

π 介子和核子在低能的散射*

胡 寧

(北京大学物理系)

提 要

本文讨论了经过减除的 π -核子散射色散关系和通常拉格朗日描述及其重整化处理间的关系。指出一次减除可以解释为作用常数的重整化。我们用经过减除的色散关系处理了 π -核子 S 波散射。计算结果指出, π 介子和核子间的相互作用应该是赝矢量型而不是赝标型的。

一、引 言

π 介子和核子的低能量散射是在介子理论发展的过程中, 一直在用不同的理论和方法加以处理的重要问题。在实验上, 对这个散射现象的观察和分析已作过最为详尽的工作。任何一个新的理论或近似方法的提出都必须首先在这个问题上受到实验的检验。人们很早就知道, π 介子和核子间的相互作用可以有赝标量和赝矢量两种类型, 这两种类型的相互作用给出相同的低能 P 波散射, 但两者都不能很好的解释在实验上观察到的 S 波散射, 赝标型相互作用所预言的 S 波散射比实验结果大得多, 而赝矢量型作用则相反的预言 S 波的散射是几乎不存在的。大家知道, 赝矢量型相互作用是不可重整化的, 这是很多人接受赝标型相互作用的一个重要原因。但是, 目前并没有充分的理由认为, 基本粒子的相互作用必须是可以重整化的。事实上, 导致 β 衰变的相互作用就是不可重整化的。

在色散关系理论被提出以后, Chew 等人^[1]曾经通过较系统的色散关系的处理指出, 前面所述赝标型相互作用所给出过大的 S 波散射, 被交叉道中 π -核子的 $(3, 3)$ 共振态的影响所压低。利用双重色散关系, Bowcock 等人^[2]进一步指出, 原有的 S 波散射和交叉道 $(3, 3)$ 态对 S 波的贡献几乎互相抵消, 实验上观察到的 S 波散射, 实际上是由于 π - π 相互作用所造成的。必须指出, 在上面两个工作里, 对色散关系都未进行减除, 而高能实验结果指出必须进行一次减除。高能现象对于低能散射还有很多效应需要考虑, 其中主要的是非弹性散射对色散关系的修正。所以, 为着确定色散关系是否需要减除, 最好以低能散射现象本身的条件为根据。当然, 进行减除总会降低高能效应这个不确定因素的比重, 这对于处理低能散射也将是有利的。下面我们将着重讨论减除对低能现象本身的意义。

色散关系理论的一个重要的特点, 是它不再具有通常场论计算中所遇到的发散困难。我们还注意到 π -核子散射的色散关系的极点项正是通常微扰计算的玻恩项, 这是色散关系和通常拉格朗日描述方式间的一个重要的联系。在 Chew 等人所用的未经减除的色散

* 1965 年 8 月 4 日收到。

关系里的极点项,只给出赝标型相互作用的玻恩项。本文将指出,如果对这个色散关系进行一次减除,那么在新的式子中将会出现赝矢型相互作用的玻恩项,以及由于“ t 道”中 π - π 相互作用所贡献的玻恩项。如果我们适当的选取减除能量 ν_0 ,除代表连续谱的积分项以外,色散关系中所有极点项和常数项将可解释为只代表上述两类“原始作用”的玻恩项,而减除的积分项也只代表作用常数重整化的抵消项。这样,减除的色散关系和通常微扰计算的对应就更明确的显示出来了。在最后一节,我们将应用本文所给出的减除色散关系处理 π -核子低能的 S 波散射。我们的计算指出,赝标型相互作用不能给出与实验相符的结果。为着与实验相符,色散关系的玻恩项必须是由赝矢型相互作用给出的。

二、减除的色散关系

我们将采用 Chew 等人所用的符号。 π 介子和核子的散射矩阵可以写成下面形式

$$\left. \begin{aligned} T &= -(2\pi)^{-2} i \delta^4(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \sqrt{\frac{M^2}{4E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} M_{\beta\alpha}, \\ M_{\beta\alpha} &= \bar{u}_2 \left\{ -\delta_{\beta\alpha} A^{(+)} - \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] A^{(-)} + \delta_{\beta\alpha} i \gamma \cdot Q B^{(+)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] i \gamma \cdot Q B^{(-)} \right\} u_1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 q_1 和 q_2 为入射和出射 π 介子的四度动量; p_1 和 p_2 为始态和末态核子的四度动量; β, α 代表出射和入射介子的同位旋分量; u_2 和 u_1 为末态和始态的核子的 Dirac 波函数; M 为核子的静止质量,介子的静止质量已取为 1。下面我们还将采用自然单位 $\hbar = c = 1$ 。通常赝标型相互作用所给出的玻恩项为

