

衍射問題一級近似的微扰理論*

程 路
(南开大学)

提 要

作者应用微扰理论首先导出了顶角接近 π 的平面扇形导体衍射场与 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$ 的圆锥导体衍射场的微扰项之表达式,因此,对其相应的简单问题——导体半平面屏的衍射与导体平面的反射,也得到了相应的微扰项之表达式。然后,按照文献[10]中所提出的原理,以內接多边形代替一般形状的导体薄片,以许多內接小圆锥面组成的曲面代替一般形状的导体表面,分别将上述微扰对多边形各顶点及曲面各內接锥顶求和。在极限情况下,求和变为积分,从而分别导出了任意形状的导体薄片(因而导体平面屏上的开孔)与导体表面衍射的一级衍射场,它们是对几何光学场的一级修正。

一、引 言

衍射问题仅对下列少数几种极简单情况才有严格的求解公式:导体直劈^[1]、导体圆片^[2](因而,根据 Babinet 原理,导体平面屏上的圆孔)、导体圆球^[3]等,而对于一般形状障碍物的衍射,则用各种近似方法处理,例如 Braunbek^[4-6] 近似法、Franz^[7] 二步逼近法、Фок^[8] 的当地场(local field)法、Keller^[9] 的几何衍射理论等。这些方法各有其优缺点及适用范围,特别是,这些方法都没有提出趋向严格解的逐步近似方案(Franz^[7] 方法虽然提出了这种方案,但收敛太慢甚至不收敛)。

作者^[10]曾对任意形状的柱状导体衍射提出了一种级数理论,用此级数可对任何地点的场求至任意高的精确度。并且指出,由于这个理论是建立在将柱分为许多內接直棱,而对每个直棱的基元衍射作用进行综合分析的基础之上的,所以此理论可能为分析衍射问题的基元根源提供线索。

如所周知,衍射乃是波与障碍物相互作用的问题。当波与障碍物皆为最简单形式,例如平面波与平面分界面时,则不发生衍射,而完全遵从几何光学规律。当波为一般形状时,可按傅里叶积分将其展为无数平面波之迭加(平面波角度谱),而分别使每一平面波发生几何反射;但是,当边界为一般形状时,不能对边界运用傅里叶展开。文献[10]及本文所讨论的就是对一般边界形状的处理方法,其思路可概述如下:当边界之几何形状相对于某种简单形状发生一个微小变化时,问题的解将等于简单情况下之解加上一个微扰项;将任意形状的边界视为简单边界发生了有限变化,而将此有限变化视为无限多个无限小变化之总和,对每一微小变化所产生的微扰作用进行综合分析,便可得出真正问题的解。

本文对球坐标下半平面衍射的亥姆霍兹方程及圆锥坐标下平面衍射(即反射)的亥

* 1965年1月18日收到;1965年6月12日收到修改稿。

姆霍兹方程分别施以微扰,对于标量波导出顶角接近于 π 的平面扇形(见第三节)和 θ 接近于 $\pi/2$ 的椭锥(见第五节)的衍射微扰项之表达式,然后将这些微扰项积分,分别得出任意形状的理想柔软薄片(因而理想柔软平面屏上任意形状的开孔)和任意形状的理想柔软光滑表面衍射的一次修正项之表达式.至于电磁波在理想导体上的衍射,则可归结为上述标量波问题^[13,14].

本文暂不讨论二级、三级……衍射场及衍射级数的表达式.

二、预 备 知 识

1. 点波源发出的标量波在理想柔软半平面屏上的衍射公式

用数学语言表述,即,在球坐标

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

下,求亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned} \Delta_0 V + \kappa^2 V &\equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 V = \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_1) \delta(\theta - \theta_1) \delta(\varphi - \varphi_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

的解,满足边界条件

$$V = 0; \text{ 当 } \varphi = \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \text{ 时.} \quad (2.3)$$

式中 $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 为点波源 S 之坐标(见图1).

