

靜电系統中电子运动軌迹的理論*

刘 盛 綱

(成都电讯工程学院)

提 要

本文研究靜电场中电子运动軌迹的理論,共分四部分。

第一部分研究軌迹方程。利用变分原理,导出正交曲面坐标系中軌迹的普遍方程,着重研究了可化为二维坐标系的情形,导出了广义傍轴軌迹方程。

第二部分讨论軌迹条件。求得軌迹与某曲线族重合的充分与必要条件,并进行了研究;讨论了电子运动軌迹的稳定性问题,求得軌迹稳定的条件。

第三部分求解空间电荷流的普遍方程。得到的解表明,二分之三次方定律可推广至普遍情形。

第四部分讨论按给定曲线构成正交系的原则,给出四种不同构成正交系方法的具体方程。

一、引 言

1. 研究电子运动軌迹,在两个方面遇到困难:一方面是复杂电极形状下场方程的求解;另一方面是求解电子运动的微分方程组。

从克服上述两方面的困难来看,选用合适的曲面坐标(正交的或甚至不正交的)都不失为一个较好的出路。因为,如果能按照电极的几何特点来选择适当的曲面坐标,可使场方程的求解大为简化,而根据给定軌迹曲线来选择合适的坐标,又可将运动方程大大化简。所以,在电子光学理论的发展中,利用适当的曲面坐标来进行研究,已是一个较普遍的趋势(虽然还有一些其他的处理方法)。

2. 早在 1938 年, Cotte^[6] 首先处理了任意场中电子束的成象问题;接着在 Wendt^[7], Sturrok^[8] 等人的工作中,均以軌迹曲线为基础,构成一组正交坐标系,对于电磁场中电子运动的軌迹,特别是傍轴軌迹,作了较严密的计算。但是,在他们的工作中,沒有考虑空间电荷效应的问题。

1956 年, Meltzer^[9] 利用速度分量的变换关系,由电荷守恒定律,导出无旋电子注軌迹的一些普遍关系。其后, Meltzer, Lucas, Kirstein, Mueller 等人作了进一步的研究^[10-14], 使强流电子光学的理論工作有了进一步的发展。

和 Meltzer 大致同时, Овчаров^[16] 对于旋转对称系统中的强流电子注做了研究,同时考虑了有轴向磁场存在的情形。这方面的工作随后由他本人和其他作者做了进一步的研究^[17-20]。

近来, Данилов^[21,22] 利用正交曲面坐标对交叉场中的广义布里渊流作了较深入的研

* 1964 年 9 月 11 日收到; 1965 年 9 月 4 日收到修改稿。

究;在文献[23]中也利用曲面坐标讨论了任意截面形状柱面静电旋行聚束系统的一般情况。

3. Meltzer 等人的工作基于利用矢量分量的变换性质,将方程

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a}) = 0$$

展开,式中 $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ 表示电子的速度和加速度。由此得到空间电荷流的普遍方程,并从对方程系数的函数性质的讨论,得出空间电荷流的充分与必要条件。但是,在他们的工作中,充分性与必要性并未得到严格的证明;而且充要条件的物理意义还不够显然。

在 Овчаров 等人的工作中,由于一开始就限于旋转对称场(仅在文献[20]中考虑了平面对称的二维场),并考虑有轴向磁场存在,因而未能对于静电系统的普遍情形,做进一步深入的研究。

在现有的理论中,对于普遍的空间电荷流方程的求解,是一个困难问题;而对于轨迹的稳定性问题也未充分的讨论过。显然,这些问题都具有重要的理论和实际意义。

此外,在利用正交曲面坐标研究电子运动轨迹的全部理论中,如何按已知曲线构成正交系是极为重要的。但是,这方面的工作还很少,在文献[8, 17]中只提出某种个别情况。

4. 本文根据变分原理,由欧勒方程出发,较系统地研究了任意静电系统中电子运动轨迹的理论问题。文中共分以下几部分:

第一部分导出正交曲面坐标系中轨迹的普遍方程,着重讨论可化为二维坐标系的情形;导出了广义傍轴轨迹方程。这部分的内容有些在文献[6—8]中已被研究过,但是为了后面叙述的方便和系统性起见(并且在处理方法上也不完全相同),所以仍简短地列出。

第二部分研究轨迹条件,求得轨迹与某曲线重合的充分与必要条件,并进行了分析;研究了轨迹的稳定性问题,求得轨迹的稳定条件。第三部分求解空间电荷流的普遍方程,得到了一般形式的二分之三次方定律。第四部分讨论按给定曲线构成正交系的一般原则,给出了四种不同的具体方程,其中两种可构成有对称轴的坐标系,另外两种则不具有对称轴。

二、静电系统中电子运动的普遍方程

1. 考虑任意的静电系统,取正交曲面坐标系 (x_1, x_2, x_3) , 它们和笛氏坐标有以下关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ z &= f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设函数 f_1, f_2, f_3 及其以后所需的各阶导数均单值连续。

电子的运动,满足以下的变分原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x) dt = 0, \quad (2)$$

式中 L 表静电系统中电子运动的拉格朗日函数¹⁾

1) 限于非相对论的研究,并注意电子带负电。

$$L = \frac{1}{2} m_0 \sum_{j=1}^3 (h_j \dot{x}_j)^2 + eV, \quad (3)$$

变分方程(2)的欧拉方程就是电子的运动方程,展开后得

$$h_i^2 \ddot{x}_i + 2h_i \dot{x}_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \dot{x}_j - \sum_{j=1}^3 h_j \dot{x}_j^2 \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{e}{m_0} \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

式中 $h_i (i = 1, 2, 3)$ 表示相应的度规系数; V 表示电位.

2. 为了求得轨迹方程,将方程(2)写成

$$\delta \int_{(x_2)_1}^{(x_2)_2} L_2(x', x) dx_2 = 0, \quad (5)$$

其中

$$L_2 = m_0 \sqrt{2\eta V} [h_2^2 + h_1^2 x_1'^2 + h_3^2 x_3'^2]^{1/2}, \quad (6)$$

式中 $\eta = \frac{e}{m_0}$, $x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial x_2}$. 在以上的讨论中,认为电子从阴极出发时,初速为零. 于是即得轨迹方程

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_i} - \frac{d}{dx_2} \left(\frac{\partial L_2}{\partial x_i'} \right) = 0 \quad (i = 1, 3), \quad (7)$$

展开后就可将轨迹方程表为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{V}} \frac{\partial V}{\partial x_i} [h_2^2 + h_1^2 x_1'^2 + h_3^2 x_3'^2]^{1/2} + [h_2^2 + h_1^2 x_1'^2 + h_3^2 x_3'^2]^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \left[h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + h_1 x_1'^2 \frac{\partial h_1}{\partial x_i} + h_3 x_3'^2 \frac{\partial h_3}{\partial x_i} \right] \sqrt{V} \\ & = \frac{d}{dx_i} \left\{ \frac{h_i^2 x_i' \sqrt{V}}{[h_2^2 + h_1^2 x_1'^2 + h_3^2 x_3'^2]^{1/2}} \right\} \quad (i = 1, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

3. 我们来考虑可化为二维坐标系的情形,即设轨迹可仅用坐标 (x_1, x_2) 表述,且 V 与 x_3 无关. 利用能量守恒定律,就可将(8)式化成如下的方程:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_1}{dx_2^2} + \frac{1}{h_1^2} \left[h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 - h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right] + 2 \frac{dx_1}{dx_2} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx_2} \right] - \\ & - \frac{1}{h_2^2} \frac{dx_1}{dx_2} \left[h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} - h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 \right] \\ & = \frac{1}{2V} \left[h_2^2 + h_1^2 \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{1}{h_2^2} \frac{dx_1}{dx_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

特别当 $h_1 = h_2 = h$ 时,有

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_1}{dx_2^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_1}{dx_2} - \\ & - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{1}{2V} \left[1 + \left(\frac{dx_1}{dx_2} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{dx_1}{dx_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

4. 现在来推导广义傍轴轨迹方程,即中心轨迹(轨迹轴)是任意曲线时的情况. 限于二维的考虑,可直接利用(9)式.