$$\left. \begin{aligned} T_B &= -(2\pi)^{-2} i \delta^4(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) \sqrt{\frac{M^2}{4E_1 E_2 \omega_1 \omega_2}} M_B, \\ M_B &= \frac{g_r^2}{2M(\nu_B - \nu)} \bar{u}_2 i \gamma_5 \tau_\beta [M + i \gamma \cdot (P + Q)] i \gamma_5 \tau_\alpha u_1 + \\ &\quad + \frac{g_r^2}{2M(\nu_B + \nu)} \bar{u}_2 i \gamma_5 \tau_\alpha [M + i \gamma \cdot (P - Q)] i \gamma_5 \tau_\beta u_1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 g_r 为合理化的作用常数,

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2), \quad Q = \frac{1}{2} (q_1 + q_2), \\ \nu &= -P \cdot Q/M, \quad \nu_B = -(1 + 2\kappa^2)/2M, \quad \kappa = \frac{1}{2} (q_1 - q_2), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ν 和 κ 分别代表这个散射过程的总能量和动量交换变数。(2)式的极点由 $\nu = \pm \nu_B$ 给出。比较(1)式和(2)式,我们很容易得到

$$A_B^{(\pm)} = 0, \quad B_B^{(\pm)} = \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} \mp \frac{1}{\nu_B + \nu} \right). \quad (4)$$

于是未经过减除的色散关系可写为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} A^{(\pm)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(\pm)}(\nu', \kappa^2) \left(\frac{1}{\nu' - \nu} \pm \frac{1}{\nu' + \nu} \right), \\ \operatorname{Re} B^{(\pm)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} \mp \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(\pm)}(\nu', \kappa^2) \left(\frac{1}{\nu' - \nu} \mp \frac{1}{\nu' + \nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在上式中, 我们把 ν 和 κ^2 看作是 $A^{(\pm)}$ 和 $B^{(\pm)}$ 的两个独立变数, 对 ν' 的积分代表主值积分。

很多作者曾经强调指出, (5) 式可能是没有意义的, 因为高能的实验结果指出, 须要对 (5) 式进行一次减除。如果对 (5) 式进行一次减除, 将会出现一个减除的积分。下面我们将讨论这个减除积分的意义。为着这个目的, 我们先考虑一下将 (2) 式中 $g_r \gamma_5 \tau_a$ 和 $g_r \gamma_5 \tau_B$ 换成 $f_r \gamma_5 \gamma \cdot q_1 \tau_a$ 和 $f_r \gamma_5 \gamma \cdot q_2 \tau_B$, 这等于把赝标型相互作用换成赝矢量型相互作用。将替换后的 (2) 式和 (1) 式比较, 得

$$\left. \begin{aligned} A_B^{(+)} &= \frac{g_r^2}{M}, \quad A_B^{(-)} = 0, \\ B_B^{(+)} &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} - \frac{1}{\nu_B + \nu} \right), \\ B_B^{(-)} &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} + \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) - \frac{g_r^2}{2M^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在上式中, 我们曾代入 $f_r = g_r/2M$ 。从上面结果我们立刻看到, 赝矢量型相互作用所给出的玻恩项中的极点项和赝标型相互作用所给出的完全相同, 这是使得一些人认为色散关系的玻恩项只可能代表赝标型相互作用的主要原因。(6) 式除极点项外还包括两个常数项, 我们知道为着使色散关系中出现常数项, 必须对色散关系进行一次减除。这表明赝矢量型相互作用的玻恩项只可能在经过一次减除的色散关系中出现。经过一次减除后, (5) 式应换为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} A^{(\pm)}(\nu, \kappa^2) &= F^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2) + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(\pm)}(\nu', \kappa^2) \left[\left(\frac{1}{\nu' - \nu} \pm \frac{1}{\nu' + \nu} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{\nu' - \nu_0} \pm \frac{1}{\nu' + \nu_0} \right) \right], \\ \operatorname{Re} B^{(\pm)}(\nu, \kappa^2) &= G^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2) + \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} \mp \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(\pm)}(\nu', \kappa^2) \left[\left(\frac{1}{\nu' - \nu} \mp \frac{1}{\nu' + \nu} \right) - \left(\frac{1}{\nu' - \nu_0} \mp \frac{1}{\nu' + \nu_0} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 $F^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2)$ 和 $G^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2)$ 由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} F^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2) &= \operatorname{Re} A^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2), \\ G^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2) &= \operatorname{Re} B^{(\pm)}(\nu_0, \kappa^2) - \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu_0} \mp \frac{1}{\nu_B + \nu_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 ν_0 代表减除能量 ν 的值。由 (7) 式给出的减除色散关系和通常的不同, 通常的 $A^{(-)}$ 和 $B^{(+)}$ 的色散关系不是由对 $A^{(-)}$ 和 $B^{(+)}$ 的减除给出, 而是由对 $A^{(-)}/\nu$ 和 $B^{(+)}/\nu$ 减除给出,