方程(2.2)和边界条件(2.3)的解为^[12]

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{i\infty+r_1}^{i\infty-r_1} e^{-i\kappa\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\sin\theta\cos\zeta}} (r^2 + r_1^2 - 2rr_1\sin\theta\cos\zeta)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2}\zeta}{\cos \frac{1}{2}\zeta - \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)} + \frac{\sin \frac{1}{2}\zeta}{\cos \frac{1}{2}\zeta + \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)} \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

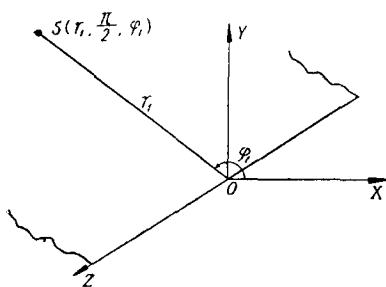


图 1

坐标原点选在波源 S 到屏边所引垂线之垂足上(见

图1),即 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.若波源之垂足位于 $z = a$ 处,则

可取一新坐标系 r', θ', φ' ,使波源垂足落在新坐标系之原点.带撇坐标与不带撇坐标间的关系为

$$\left. \begin{aligned} r' \sin \theta' \cos \varphi' &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ r' \sin \theta' \sin \varphi' &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ r' \cos \theta' &= r \cos \theta - a. \end{aligned} \right\}$$

由此可以解出

$$\left. \begin{aligned} r' &= r'(r, \theta, \varphi; a), \\ \theta' &= \theta'(r, \theta, \varphi; a), \\ \varphi' &= \varphi'(r, \theta, \varphi; a). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

于是, 在满足垂足位于原点的带撇系统中描写的 V_1 [即 (2.4) 式中的 r, θ, φ 换写成 r', θ', φ'], 又可借助于 (2.5) 式而写成以 Z 轴上任意点为原点的坐标系中的形式

$$V_1 = V_1(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1; a). \quad (2.6)$$

2. 位于点 r_1, θ_1, φ_1 的点波源在理想柔软平面上的“衍射”

这就是简单的反射问题, 其解为

$$V_2 = \frac{e^{-i\kappa R_1}}{R_1} + \frac{e^{-i\kappa R_2}}{R_2}, \quad (2.7)$$

其中 R_1 和 R_2 分别为观察点到波源及其在平面中的“象”的距离

$$R_1 = \{r^2 + r_1^2 - 2rr_1[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1(\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1)]\}^{1/2},$$

$$R_2 = \{r^2 + r_1^2 - 2rr_1[\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1(\cos\varphi\cos\varphi_1 + \sin\varphi\sin\varphi_1)]\}^{1/2}.$$

3. 椭锥坐标下的拉普拉斯算符^[11]

引入椭锥坐标系¹⁾

$$\left. \begin{aligned} x &= r(1 - k'^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta (1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中

$$k = (1 + \tan^2 \lambda \cos^2 \varphi_0)^{-1/2}, \quad (2.9)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad (2.10)$$

λ 为垂直于 z 轴的平面与椭锥相截所得椭圆之焦点与原点之连线同 X 轴之夹角, φ_0 为衍射体之锥面所对应的 φ 值. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 椭锥退化为平面.

在 (2.8) — (2.10) 式的椭锥坐标下, 与 (2.2) 式相应的亥姆霍兹方程为

$$\begin{aligned} \Delta V + \kappa^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 (k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta)} \times \\ &\times \left[\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] + \\ &+ \kappa^2 V = - \frac{1}{r^2 \sigma} \delta(r - r_1) \delta(\theta - \theta_1) \delta(\varphi - \varphi_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中

$$\sigma = \frac{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2.12)$$

三、顶角接近于 π 的平面扇形衍射场的微扰一级近似

设有一平面扇形, 其空间位置为 (见图 2)

$$\varphi = \pi, \quad \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon,$$

其中 ε 为微量.