不妨设 $x_1=0$ 曲线是中心轨迹,这总可以由选择常数来办到. 仅考虑傍轴情况, x_1^2 和

$\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2$ 以上的项均可略去,于是得

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} + \left(\frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \frac{dx_1}{dx_2} - \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) = 0, \quad (11)$$

将电位 V 在轴附近展开成级数

$$V(x_1, x_2) = \sum_k u_k(x_2) x_1^k, \quad (12)$$

式中

$$u_k(x_2) = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{\partial^k V}{\partial x_1^k} \right\}_{x_1=0}, \quad (13)$$

显然有

$$u_0(x_2) = V_0(x_2), \quad (14)$$

即中心轨迹上的电位。如果是轴对称的系统,则需在展开式中,令奇次项的系数为零。

将上述方程代入(11)式,并考虑到场方程,经过适当的计算后,就可得到正交曲面坐标系下的广义傍轴轨迹方程

$$2Vx_1'' + \left(\frac{4}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} V + \frac{2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} V + V' \right) x_1' + \left[2h_2^2 K^2 V \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) - \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \right) V' + V'' \right] x_1 = 0, \quad (15)$$

式中 $x_1' = \frac{dx_1}{dx_2}$, $V' = \frac{dV}{dx_2}$ 等等,而电位及其各阶导数均取轴上的值; K 表中心轨迹的曲率,在一般情况下,它是 x_2 的函数。

以上所得到的广义傍轴轨迹方程(15),与文献[7, 8, 15]中所给的基本上是一致的。

三、轨迹的充要条件

1. 我们来考虑,在何种条件下,轨迹与 x_2 曲线,即曲面

$$x_1 = \text{常数}$$

和

$$x_3 = \text{常数}$$

的交线重合。由于曲线 x_2 是随意选定的,故以下的讨论是普适的。

由普遍轨迹方程(8),可以得到条件

$$\frac{h_2}{2\sqrt{V}} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \sqrt{V} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = 0, \quad (16a)$$

$$\frac{h_2}{2\sqrt{V}} \frac{\partial V}{\partial x_3} + \sqrt{V} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} = 0, \quad (16b)$$

即当条件(16)成立时,轨迹就和曲线 x_2 重合。

利用曲率半径公式^[3]和坐标曲线的正交条件,可以将(16)式写成

$$R_{21} = -\frac{2V}{E_{n1}}, \quad (17a)$$

$$R_{23} = -\frac{2V}{E_{n3}}, \quad (17b)$$

式中 R_{21}, R_{23} 分别表示曲线 x_2 在 (x_1, x_2) 面上和在 (x_2, x_3) 面上的主曲率半径, 而 E_{n1}, E_{n3} 则表示相应的主法线方向的场强.

方程(17)是电子光学理论中已知关系^[1]的推广, 它具有明显的物理意义.

2. 现在证明所得到的条件(16)或(17)就是轨迹与曲线 x_2 重合的充分与必要条件. 为此, 由普遍运动方程(4)得, 当 $x_1 = \text{常数}$, $x_3 = \text{常数}$ 时有

$$-h_2 \dot{x}_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = \frac{e}{m_0} \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad (18a)$$

$$-h_2 \dot{x}_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x_3} = \frac{e}{m_0} \frac{\partial V}{\partial x_3}, \quad (18b)$$

$$\frac{d}{dt}(h_2^2 \dot{x}_2) - h_2 \dot{x}_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} = \frac{e}{m_0} \frac{\partial V}{\partial x_2}. \quad (18c)$$

于是可得: 如果曲线 x_2 是轨迹, 则运动方程必为(18); 反之, 如果运动方程是(18), 则必有 $x_1 = \text{常数}$, $x_3 = \text{常数}$, 即 x_2 曲线是轨迹. 这就证明了方程(18)是运动轨迹与 x_2 曲线重合的充分与必要条件.