即

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{\nu} A^{(-)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{1}{\nu_0} F^{(-)}(\nu_0, \kappa^2) + \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(-)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right) - \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{1}{\nu' - \nu_0} - \frac{1}{\nu' + \nu_0} \right) \right], \\ \operatorname{Re} \frac{1}{\nu} B^{(+)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{1}{\nu_0} G^{(+)}(\nu_0, \kappa^2) + \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(+)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right) - \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{1}{\nu' - \nu_0} - \frac{1}{\nu' + \nu_0} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

当未经减除的色散关系的积分不能收敛时,上式比(7)式中的相应式子将更能保证积分的收敛。但一般认为,未经减除的对 $A^{(-)}$ 和 $B^{(+)}$ 的色散关系,有很大的可能已经是收敛的¹⁾。所以由(7)式给出的经过减除的色散关系有很大的可能已经满足收敛的要求。所以我们将接受(7)式为一次减除的色散关系。

当 $\nu = \nu_0$ 时,由(1)式给出的矩阵元 M 可写为

$$\begin{aligned} M_{\beta\alpha}^{(0)} &= M_B + \bar{u}_2 \{ F^{(+)}(\nu_0, \kappa^2) \delta_{\beta\alpha} + F^{(-)}(\nu_0, \kappa^2) \cdot \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] - \\ &\quad - G^{(+)}(\nu_0, \kappa^2) \delta_{\beta\alpha} \gamma \cdot Q - G^{(-)}(\nu_0, \kappa^2) \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \gamma \cdot Q \} u_1, \end{aligned} \quad (10)$$

M_B 是由(2)式给出的汤川型相互作用的玻恩项中的极点项。

由交叉对称条件

$$\left. \begin{aligned} F^{(-)}(\nu_0, \kappa^2) &= -F^{(-)}(-\nu_0, \kappa^2), \\ G^{(+)}(\nu_0, \kappa^2) &= -G^{(+)}(-\nu_0, \kappa^2), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

我们看到,当 $\nu_0 = 0$ 时,

$$F^{(-)}(0, \kappa^2) = G^{(+)}(0, \kappa^2) = 0, \quad (12)$$

于是(10)式可写为

$$M_{\beta\alpha}^{(0)} = M_B + \bar{u}_2 \left\{ F^{(+)}(0, \kappa^2) \delta_{\beta\alpha} - G^{(-)}(0, \kappa^2) \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \gamma \cdot Q \right\} u_1. \quad (13)$$

当 κ^2 取固定的值时,上式中含 $F^{(+)}(0, \kappa^2)$ 和 $G^{(-)}(0, \kappa^2)$ 的项,可以看成是由下面两个“原始相互作用”所给出的玻恩项:

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{a=1}^3 g_1^{(\pi\pi)} \bar{\psi} \psi \varphi_a \varphi_a, \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_2 = \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 g_2^{(\pi\pi)} \bar{\psi} \gamma_\mu [\tau_\beta, \tau_\alpha] \psi \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\mu} \varphi_\beta - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu} \varphi_\alpha \right), \quad (15)$$

1) 这是因为它们的积分包含着 $1/(\nu' - \nu)$ 和 $1/(\nu' + \nu)$ 两项之差,而不是两项之和。

式中

$$g_1^{(\pi\pi)} = F^{(+)}(0, \kappa^2), \quad g_2^{(\pi\pi)} = G^{(-)}(0, \kappa^2). \quad (16)$$

(14)式和(15)式实际上应代表由 t 道的 π - π 作用所导出的核子和 π 介子对的作用¹⁾,但在我们所考虑的“ S 道”里,这个作用可以看作是原始引入的. 对于低能现象,我们只需要考虑 $\kappa^2 \approx 0$ 的情况,所以在(16)中可以取 $\kappa^2 = 0$.