1) 为与本文一致, 将文献 [11] 中的 ϑ 与 φ 换写为 φ 与 θ , ε 换写为 λ .

此扇形衍射之求解可归结为如下问题: 求亥姆霍兹方程

$$\Delta_0 V + \kappa^2 V = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_1) \delta(\theta - \theta_1) \delta(\varphi - \varphi_1) \quad (3.1)$$

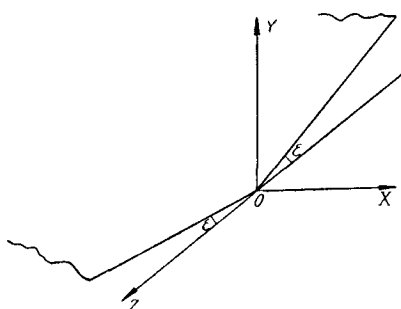


图 2

之解, 满足边界条件

$$V = 0; \text{ 当 } \varphi = \pi, \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon \text{ 时.} \quad (3.2)$$

现在将自变量 θ 加以微扰, 即, 令

$$\theta = \theta' + \varepsilon \cos \theta', \quad (3.3)$$

这样就把 θ' 的边界条件化为(2.3)式之形式

$$V = 0; \text{ 当 } \varphi = \pi, 0 \leq \theta' \leq \pi \text{ 时.} \quad (3.4)$$

然后来讨论变换(3.3)使亥姆霍兹方程(3.1)经受微扰后的形式。当仅取至 ε 的一次方项时, 有

$$\sin \theta = \sin \theta' + \varepsilon \cos^2 \theta', \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta'} \left(1 - \frac{\varepsilon \cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta'} \left(1 - \frac{2\varepsilon \cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \right). \quad (3.7)$$

另外, 按照公式^[15]

$$\delta[f(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{f'(x_n)}, \quad (3.8)$$

可以得出

$$\begin{aligned} \delta(\theta - \theta_1) &= \delta[(\theta' + \varepsilon \cos \theta') - (\theta'_1 + \varepsilon \cos \theta'_1)] = \\ &= \frac{\delta(\theta' - \theta'_1)}{1 - \varepsilon \sin \theta'} = (1 + \varepsilon \sin \theta') \delta(\theta' - \theta'_1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

将(3.5)–(3.7)式及(3.9)式代入(3.1)式, 展开并取至 ε 的一次方项, 得

$$\begin{aligned} \Delta_0 V + \kappa^2 V &= \Delta'_0 V + \kappa^2 V + \varepsilon \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \theta'} \left[-\frac{\cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial V}{\partial \theta'} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\cos^2 \theta' \frac{\partial V}{\partial \theta'} \right) \right] - 2 \frac{\cos^2 \theta'}{r^2 \sin^3 \theta'} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right\} = \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin \theta'} \delta(r - r_1) \delta(\theta' - \theta'_1) \delta(\varphi - \varphi_1) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon(1 - \sin \theta')}{r^2 \sin \theta'} \frac{\cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \delta(r - r_1) \delta(\theta' - \theta'_1) \delta(\varphi - \varphi_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 Δ'_0 系将 Δ_0 中的 θ 写成 θ' 而得到。

令(3.10)式和边界条件(3.4)式之解为(2.6)式的 V_1 加上一个微扰项 v_1 , 即

$$V(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) = V_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) + v_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1). \quad (3.11)$$

因 v_1 是微小项, 所以它与 ε 之乘积可以忽略。将(3.11)式代入(3.10)式, 并考虑到 V_1 是方程(2.2)和边界条件(2.3)式之解, 则得

$$\begin{aligned} \Delta'_0 v_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) + \kappa^2 v_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) &= \\ &= -\frac{\varepsilon}{r^2 \sin \theta'} \left\{ -\frac{(1 - \sin \theta') \cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \delta(r - r_1) \delta(\theta' - \theta'_1) \delta(\varphi - \varphi_1) + \right. \end{aligned}$$

$$+ D[V_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1)]\}, \quad (3.12)$$