利用能量守恒定律可以证明, 方程(18a), (18b)和方程(16a), (16b)完全等价, 而当方程(18a), (18b)成立时, 方程(18c)自然满足, 即可以证明方程(16)和(18)完全等价. 这从而就证明了方程(16)或(17)是轨迹与曲线 x_2 重合的充分与必要条件.

3. 我们得到的是微分方程组(16)或(17), 现在指出, 由此即可导出空间电荷流的普遍方程. 速度 $\mathbf{v}$ 可写成

$$\mathbf{v} = h_2 \dot{x}_2 \mathbf{i}_2. \quad (19)$$

利用能量守恒定律, 方程(18a)的积分给出

$$V = \frac{p(x_2, x_3)}{h_2^2}, \quad (20)$$

$p(x_2, x_3)$ 是未知函数. 代入(18b)得

$$h_2 \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad (21)$$

但 h_2 不恒为零, 故必有

$$p = p(x_2), \quad (22)$$

即 p 仅是 x_2 的函数. 函数 $p(x_2)$ 与广义动量 P 之间有关系

$$p(x_2) = \frac{m_0}{2e} P. \quad (23)$$

方程(20)和(22)表示为了使电子沿坐标曲线 x_2 运动所必需的电位分布. 但 V 同时必须满足场方程; 将 V 代入场方程, 即得 $p(x_2)$ 应满足

$$F_1 \frac{d^2 p}{dx_1^2} + F_2 \frac{dp}{dx_2} + F_3 p = \begin{cases} 0, \\ -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \end{cases} \quad (24a)$$

$$F_1 \frac{d^2 p}{dx_1^2} + F_2 \frac{dp}{dx_2} + F_3 p = \begin{cases} 0, \\ -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \end{cases} \quad (24b)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{h_1^4}, \\ F_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \\ F_3 &= \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{h_2^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ρ 表空间电荷密度, 以 $h_1 h_2 h_3 \dot{x}_2 dx_1 dx_3$ 乘(24)两端, 并在电子注截面范围内积分, 得

$$\sqrt{p} \left\{ \bar{F}_1 \frac{d^2 p}{dx_2^2} + \bar{F}_2 \frac{dp}{dx_2} + \bar{F}_3 p \right\} = \begin{cases} 0, \\ a I_0, \end{cases} \quad (26a)$$

$$(26b)$$

式中

$$\bar{F}_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} F_n dx_1 dx_3 \quad (n = 1, 2, 3), \quad (27)$$

$\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ 表示电子注截面边缘的坐标, $a = \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_0}{2e}}$, 而

$$I_0 = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \rho h_1 h_2 h_3 \dot{x}_2 dx_1 dx_3. \quad (28)$$

常微分方程(26)是静电空间电荷流的普遍方程。

4. 我们从普遍运动方程出发, 自然地导出上述一些结果。我们认为, 轨迹的充要条件是微分方程组(16)或(17), 而其余的一切都只是它的推论。条件(16)或(17)的充分性和必要性也得到了比较严格的证明。这和文献[9—14]中所述的有原则性的不同。在文献[9—14]中, 从方程(24), (25)出发, 根据对函数 F_n 的性质的研究来确定轨迹的充要条件, 不可避免地引起了一些不确定性^[18], 而且所提出的条件的充分性和必要性也不能严格地证明。

