

SU_3 羣的多項式基底及其 Clebsch-Gordan 系数的明显表达式^{*†}

侯 伯 宇

提 要

利用对称性与 Young 图在多项式空间上构成了 SU_n 羣的不可约表示及积表示的完全基底,从而不但区分了非单纯权也区分了积表示的非简单可约性,并在此基础上用构成不变量法得到 SU_3 羣的 Clebsch-Gordan 系数的明显表达式

由于基本粒子对称性及核物理研究的需要,引起了大家对 SU_3 群 C. G. 系数的注意,出现了一系列的工作^[1-6].

如所周知,要求得 C. G. 系数,实际上就要先对所有不可约表示均给出标准的基底,再将两个不可约表示的直接积准对角化——依直接积内含有的各个不可约表示子空间分为方块,而且使得在各个子空间内的基底均为标准的. 这样的变换系数就是 C. G. 系数. Racah^[7] 早已指出,为此需要解决三个问题: 1) 求得 Casimir 算子,即与所有的无穷小算子对易的算子,用来区别各不可约表示的空间; 2) 完整的对易算子集合,其本征矢在各不可约表示空间内构成完全的基底. 这样就可以解决由于 Cartan 子代数不是完整的对易算子集合而有的非单纯权的困难; 3) 非简单可约性,即在表示积的分解中含有若干等价表示时,有区别这些表示的方法,例如,引入新的算子及与之相关的量子数. Biedenharn^[5] 及 Klein^[8] 已经完满地求出了 SU_n 的 Casimir 算子. 文献 [3-6] 中分别解决了 SU_3 与 SU_n 的完全对易算子及完整基底问题,并求出了在这套基底上的无穷小算子的矩阵元,与 Гельфонд 及 Цейтлин^[9] 的结果相同. 文献 [5] 及 [7] 还提出了一些解决非简单可约性问题的方案,但由于求 C. G. 系数时基本上都是采用从最高权起的递推法,不易用来求得 C. G. 系数的明显表达式,推广到 SU_n 群更加困难.

我们认为,既然 SU_n 群的不可约表示与对称性有着紧密的连系^[10-13], 这些问题都可以用 Young 图得到直观简单的解决. 实际上这些问题已经得到了部分的解决: 1) 用 Young 图的恒幂元从张量空间分出各不可约表示空间^[10]; 2) 用标准 Young 盘区别每个不可约表示的基底^[13]; 3) 根据 Young 图乘积分解的格排列法则^[11-13], 判断表示积可分解为那些不可约表示,及各不可约表示的重数. 但是,为了计算 C. G. 系数,实质上有必要先拆开原有因子表示基底的对称性,再设法凑成所求积表示基底的对称性,这是很麻烦的,至今尚无现成的方法.

为了进一步解决这些问题,我们在第一节内对应于每一 Young 型的不可约表示引进

* 1965 年 7 月 23 日收到.

† 本文曾在 *Scientia Sinica*, XIV (1965), No. 3 上发表过.

了唯一的一组标准基,进而得到便于拆开各列间的对称性的列基,并在此基础上构成了有确定物理意义的正交基,结果与 Moshinsky 相似,但是可以利用现成的 SU_2 的 C. G. 系数,而不用递推计算. 在第二节里与积表示空间的每一个不可约子空间对应,找到了一个 Young 算子,这样就不仅区分了多重的等价不可约子空间,还具体给出了积多项式空间的各个不可约子空间. 这时可以不拆开原来的因子表示基底各列内固有的反对称性. 利用这些结果已经可以计算 C. G. 系数. 但是为了避免对称化的麻烦,在第三节里,采用不变量的方法,保证了我们的表示积中果然只有具有给定对称性(亦即属于给定不可约表示)的基底,一下子得到了 C. G. 系数的明显表达式.

本节从 SU_3 群的不可约张量表示出发,逐步引进了各种多项式基底. 首先交代一下我们采用的符号与定义. 为了避免行文过长,往往只限于用三阶张量作例子具体地写出来,而不作严格详尽的定义,相应的严格定义请参看标准的书籍如文献[10—14].