其中 D 为一算符:

$$D[V_1] \equiv \frac{\cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sin \theta' \frac{\partial V_1}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\cos^2 \theta' \frac{\partial V_1}{\partial \theta'} \right) + 2 \frac{\cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2}. \quad (3.13)$$

至于 v_1 的边界条件, 则由 V 和 V_1 的边界条件很易推知, 亦为

$$v_1 = 0; \text{ 当 } \varphi = \pi, 0 \leq \theta' \leq \pi \text{ 时.}$$

亥姆霍兹方程(3.12)与上述边界条件的解为

$$\begin{aligned} v_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) = & \varepsilon \left\{ \left(-\frac{(1 - \sin \theta') \cos^2 \theta'}{\sin \theta'} \right) V_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) + \right. \\ & + \int D[V_1(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1)] \cdot V_1(\bar{r}, \bar{\theta}', \bar{\varphi}; r_1, \theta'_1, \varphi_1) \times \\ & \left. \times \delta(r - \bar{r}) \delta(\theta' - \bar{\theta}') \delta(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{r} d\bar{\theta}' d\bar{\varphi} \right\}. \end{aligned}$$

在忽略 ε^2 项的近似下, 可将上式中的 $\theta', \bar{\theta}', \theta'_1$ 等换为 $\theta, \bar{\theta}, \theta_1$, 于是

$$\begin{aligned} v_1(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) = & \varepsilon \left[\left(-\frac{(1 - \sin \theta) \cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) V_1(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ & \left. + F(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) \right], \quad (3.14) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F = & \int D[V_1(r, \theta, \varphi; \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})] V_1(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}; r_1, \theta_1, \varphi_1) \times \\ & \times \delta(r - \bar{r}) \delta(\theta - \bar{\theta}) \delta(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

积分域是全部空间.

四、平面薄片衍射场的一级修正

设有一平面薄片 K , 其边缘为一光滑凸曲线 C (图 3). 类似于文献[10], 我们用每边长为 dl 的内接多边形近似代替这一薄片. 将此多边形之每一顶角 ξ_i 视为扇形而应用公式(3.14), 然后对所有 ξ_i 求和, 便可得到此多边形的一级衍射场; 同理可以求出二级、三级……衍射场并将总衍射场展成一个级数(参阅文献[10]). 当 $dl \rightarrow 0$ 时, 此级数之极限即为薄片 K 之衍射场. 在此只导出一级衍射场之表达式, 它可认为是对几何波场的一次修正.

由于 dl 很小, 故 ξ_i 处内接多边形之顶角可以写为

$$\alpha_i = \pi - \frac{2dl}{\rho_i}, \quad (4.1)$$

其中 ρ_i 为曲线 C 在 ξ_i 处的曲率半径. 若设坐标系之 Z 轴垂直于薄片 K , X 轴平分顶角 ξ_i , 且原点位于 ξ_i , 则(3.2)式中的 ε_i 等于

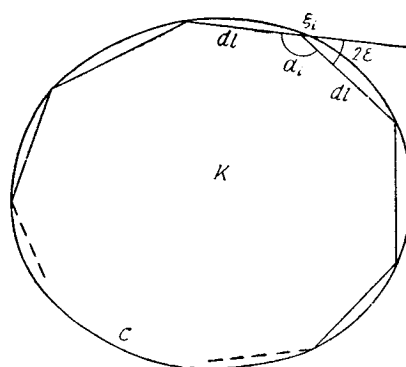


图 3

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} \frac{dl}{\rho_i}. \quad (4.2)$$

将公式(3.14)应用于顶角 ξ_i , 得

$$v_{1i} = \varepsilon_i \left[\left(-\frac{\cos^2 \theta_i}{\sin \theta_i} \right) V_{1i} + F_i \right];$$