四、轨迹的稳定性问题

1. 根据以上各节所述结果, 已经有可能有效地(至少在理论上)解决静电系统中电子运动的轨迹问题。设在某选定的正交坐标系中场的分布已知, 则按第二节所得结果, 可以得到轨迹方程和傍轴轨迹方程, 解此方程即得轨迹曲线。另一方面, 设所要求的轨迹曲线已给定, 则可选择此曲线为坐标之一, 据此适当地构成一组正交系(见第六节), 得微分方程(26), 解之即得到 $p(x_2)$ (见第五节), 从而求得所需的电位分布 V , 并代入充要条件(16)或(17)进行判断。虽然与文献[9—14]比较, 这里的步骤稍麻烦些, 但可避免其不确定性。此外, 充要条件(17)有比较明显的物理意义, 这在判断时是有帮助的。

不过, 在上面的研究中, 未考虑轨迹的稳定性问题, 因而所确定的轨迹是否稳定, 尚无法判定。

2. 在任意正交曲面坐标系中, 电子的运动方程和轨迹方程都是非线性的, 原则上虽可用 Ляпунов 方法来研究它的稳定性问题^[4], 但将遇到极大的数学上的困难。下面我们从物理概念出发, 根据力函数的性质, 提出判断轨迹稳定性的条件。虽然不是很严格的, 但

在一般情况下, 和 Ляпунов 方法所给结果一致。

3. 在电子注的边缘轨迹上, 电子同时受以下各种力的作用: 静电场作用力、空间电荷力和电子运动的离心力。在轨迹上的各点, 此数力均平衡, 即由方程(16)所表示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_2^2 \dot{x}_2^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} &= - \frac{e}{m_0} \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ \frac{h_2^2 \dot{x}_2^2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} &= - \frac{e}{m_0} \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中 V 应满足泊松方程。

设由于微扰 (不论是何种微扰) 电子注边缘发生变化: $\alpha_{1,2} \rightarrow \alpha_{1,2} + \delta_1$; $\beta_{1,2} \rightarrow \beta_{1,2} + \delta_2$, 方程(29)遭到破坏。但是, 如果有条件

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{(h_2 \dot{x}_2)^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{e}{m_0} \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\} \Big|_{x_1=\alpha_{1,2}} < 0, \\ K_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{(h_2 \dot{x}_2)^2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{e}{m_0} \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right\} \Big|_{x_3=\beta_{1,2}} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

则将产生一个抗干扰力, 从而使边缘轨迹可能恢复平衡。因而, 方程(30)就可以看作是轨迹可能稳定的条件。条件(30)可以推广至任一层轨迹。

五、空间电荷流方程的解

1. 一切静电空间电荷流均满足方程(26), 如能求得此方程的解 $p(x_2)$, 则可得到电子注内部的电位分布, 强流电子光学的所谓“内部”命题即得以解决。此电位分布在电子注边缘上的值 $V(\alpha_{1,2}, \beta_{1,2})$, 就是确定电子注外部场的边界条件。按静电理论, 已知边界条件, 场可唯一地确定。

由此可见, 方程(26)的解有重要的理论和实际的意义。这类方程在某些特殊坐标下, 已被较详细的讨论过(例如见文献[14]), 但是, 尚未见到对它进行一般性的研究。

2. 我们先来看看边界条件。为简单计, 只考虑电子从阴极出发的情形(对于其他情况不会有原则性的不同)。在本节内, 我们暂用 x 代替 x_2 。于是, 在空间电荷限制下, 边界条件可写成

$$p(x_0) = 0, \quad (31a)$$

$$\frac{dp}{dx} \Big|_{x=x_0} = 0; \quad (31b)$$

上面条件是附加在方程(26)上的。但是, 当不考虑空间电荷效应时, 即对于齐次方程(26a), 条件(31a)和(31b)不能同时成立。不然, 按齐次方程理论, 在条件(31a)和(31b)下, 方程(26a)仅有零解。事实上, 如果略去空间电荷效应, 则当电子的初速和初加速均为零时, 电子将不能从阴极出发, 不能形成空间电荷流。所以对于齐次方程(26a), 边界条件应写成

$$\left. \begin{aligned} p(x_0) &= 0, \\ \frac{dp}{dx} \Big|_{x=x_0} &= \text{常数}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