根据上面考虑,(7)式可换为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} A^{(+)}(\nu, \kappa^2) &= g_1^{(\pi\pi)}(\kappa_0^2) + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(+)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\nu' + \nu} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(+)}(\nu', \kappa_0^2) \frac{2}{\nu'}, \\ \operatorname{Re} A^{(-)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(-)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right], \\ \operatorname{Re} B^{(+)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} - \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(+)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right], \\ \operatorname{Re} B^{(-)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} + \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + g_2^{(\pi\pi)}(\kappa_0^2) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(-)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\nu' + \nu} \right] - \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(-)}(\nu', \kappa_0^2) \frac{2}{\nu'} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在上式中,我们曾对减除项取 $\kappa^2 = \kappa_0^2$. 一个很自然的 κ_0^2 值将是零. 但引入减除的另一目的是为着使积分收敛,这要求 κ_0^2 的值和 κ^2 相同. 上式中第一和第四式除对常数项的解释不同外,正是当 $\nu_0 = 0$ 时通常的一次减除的色散关系,第二和第三式正是通常未经减除的色散关系.

(17)式和通常写出的一次减除色散关系主要的分别是,常数项不再象通常那样解释为两个原始作用的玻恩项. 这里牵涉到色散关系的看法问题,一些人认为减除的色散关系里的 $F^{\pm}(\nu_0, \kappa^2)$ 和 $G^{\pm}(\nu_0, \kappa^2)$, 只应解释为在 $\nu = \nu_0$ 时观察到的振幅. 这表示他们对色散关系和通常拉格朗日描述的联系不感兴趣,或者甚至认为拉格朗日描述根本是不存在的. 我们的看法是减除的色散关系应和拉格朗日描述有密切的联系^[3]. 色散关系的每一项都应和拉格朗日描述相对应,因此不允许在 $\nu = \nu_0$ 时引入一个振幅的观察值. 按照我们的观点,(17)式的第一和第三式的最后一项积分可代表作用常数重整化的抵消项,它的出现是为着保证当 $\nu_0 = 0$ 时,(17)中只包含三个原始作用的玻恩项,这时的散射振幅即可作为作用常数 g_r , $g_1^{(\pi\pi)}$ 和 $g_2^{(\pi\pi)}$ 的定义.

上面结果可以看作是 Kroll-Ruderman 定理^[4]的推广. 这个定理的原来内容是:对于光子和核子碰撞产生介子的过程,在 $\nu = 0$ 时的跃迁矩阵,可以用原始的汤川型相互作用和电磁作用所给出的玻恩项完全代表. 我们注意到在我们的情况里,我们并不限定原始作用必须是汤川型的,比如由(14)和(15)式给出的 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 就不是汤川型的,因此我们

1) 应用 Frazer 和 Fulco 的办法,可以从 $\operatorname{Im} A(0, \kappa^2)$ 的解析行为证明, $g_i^{(\pi\pi)}$ 在 κ^2 复平面正实轴上有着和 π - π 作用完全相同的割线[见 Frazer and Fulco, *Phys. Rev.*, **117** (1960), 1606, Section V].

结果成立的条件将比 Kroll-Ruderman 定理成立的条件弱得多.