足码 i 表示坐标原点取在 ξ_i 处且 X 轴平分 α_i 角. 对所有顶角 ξ_i 将上式求和, 即得多边形薄片之一级衍射场

$$V'_{d1} = \sum_i v_{1i} = \sum_i \varepsilon_i \left[\left(-\frac{\cos^2 \theta_i}{\sin \theta_i} \right) V_{1i} + F_i \right].$$

将(4.2)式代入上式, 得

$$V'_{d1} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{dl}{\rho_i} \left[\left(-\frac{\cos^2 \theta_i}{\sin \theta_i} \right) V_{1i} + F_i \right].$$

当 $dl \rightarrow 0$ 时上式变为一个积分

$$V_{d1} = \frac{1}{2} \int_{(C)} \left[\left(-\frac{\cos^2 [\theta(\xi)]}{\sin [\theta(\xi)]} \right) V_{11}(\xi) + F(\xi) \right] \frac{d\xi}{\rho(\xi)}. \quad (4.3)$$

ξ 为曲线 C 上以弧长为单位的参数; 积分域是整个曲线 C . (4.3) 式即薄片 K 的一级衍射场.

五、 θ 接近于 $\frac{\pi}{2}$ 的椭圆锥衍射场的微扰一级修正

设有一参数为 λ 的椭圆锥, 其锥面方程为

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ 为一微量}).$$

作一个(2.8)式所表的椭圆锥坐标系, 则问题归结为, 求在满足边界条件

$$V = 0; \quad \text{当} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \text{ 时} \quad (5.1)$$

的情况下亥姆霍兹方程(2.11)之解.

引进新变数 θ'

$$\theta = \theta' + \varepsilon \sin \theta', \quad (5.2)$$

则对于 θ' 而言, 边界条件(5.1)式变为

$$V = 0, \text{ 当 } \theta' = \frac{\pi}{2} \text{ 时}. \quad (5.3)$$

现在来推导变换(5.2)使方程(2.11)产生的微扰. 当取至 ε 的一次方项时, 有

$$\frac{1}{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'} \left(1 + \frac{2k' \varepsilon \sin^2 \theta' \cos \theta'}{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'} \right), \quad (5.4)$$

$$\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \left(1 + \frac{\varepsilon k' \sin^2 \theta' \cos \theta'}{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \right), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta}} = \frac{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'}} \times \\ &\times \left[1 - \varepsilon k'^2 \sin^2 \theta' \cos \theta' \left(\frac{1}{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} + \frac{2}{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

应用(3.8)式又得出

$$\begin{aligned}\delta(\theta - \theta_1) &= \delta[(\theta' + \varepsilon \sin \theta') - (\theta'_1 + \varepsilon \sin \theta'_1)] = \\ &= \frac{\delta(\theta' - \theta'_1)}{1 + \varepsilon} = (1 - \varepsilon)\delta(\theta' - \theta'_1).\end{aligned}\quad (5.7)$$

将(5.4)–(5.7)式代入(2.11)式,略去 ε^2 项,得

$$\begin{aligned}\Delta V + \kappa^2 V &= \Delta' V + \kappa^2 V + \frac{\varepsilon}{r^2(k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta')} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\frac{k'^2 \sin^2 \theta' \cos \theta'}{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \frac{\partial V}{\partial \theta'} \right) + \right. \\ &+ \frac{k'^2 \sin^2 \theta' \cos \theta'}{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \frac{\partial V}{\partial \theta'} \right) + \\ &+ \left. \frac{2k'^2 \sin^2 \theta' \cos \theta'}{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} \frac{\partial V}{\partial \theta'} \right) \right\} = \\ &= - \frac{1}{r^2} \left(\frac{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'}} \right) \times \\ &\times \left\{ 1 - \varepsilon \left[1 - k'^2 \sin^2 \theta' \cos \theta' \left(\frac{1}{1 - k'^2 \cos^2 \theta'} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{2}{k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta'} \right) \right] \right\} \delta(r - r_1) \delta(\theta' - \theta'_1) \delta(\varphi - \varphi_1); \quad (5.8)\end{aligned}$$