方程(26a)有满足条件(32)的唯一解。

3. 先考虑齐次方程 (26a) 的解. 不失普遍性, 设 $\bar{F}_1 \equiv 0$, 且 $\bar{F}_n$ 连续并有以后所需的各阶导数. 令

$$\left. \begin{aligned} A_1(x) &= \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1}, \\ A_2(x) &= \frac{\bar{F}_3}{\bar{F}_1} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

则 (26a) 可化成典型形式

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + A_1(x) \frac{dp}{dx} + A_2(x)p = 0, \quad (34)$$

这类方程的解已详细地研究过^[3].

4. 现在考虑方程 (26b) 的解, 使满足条件 (31). 引入变换

$$x = x_0 e^y, \quad (35)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(y) &= \frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} x_0 e^y - 1, \\ \phi_2(y) &= \frac{\bar{F}_3}{\bar{F}_1} x_0^2 e^{2y}, \\ \phi_3(y) &= a I_0 \frac{x_0^2}{\bar{F}_1} e^{2y}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

则方程 (26b) 化为

$$\frac{d^2 p}{dy^2} + \phi_1(y) \frac{dp}{dy} + \phi_2(y)p = \frac{\phi_3(y)}{\sqrt{p}}, \quad (37)$$

边界条件为

$$p(0) = p'(0) = 0. \quad (38)$$

变换 (35) 不影响函数的解析性, 于是有展式

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(y) &= \sum_k \frac{\phi_1^{(k)}(0)}{k!} y^k = \sum_k c_k y^k, \\ \phi_2(y) &= \sum_k \frac{\phi_2^{(k)}(0)}{k!} y^k = \sum_k d_k y^k, \\ \phi_3(y) &= \sum_k \frac{\phi_3^{(k)}(0)}{k!} y^k = \sum_k e_k y^k. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

试取以下形式的解:

$$p(y) = y_0 y^n \left[1 + \sum_k q_k y^k \right], \quad (40)$$

它能满足边界条件 (38). 于是有

$$\sqrt{p} = \sqrt{y_0} y^{n/2} \left[1 + \sum_k g_k y^k \right]. \quad (41)$$

将有关级数代入 (37), 并利用条件 (38), 可以得到非零解存在的条件是

$$n = \frac{4}{3},$$

而级数展开系数之间有关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{9} y_0^{3/2} &= \frac{a I_0 x_0^2}{\bar{F}_1(0)} = c_0, \\ g_1 + 7q_1 + 3c_0 &= c_1/c_0, \\ (g_2 + 17.5q_2 + 7g_1q_1) + 3(c_0g_1 + c_1 + 1.75q_1c_1) + 2.25d_0 &= c_2/c_0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

这样就可以得到,在任何情况下解总可以写成

$$p(y) = \left[\frac{9}{4} \frac{a I_0 x_0^2}{\bar{F}_1(0)} \right]^{2/3} y^{4/3} \left[1 + \sum_k q_k y^k \right]. \quad (43)$$

由此得到

$$I_0 = \frac{4}{9} \frac{\bar{F}_1(0)}{a x_0^2} V^{3/2} \cdot B, \quad (44)$$

式中

$$B = h_2^3 y^{-2} \left[1 + \sum_k q_k y^k \right]^{-3/2} \quad (45)$$

表示对于不同坐标系的修正因子.

所得到的解表明,可以把二分之三次方定律推广至一般的情形. 利用所得结果对几种简单正交曲面坐标系的计算,和文献[14]中所给相同.

六、正交系的构成

1. 上述全部理论基于利用正交坐标系,特别是按一已知曲线构成一组适当的正交坐标系. 考虑到实际上的需要,我们仅限于对二维曲线的情形作一般的研究.