如果把 π 介子和核子间的赝标型相互作用换为赝矢型, 它对 (17) 的影响只是把赝标型作用的玻恩项换成赝矢型的玻恩项:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} A^{(+)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{g_r^2}{M} + g_1^{(\pi\pi)}(\kappa_0^2) + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(+)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\nu' + \nu} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(+)}(\nu', \kappa_0^2) \frac{2}{\nu'}, \\ \operatorname{Re} A^{(-)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} A^{(-)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right], \\ \operatorname{Re} B^{(+)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} - \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(+)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} - \frac{1}{\nu' + \nu} \right], \\ \operatorname{Re} B^{(-)}(\nu, \kappa^2) &= \frac{g_r^2}{2M} \left(\frac{1}{\nu_B - \nu} + \frac{1}{\nu_B + \nu} \right) + \frac{g_r^2}{2M^2} + g_2^{(\pi\pi)}(\kappa_0^2) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(-)}(\nu', \kappa^2) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\nu' + \nu} \right] - \frac{1}{\pi} \int d\nu' \operatorname{Im} B^{(-)}(\nu', \kappa_0^2) \frac{2}{\nu'}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(18)和(17)的分别只在于 $g_i^{(\pi\pi)}$ 的定义由(16)换为

$$\left. \begin{aligned} g_1^{(\pi\pi)} &= F^{(+)}(0, \kappa_0^2) - \frac{g_r^2}{M}, \\ g_2^{(\pi\pi)} &= G^{(-)}(0, \kappa_0^2) - \frac{g_r^2}{2M^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(17)和(18)式中所有的项都具有明确的测量上的意义. 下一节我们将通过和实验的比较来确定 π 介子和核子间的相互作用是赝标型还是赝矢型的.

三、 π 介子和核子的低能 S 波和 P 波散射

按照 Chew 等人的做法, 当只考虑低能的 S 波和 P 波散射时, 我们只需要考虑动量交换 κ 很小时的情况. 在这个范围内可以把 $g_i^{(\pi\pi)}$ 看成几乎是与 κ^2 无关的. 为着得出分波振幅的色散关系, 我们依照标准的办法引入

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} A^{(\pm)} &= \frac{W+M}{E+M} f_1^{(\pm)} - \frac{W-M}{E-M} f_2^{(\pm)}, \\ \frac{1}{4\pi} B^{(\pm)} &= \frac{1}{E+M} f_1^{(\pm)} + \frac{1}{E-M} f_2^{(\pm)}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中所有的量都是质心坐标中的量: W 为总能量, E 为核子的动能, f_1 和 f_2 代表自旋转向和不转向的两个振幅. κ^2 和散射角 θ 间的关系为

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} q^2 (1 - \cos \theta), \quad (21)$$

q 为介子的动量的绝对值.

下面我们将把(17)式中的能量变数 ν 换为实验室坐标中入射介子的能量 ν_L :

$$\nu_L = \nu + \kappa^2/M. \quad (22)$$

如果把 f_1 和 f_2 在质心坐标中的分波展开式只保留 S 波和 P 波, 并把 $\cos\theta$ 用 κ^2 表出, 我们得

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(\pm)}(\nu_L, \kappa^2) &= f_s^{(\pm)}(\nu_L) + 3f_{p3/2}^{(\pm)}(\nu) \left(1 - \frac{2\kappa^2}{q^2}\right), \\ f_2^{(\pm)}(\nu_L, \kappa^2) &= f_{p1/2}^{(\pm)}(\nu_L) + f_{p3/2}^{(\pm)}(\nu_L), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中 $f_l^{(\pm)}(\nu)$ 代表轨道角动量为 l 、总角动量为 J 的振幅, $f_s^{(\pm)} = f_{s1/2}^{(\pm)}$. 取上式对 κ^2 的展开式并求 $f_s(\nu_L)$ 和 $f_{p3/2}(\nu_L)$ 的解, 得

$$\left. \begin{aligned} f_s^{(\pm)}(\nu_L) &= f_1^{(\pm)}(\nu_L, 0) + \frac{1}{2} q^2 f_1^{(\pm)'}(\nu_L, 0), \\ -\frac{6}{q^2} f_{p3/2}^{(\pm)}(\nu_L) &= f_1^{(\pm)'}(\nu_L, 0) + \frac{1}{2} q^2 f_1^{(\pm)''}(\nu_L, 0), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中“'”代表对 κ^2 的微分. 由(21)和(24)我们进一步得

$$\begin{aligned} -\frac{6}{q^2} \operatorname{Re} f_{p3/2}^{(\pm)}(\nu_L) &= \left(\frac{E+M}{2W}\right) \operatorname{Re} \left\{ A^{(\pm)'}(\nu_L, 0) + \frac{1}{2} q^2 A^{(\pm)''}(\nu_L, 0) + \right. \\ &\quad \left. + (W-M) \left[B^{(\pm)'}(\nu_L, 0) + \frac{1}{2} q^2 B^{(\pm)''}(\nu_L, 0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