或简写为

$$\begin{aligned}\Delta V + \kappa^2 V &= \Delta' V + \kappa^2 V + \frac{\varepsilon G[V]}{r^2(k^2 \sin^2 \varphi + k'^2 \sin^2 \theta')} = \\ &= - \frac{1 + \varepsilon H}{r^2 \sigma(r, \theta', \varphi)} \delta(r - r_1) \delta(\theta' - \theta'_1) \delta(\varphi - \varphi_1), \quad (5.9)\end{aligned}$$

式中 Δ' 为(2.11)式中拉普拉斯算符表达式中的 θ 改写为 θ' ; G 为一算符, $G[V]$ 等于(5.8)式花括号内的表达式; H 等于(5.8)式等号右端方括号内的表达式.

令微扰后的解 V 等于

$$V = V_2 + v_2, \quad (5.10)$$

其中 V_2 如(2.7)式所表, 则 v_2 是一个微量. 将(5.10)式代入(5.9)式, 并考虑到 V_2 是方程(2.11)与边界条件

$$V_2 = 0, \text{ 当 } \theta' = \frac{\pi}{2} \text{ 时}$$

的解, 则得

$$\begin{aligned}\Delta' v_2 + \kappa^2 v_2 &= - \frac{1}{r \sigma(r, \theta', \varphi)} \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{G[V_2(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1)]}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \theta'}} \right] + \right. \\ &\left. + H(\theta', \varphi) \delta(r - r_1) \delta(\theta' - \theta'_1) \delta(\varphi - \varphi_1) \right\}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

由 V 与 V_2 满足的边界条件很易推知 v_2 亦满足同一边界条件

$$v_2 = 0, \text{ 当 } \theta' = \frac{\pi}{2} \text{ 时}, \quad (5.12)$$

亥姆霍兹方程(5.11)与边界条件(5.12)式之解为

$$v_2(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) = \varepsilon \left\{ H(\theta', \varphi) V_2(r, \theta', \varphi; r_1, \theta'_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \bar{\varphi}} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \bar{\theta}'}} G[V_2(r, \theta', \varphi; \bar{r}, \bar{\theta}', \bar{\varphi})] \times \right. \\ \left. \times V_2(\bar{r}, \bar{\theta}', \bar{\varphi}; r_1, \theta'_1, \varphi_1) \delta(r - \bar{r}) \delta(\theta' - \bar{\theta}') \delta(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{r} d\bar{\theta}' d\bar{\varphi} \right\}.$$

与前同理,在略去 ε^2 的情况下,可将 θ' 换为 θ , 于是

$$v_2(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) = \varepsilon \left\{ H(\theta, \varphi) V_2(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ \left. + \int \frac{V_2(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}; r_1, \theta_1, \varphi_1) G[V_2(r, \theta, \varphi; \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})]}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \bar{\varphi}} \sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \bar{\theta}}} \times \right. \\ \left. \times \delta(r - \bar{r}) \delta(\theta - \bar{\theta}) \delta(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} \right\}, \quad (5.13)$$

积分域是椭锥外全部空间.

六、光滑表面衍射场的一级修正

设有一光滑曲面 Σ (见图 4), 曲面上 (ξ, η) 点处的两个主曲率半径分别为 $\rho_1(\xi, \eta)$ 和 $\rho_2(\xi, \eta)$, $\rho_1 \geq \rho_2$. 对于 Σ 上任一点 A_i 作一直角坐标系, 其 z 轴方向为过 A_i 点曲面 Σ 之外法线方向. 以 $z = -a$ 的平面截曲面 Σ , 则当 a 足够小时, 截线趋向一椭圆¹⁾. 设此椭圆之长半轴为 B , 短半轴为 b , 焦点到椭圆中心的距离(焦距)为 c , 并设 X 轴平行于长半轴. 由解析几何很易证明, 当 $a \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{B}{b} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}.$$

由椭圆焦距公式又得

$$c = \sqrt{B^2 - b^2} = b \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}}.$$

设过原点 O 与此椭圆所作的椭锥对应的 θ 角为 θ_0 , 则

$$\cos \theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

而

$$\tan \lambda = \frac{c}{a},$$

于是

$$k = (1 + \tan^2 \lambda \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \quad (6.1)$$

推导此式时应用了当 $a \rightarrow 0$ 时 $\frac{a}{b} \rightarrow 0$ 这个关系, 而

1) 假定 Σ 是到处规则的, 即无棱边和尖点.