设已给曲线

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \quad (46)$$

问题在于构成一正交系,使其中的一组曲线有一根正好与(46)重合.

取正交坐标系 (x_1, x_2) , 使

$$x_1 = \varphi_1(x, y) = C \quad (47)$$

为一组坐标曲线,则当 $C = C_1$ 时即为(46),即一组符合要求的曲线已构成,剩下的问题是构成另一组与此组正交的曲线,并求出度规系数. 设

$$x_2 = \varphi_2(x, y) = D \quad (48)$$

是欲求的曲线族,则有正交条件

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad (49)$$

或写成

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = - \left(\frac{dy}{dx} \right)_2^{-1}. \quad (50)$$

于是得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \phi(x, y); \quad (51)$$

式中

$$\phi(x, y) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) \quad (52)$$

是已知函数. 这样, 问题就归结为解微分方程(51). 于是

$$y = \int \phi(x, y) dx + D' \quad (53)$$

就是待求的曲线族. 所需的度规系数为

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \quad (i = 1, 2), \quad (54)$$

或

$$h_i^2 = \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)^2\right]^{-1} \quad (i = 1, 2). \quad (55)$$

2. 在实际情况下, 给出的曲线常可化为

$$y = f(x), \quad (56)$$

这时, 函数 $\varphi_1(x, y)$ 有以下两种写法:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{y}{f(x)} = C, \quad (57)$$

或

$$\varphi_1(x, y) = y - f(x) = C. \quad (58)$$

根据以上两种不同的写法, 可以构成两类不同的正交坐标系, 其中一类是具有对称轴的, 另一类没有对称轴. 每一类中又有两种不同选择常数的方法, 故一共有四种构成正交系的方程. 这里仅将结果写出:

A. 具有对称轴的坐标系

$$(i) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{y}{f(x)}, \\ y^2 + 2 \int_{x_2}^x \frac{f(x)}{f'(x)} dx &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{f'(x)}{\sqrt{y^2[f'(x)]^2 + f^2(x)}} \cdot \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \\ h_2 &= \frac{f^2(x)}{\sqrt{y^2[f'(x)]^2 + f^2(x)}}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$(ii) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{y}{f(x)}, \\ x_2 &= \frac{y^2}{2} + \int \frac{f(x)}{f'(x)} dx; \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{f'(x)}{\sqrt{y^2[f'(x)]^2 + f^2(x)}}, \\ h_2 &= \frac{f^2(x)}{\sqrt{y^2[f'(x)]^2 + f^2(x)}}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

对称轴就是 $y = 0$ 即 x 轴, 方程(59),(60)就是文献[17]所提出的.

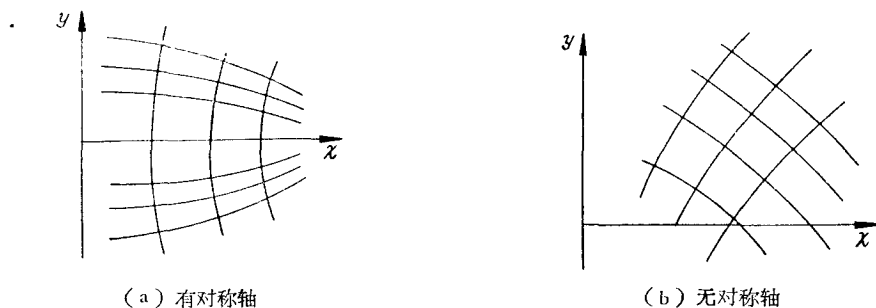


图1 两种正交曲线坐标

B. 不具有对称轴的坐标系

$$(iii) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= y - f(x), \\ y + \int_{x_2}^x \frac{1}{f'(x)} dx &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{f'(x)}{\sqrt{[f'(x)]^2 + [f'(x_2)]^2}}, \\ h_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$(iv) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= y - f(x), \\ x_2 &= y + \int \frac{1}{f'(x)} dx; \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}, \\ h_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

在图 1(a) 及图 1(b) 中示出两类正交的大致情况. 没有对称轴的坐标系, 在研究某些静电聚焦系统中, 可能得到应用.