为了得出 $f_{p3/2}(\nu_L)$ 所满足的色散关系, 只需在上式右边代入等式(17)式, 然后再利用(20)式. 在下面计算中, 我们将忽略 $g_i^{(\pi\pi)}$ 对 κ^2 的微分(即假定 $g_i^{(\pi\pi)}$ 是 κ^2 的缓变函数). 引入(33)共振态的振幅

$$f_{33} = f_{p3/2}^{(+)} - f_{p3/2}^{(-)},$$

我们得 f_{33} 所满足的色散关系为

$$\begin{aligned} f_{33} &= \frac{4f^2}{3\omega} q^2 + \frac{q^2}{\pi} \int \frac{d\omega'}{q'^2} \operatorname{Im} f_{33}(\omega') \left[\frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{9} \frac{1}{\omega' + \omega} \right] - \\ &\quad - \frac{q^2}{\pi} \int \frac{d\omega'}{q'^2} \operatorname{Im} f_{33}(\omega') \cdot \frac{10}{9\omega}, \end{aligned} \quad (26)$$

上式最后一项积分是前一积分在 $\nu = 0$ (即 $\omega = 0$) 时的值, 如果略去最后一项, 上式即和 Chew 等人由(5)式所得的色散关系完全相同. 最后一项的存在, 对于 Chew 等人所得的有效力程近似解的形式并无影响. 他们所得的解可表为

$$f_{33} = e^{i\delta} \frac{1}{q} \sin \delta, \quad (27)$$

其中 δ 由下式给出:

$$\cot \delta = \frac{3\omega}{4f^2 q^3} (1 + \omega\gamma), \quad (28)$$

γ 为有效力程常数. 我们注意到, (26) 式中出现的最后一项反而使得(27)和(28)式更准确的符合 f_{33} 在 $\omega = 0$ 时的行为.

应用和 Chew 等人所用同样的计算得出 S 波的色散关系为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_s^{(\pm)}(\omega) &= -\frac{g_r^2}{2M} \left[\left(1 - \frac{\omega}{2M}\right) \pm \left(1 + \frac{\omega}{2M}\right) \right] + \theta^\pm g_1^{(\pi\pi)} + \\ &\quad + (1 - \theta^\pm) \omega g_2^{(\pi\pi)} + \frac{2M}{\pi} \int \frac{d\omega'}{q'^2} \operatorname{Im} f_{p3/2}^{(\pm)}(\omega') \left[\left(1 + \frac{2\omega'}{M} + \frac{\omega}{M}\right) \pm \right. \end{aligned}$$

$$\pm \left(1 + \frac{2\omega'}{M} - \frac{\omega}{M}\right) - \\ - \frac{2M}{\pi} \int \frac{d\omega'}{q'^2} \text{Im } f_{p3/2}^{(\pm)}(\omega') \left[\left(1 + \frac{2\omega'}{M}\right) \pm \left(1 + \frac{2\omega}{M}\right) \right], \quad (29)$$

式中 $\omega' = W' - M$, $\omega = W - M$, $v_L = (W^2 - M^2 - 1)/2M = \omega + (\omega^2 - 1)/2M$,
 $\theta^+ = 1$, $\theta^- = 0$.

和(26)式一样, 上式最后一项积分正是前一积分在 $\omega = 0$ 时的值. 忽略最后的积分项以及含 $g_1^{(\pi\pi)}$ 和 $g_2^{(\pi\pi)}$ 的项, 上式即变为 Chew 等人所得的相应的方程.

在上面推导里, 我们把 $g_i^{(\pi\pi)}$ 看成 κ^2 的缓变函数, 因而在计算中忽略去 $g_i^{(\pi\pi)}$ 对 κ^2 的微分. 为着估计这个忽略所造成的误差, 我们对减除项除取 $v_0 = 0$ 外, 还进一步取 $\kappa^2 = 0$, 这样 $g_i^{(\pi\pi)}$ 即不再是 κ^2 的函数, 但同时(17)的第一和第四式的最后一项减除积分将与 κ^2 无关(因 κ^2 已取为零). 进行和前面相同的计算, 我们发现(26)式的最后一项即不再出现, 但(29)式的最后一项换为

$$- \frac{2M}{\pi} \int \frac{d\omega'}{q'^2} \text{Im } f_{p3/2}^{(+)}(\omega') \left[\left(1 + \frac{\omega'}{2M}\right) \pm \left(1 + \frac{\omega}{2M}\right) \right]. \quad (30)$$

