实验所发现。

在上列由 SU_4 群建立的各种可能的对称模型中,诸如它们的质量谱、衰变分支比、各截面间的相互关系等我们当在以后加以叙述。

作者对殷鹏程先生的指导和张春霆同志的讨论表示深切的谢意。

参 考 文 献

- [1] Sakata, S., *Prog. Theor. Phys.*, **16** (1956), 686.
- [2] Ikeda, M., et al., *ibid.*, **22** (1959), 715; **23** (1960), 1073.

- [3] Gell-Mann, M., *Phys. Rev.*, **125** (1962), 1267;
Ne'eman, Y., *Nucl. Phys.*, **26** (1961), 222.
- [4] Okubo, S., *Prog. Theor. Phys.*, **27** (1962), 949.
- [5] Gell-Mann, M., *Phys. Letters*, **8** (1964), 214.
- [6] Bacry, H., et al., *Phys. Letters*, **9** (1964), 279.
- [7] Goldberg, H., et al., *Nuovo Cimento*, **27** (1963), 1.
- [8] Schwinger, J., *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 237.
- [9] Bchrends, R. E., et al., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1.
- [10] Salam, A., *Theor. Phys.* (IAEA, VIENNA), 1963, p. 173.
- [11] Connolly, P. L., et al., *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 546.
- [12] 例如 Alles, W., *Phys. Letters*, **11** (1964), 86.
- [13] Minani, S., *Nuovo Cimento*, **30** (1963), 1344.
- [14] Barut, A. O., *Phys. Rev.*, **126** (1962), 1873.
- [15] 例如 Willard, H. B., et al., *Phys. Letters*, **9** (1964), 339.
- [16] Oakes, R. I., *Phys. Rev.*, **131** (1963), 2239.
- [17] Piroul, P. A., *Phys. Letters*, **11** (1964), 164.
- [18] Barcyre, P., et al., *Phys. Letters*, **8** (1964), 137.
Roper, L. D., *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 340.
- [19] Barnes, V. E., et al., *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 204.

THE GROUP SU_4 AND SYMMETRY OF THE ELEMENTARY PARTICLES

YEH PENG-SHENG

(Fu-Tan University)

ABSTRACT

In this paper, using the general theory of the Lie groups we concretely discussed the mathematical treatments of the group SU_4 . The algebra structure of the group SU_4 , the formula for the dimensions of the irreducible representation, the explicit form of the three elementary representations, and the reduction of direct products of representations are given. The following symmetry models of the elementary particles based on the group SU_4 are built: (1) the model of Bacry-Van Hove, (2) the model of Schwinger, (3) the model of Sakata with particle and anti-particle symmetry, (4) the octet model with particle and anti-particle symmetry. In these models some new consequences consistent with the experiments are obtained.