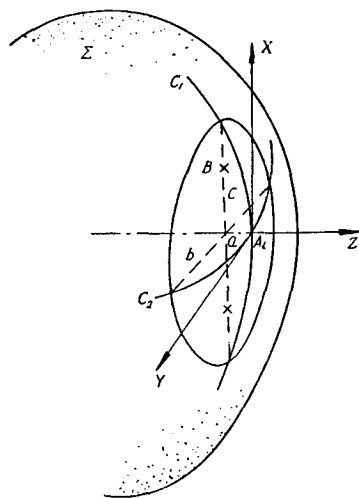


图 4

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}}. \quad (6.2)$$

显然, 当 $a \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon = \frac{a}{b}$; 又因

$$b = \sqrt{\rho_2^2 - (\rho_2 - a)^2} = \sqrt{2\rho_2 a + a^2} = \sqrt{2\rho_2 a}$$

(略去高阶无穷小 a^2), 所以

$$\varepsilon = \frac{b}{2\rho_2}. \quad (6.3)$$

若将曲率线 C_2 (图 4) 代之以内接折线, 则每段折线之长为

$$d\eta = 2b.$$

代入(6.3)式, 得

$$\varepsilon = \frac{d\eta}{\rho_2}. \quad (6.4)$$

将(6.1), (6.2) 和(6.4)式代入(5.13)式, 并对曲率线 C_2 上被波源直射到的所有各 A_i 求和, 得出

$$\begin{aligned} \sum_{(C_2)} v_{2i} = & \sum_{(C_2)} \frac{d\eta_i}{\rho_{2i}} \left\{ H(\theta_i, \varphi_i) V_2(r_i, \theta_i, \varphi_i; r_{1i}, \theta_{1i}, \varphi_{1i}) + \right. \\ & + \int \frac{V_2(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_i; r_{1i}, \theta_{1i}, \varphi_{1i}) G[V_2(r_i, \theta_i, \varphi_i; \bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\varphi}_i)]}{\sqrt{1 - \frac{\rho_{2i}}{\rho_{1i}} \cos^2 \bar{\varphi}_i} \cdot \sqrt{1 - \frac{\rho_{1i} - \rho_{2i}}{\rho_{1i}} \cos^2 \bar{\theta}_i}} \times \\ & \left. \times \delta(r_i - \bar{r}_i) \delta(\theta_i - \bar{\theta}_i) \delta(\varphi_i - \bar{\varphi}_i) d\bar{r}_i d\bar{\theta}_i d\bar{\varphi}_i \right\}, \end{aligned}$$

其中足码 i 表示在曲率线 C_2 上对 A_i 点所作的坐标系中描写的量. 当 $d\eta_i \rightarrow 0$ 时, 上式变为一个积分

$$\begin{aligned} \int d v_2 = & \int_{(C_2)} \frac{d\eta}{\rho_2} \left\{ H(\theta, \varphi) V_2(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) + \right. \\ & + \int \frac{V_2(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}; r_1, \theta_1, \varphi_1) G[V_2(r, \theta, \varphi; \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})]}{\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos^2 \bar{\varphi}} \sqrt{1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \cos^2 \bar{\theta}}} \times \\ & \left. \times \delta(r - \bar{r}) \delta(\theta - \bar{\theta}) \delta(\varphi - \bar{\varphi}) d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{\varphi} \right\}. \quad (6.5) \end{aligned}$$