下面我们将根据(29)和(30)式讨论 S 波散射的解. 我们首先注意到, 不管(29)式的最后一项代表重整化的积分是由(29)式还是由(30)式给出, 这个积分与 M 无关的贡献恰好与前一积分与 M 无关的贡献相抵消, 所以(29)式的两个积分只有数量级为 $1/M$ 的贡献. 根据 Bowcock 等人的分析, $g_1^{(\pi\pi)}$ 和 $g_2^{(\pi\pi)}$ 项对(29)式的贡献的数量级也为 $1/M$, 因此在(20)式右边数量级为 1 的项只有第一项(我们把 $g_1^2/2M = 2Mf_\pi^2$ 看作是数量级为 1 的项, 因为 $g_1^2 \approx 14$ 是一个很大的量). 如果忽略去所有数量级为 $1/M$ 的项, (29)式变为

$$\left. \begin{aligned} f_s^{(+)}(\omega) &\approx -g_1^2/M, \\ f_s^{(-)}(\omega) &\approx 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

这正是引言中所提到的微扰论的结果. 上式给出的 $f_s^{(+)}$ 比实验值大一个数量级, 因此不可能是正确的. 在 Chew 等人的处理里, 由于没有考虑减除, 因而(29)式最后一个积分项不会出现, 前一积分中数量级为 1 的贡献就不被抵消. Chew 等人正是利用这个未被抵消的贡献来和(31)式第一式的右边相抵消而得出与实验相符的结果.

我们认为(29)式的最后一项(或(30)式)的存在, 是 $g_i^{(\pi\pi)}$ 代表观察的作用常数的重要前提, 因此不应被略去. 我们对色散关系进行减除, 不仅是考虑到高能的影响, 更重要的是考虑到作用常数重整化的要求.

值得指出的是: 过去曾经一度认为反核子的贡献压低了赝标量耦合的 S 波散射^[5], 但进一步的计算指出, 这个压低 S 波的效应和作用常数重整化对提高 S 波的效应相抵消, 这和我们这里的情况是非常相象的.

如果我们把 π -核子的相互作用换成赝矢量型, 即把(17)式换成(18)式, 上面所述与实验结果不符的困难立刻得到消除. 这个替换的后果等于在(29)式中把 $g_1^{(\pi\pi)}$ 换成 $g_1^{(\pi\pi)} + g_1^2/M$, 把 $g_2^{(\pi\pi)}$ 换成 $g_2^{(\pi\pi)} + g_2^2/2M^2$. 很容易看出, 这个替换的效果等于舍去(31)第一式右边的项. 这反应了大家所熟知的微扰论结果: 赝矢量耦合在非相对论极限不导致 S 波的散射. 这样, 我们就可把 S 波散射完全看成是“ t 道”的 π - π 作用所造成的.

作者愿意感谢曹昌祺和彭宏安两同志对本工作的批评, 这使作者澄清了一些重要的观点.

参 考 文 献

- [1] Chew, Goldberger, Low and Nambu, *Phys. Rev.*, **106** (1957), 1337.
- [2] Bowcock, Cottingham and Lurie, *Nuovo Ciments*, **16** (1960), 918; **19** (1961), 142.
- [3] 胡 宁, 物理学报, **18**(1962), 509.
- [4] Kroll and Ruderman, *Phys. Rev.*, **93** (1954), 233.
- [5] Brueckner, Gell-Mann and Goldberger, *Phys. Rev.*, **90** (1953), 476.

ON THE DISPERSION-RELATION TREATMENT OF THE LOW ENERGY PION-NUCLEON SCATTERING

HU NING

(Peking University)

ABSTRACT

The relation between the subtracted dispersion relations for the low energy pion-nucleon scattering and the usual Lagrangian formulation under the renormalization treatment is discussed in the present paper. It is shown that the subtraction actually represents the renormalization of the interaction constants. Using the subtracted dispersion relations we have treated the problem of the *S*-wave pion nucleon scattering. Our result shows that the interaction between the pion and the nucleon should be of the pseudo-vector type rather than the pseudo-scalar type.