七、结 语

本文研究静电系统中电子运动轨迹的理论, 得到了以下的结果:

1. 导出了任意正交坐标系下的普遍轨迹方程和广义傍轴轨迹方程;
2. 提出微分方程组(16)或(17)作为轨迹与某曲线重合的充分与必要条件;
3. 提出轨迹可能稳定的条件(30);
4. 求解空间电荷流普遍方程, 得到了一般形式的解;

5. 讨论了按已知曲线构成正交系的一般方法,给出了四种具体的方程.
本文中有部分计算工作是李国恩、冯桂云两同学在毕业设计中进行的.

参 考 文 献

- [1] 谢曼, O. И., 电子光学理论基础 (人民教育出版社, 1958).
- [2] Glaser, W., Grundlagen der Elektronenoptik (1952).
- [3] 斯米尔诺夫, B. И., 高等数学教程, 二卷一分册, 二分册; 四卷二分册 (人民教育出版社).
- [4] 秦元勳, 运动稳定性的一般问题讲义 (科学出版社, 1958).
- [5] Morse, P. and Feschbach, H., Methode of theoretical physics (1953).
- [6] Cotte, M., *Ann. Phys. Paris*, **10** (1938), 333.
- [7] Wendt, G., *Z. Phys.*, **120** (1943), 720.
- [8] Sturrok, P. A., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A245** (1952), 155.
- [9] Meltzer, B., *J. Electronics and Control*, **2** (1956), 118.
- [10] Lucas, A. R., Meltzer, B. and Stuart, G. A., *J. Electronics and Control*, **4** (1958), 160.
- [11] Meltzer, B. and Lucas, A. R., *J. Electronics and Control*, **4** (1958), 454.
- [12] Water, W. E., *J. Appl. Phys.*, **30** (1959), 368.
- [13] Kirstein, P. T., *J. Electronics and Control*, **4** (1958), 457.
- [14] Mueller, W. M., *J. Electronics and Control*, **6** (1959), 499.
- [15] Waters, W. E., *J. Appl. Phys.*, **27** (1958), 100.
- [16] Овчаров, В. Т., *ДАН СССР*, **107** (1956), 1, 47.
- [17] Овчаров, В. Т., *Радиотехника и электроника*, **2** (1957), 698.
- [18] Овчаров, В. Т., *Радиотехника и электроника*, **4** (1959), 1741.
- [19] Кормишчин, Б. Т., Овчаров, В. Т., *Радиотехника и электроника*, **5** (1960), 1112.
- [20] Овчаров, В. Т., *Радиотехника и электроника*, **7** (1962), 1367.
- [21] Данилов, В. Н., *Радиотехника и электроника*, **8** (1963), 1892.
- [22] Данилов, В. Н., *Радиотехника и электроника*, **8** (1963), 2046.
- [23] 刘盛纲、刘世明, 物理学报, **21** (1965), 2015.

К ТЕОРИИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Лю Син-гон

(Чэндуский Радиотехнический Институт)

Резюме

В статье систематически изучена теория траектории электронов в электростатической системе, получены следующие результаты:

- 1) Выведены уравнения траектории в любой ортогонально-криволинейной системе координат и обобщенное уравнение параксимальных траекторий.
- 2) Представлено уравнение (16) или (17) в качестве необходимого и достаточного условия, при котором траектория совпадает с какой заданной кривой.
- 3) Выведено условие стабильности траектории.
- 4) Приведено общее решение уравнения пространственного потока, показано, что закон Богуславского-Лангмюир можно распространить в любой системе.
- 5) Обсуждена общая методика построения ортогонально-криволинейной системы координат по заданной кривой, дано четыре конкретных уравнений.