若在曲面 Σ 上作曲率线族 C_2 和与之正交的曲率线族 C_1 , 并以二曲率线族为 Σ 上的曲线坐标系 ξ, η , 则 ξ 与 $\xi + d\xi$ 所夹的一个带的元面积为

$$dS = d\xi \int \sqrt{EG - F^2} d\eta, \quad (6.6)$$

其中 E, F, G 皆为 ξ, η 之函数, 其定义见文献[16]. 于是由(6.5)式可得, 在 ξ 到 $\xi + d\xi$ 之间的一段曲面所产生的一级衍射场的贡献为

$$d\xi \int_{(C_2)} \frac{\sqrt{EG - F^2} d\eta}{\rho_2} \{P\}, \quad (6.7)$$

其中 $\{P\}$ 代表(6.5)式中花括号内的表达式. 将(6.7)式对 ξ 积分 (积分域是波源所能直

射到的区域),便可得出 Σ 上被点波源直射到的全部区域 (Σ_n) 的一级衍射总贡献

$$V_{a1}(r, \theta, \varphi; r_1, \theta_1, \varphi_1) = \iint_{(\Sigma_n)} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho_2} \{P\} d\xi d\eta. \quad (6.8)$$

这就是曲面衍射对几何光学波场的一级修正项.

在本文工作中,本校胡建伟、陈有祺等同志在数学方面给予作者很多帮助,在此表示衷心感谢.

参 考 文 献

- [1] Sommerfeld, A., *Math. Ann.*, **47** (1895), 317; Franz, W., *Theorie der Beugung Electromagnetischer Wellen* (Springer-Verlag, 1957), §22, 74.
- [2] Andrejewski, W., *Z. Angew. Phys.*, **5** (1953), 178.
- [3] Mie, G., *Ann. der Physik*, (4) **25** (1908), 377; Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics* (Pergamon Press, 1959), §13.5, 630.
- [4] Braunbek, W., *Zeits. Phys.*, **127** (1950), 381.
- [5] Frahn, W., *Zeits. Phys.*, **156** (1959), 78.
- [6] Frahn, W., *Zeits. Phys.*, **156** (1959), 111.
- [7] Franz, W., *Zeits. Phys.*, **125** (1949), 563.
- [8] Фок, В. А., *ЖЭТФ*, **15** (2) (1945), 693.
- [9] Keller, J. B., *J. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962), 116.
- [10] 程 路, *物理学报*, **21** (1965), 1798.
- [11] Kraus, L. and Levine, L. M., *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 49.
- [12] MacDonald, H. M., *Proc. London Math. Soc.*, **14** (1915), 410.
- [13] Williams, W. E., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **6** (1953), 101.
- [14] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics* (Pergamon Press, 1959), §11.7.2., 581.
- [15] Маделунг, Э., *Математический аппарат физики* (Физматгиз, 1960), 38.
- [16] Рашевский, П. К., *Курс дифференциальной геометрии* (Москва, 1956), 219.

THE PERTURBATION THEORY FOR THE FIRST-ORDER APPROXIMATION OF THE DIFFRACTION PROBLEMS

CHENG LU

(Nankai University)

ABSTRACT

Applying the perturbation theory to Helmholtz's equations of spherical and sphericonal systems of coordinates, the author deduces the expressions for the perturbation terms of diffraction due to a plane angular sector with its angle nearly equal to π and those due to an elliptic cone with θ nearly equal to $\pi/2$ respectively. Then, following the principle in [10], substituting the diffracting plane disk of arbitrary form by its inscribed polygonal disk and the diffracting surface of arbitrary form by a surface which consists of many small inscribed elliptic cones of the original surface, we make the summations of the perturbation terms for the sectors of the polygon and those of the tops of the small cones respectively. In the limiting case these two summations become integrals, hence the diffraction fields of first-order due to the disk (thereof, the complementary plane screen with a hole) and the surface of arbitrary forms are derived respectively.