设 $a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, c_{i_n}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别为 SU_3 的不同矢量表示的基底; $a_{i_1} \times b_{i_2} \times \dots \times c_{i_n}$ 为其直接积(张量表示)空间的多项式基底. 如所周知, n 阶张量表示是完全可约的. n 阶置换的对称群群环(严格些说,是 Young 图行数不超过 3 的子环),与素恒幂元 e ($\equiv PN$, P 为各行对称化算子的积, N 为各列反对称化算子的积)的完全集合的分解对应, SU_3 群的 n 阶张量则按素恒幂元 e ($\equiv NP$) 分解为不可约表示.

例如,有如下的三阶素恒幂元(略去归一化因子):

$$e \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \equiv P_{abc} \equiv [\varepsilon + (ab) + (bc) + (ca) + (abc) + (cba)], \quad (1a)$$

$$e \begin{bmatrix} a & c \\ b \end{bmatrix} \equiv N_{ab}P_{ac} \equiv [\varepsilon - (ab)][\varepsilon + (ca)] = \varepsilon - (ab) + (ca) - (cba), \quad (1b)$$

$$e \begin{bmatrix} a & b \\ c \end{bmatrix} \equiv N_{ac}P_{ab} \equiv [\varepsilon - (ca)][\varepsilon + (ab)] = \varepsilon - (ca) + (ab) - (abc), \quad (1c)$$

$$e \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \equiv N_{abc} \equiv \varepsilon - (ab) - (bc) - (ca) + (abc) + (acb), \quad (1d)$$

式中, ε 为恒等置换;圆括号表示轮换.

将这些素恒幂元算子作用在三阶张量上,得到如下的不可约表示空间:

一个 $(3, 0)$ 型的对称张量不可约空间,它含有

$$e \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} a_i b_j c_k = a_i b_j c_k + a_j b_i c_k + a_i b_k c_j + a_k b_j c_i + a_k b_i c_j + a_j b_k c_i \\ \equiv \begin{bmatrix} a_i & b_j & c_k \end{bmatrix}; \quad (2a)$$

两个 $(1, 1)$ 型的等价而独立的不可约空间

$$e \begin{bmatrix} a & c \\ b \end{bmatrix} a_i b_j c_k = a_i b_j c_k + a_k b_j c_i - a_j b_i c_k - a_j b_k c_i \equiv \begin{bmatrix} a_i & c_k \\ b_j \end{bmatrix}, \quad (2b)$$

$$e \begin{bmatrix} a & b \\ c \end{bmatrix} a_i b_j c_k = a_i b_j c_k - a_k b_j c_i + a_j b_i c_k - a_k b_i c_j \equiv \begin{bmatrix} a_i & b_j \\ c_k \end{bmatrix}; \quad (2c)$$

一个 $(0,0)$ 型的反对称不可约张量空间

$$e \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline \end{array} a_i b_j c_k = a_i b_j c_k - a_j b_i c_k - a_i b_k c_j - a_k b_j c_i + a_k b_i c_j + a_j b_k c_i. \quad (2d)$$

注意,与通常的符号不同,我们用 $e \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ 表示算子,无 e 的 $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ 表示多项式. 文字 a, b, c 是与固定的格子相连系的, i, j, k 则是被置换的对象.

各不可约表示的维数等于 $i, j, k \cdots$ 分别取值 $1, 2, 3$ (可重复) 所构成的标准 Young 盘的个数^[13]. 例如 (2a), (2b), (2c), (2d) 的独立基数分别为 $10, 8, 8, 1$, 正好共计 27 维. 至于对应于同一 Young 型的 SU_3 的等价表示的重数,则等于对称群在这 Young 型下的表示的维数,也就是这个 Young 型的独立素恒幂元的个数.

以上,三阶张量的基底用三元多项式, n 阶张量的基底用 n 元多项式,结果区别了 Young 型相同而素恒幂元不同的表示空间,如 (2b), (2c). 但是,我们希望与每一种给定的等价不可约表示对应只引进一组基底. 于是我们采用二元多项式空间. 令与 Young 盘第一行各格对应的空间全为 a^I , 第二行全为 a^{II} (对于三行的 Young 盘,我们只考虑与之等价的二行 Young 图). 结果,对于每一给定型的不可约表示都只有唯一的一组二元多项式基底. 例如,令 $a = c = a^I, b = a^{II}$, 则 (2b) 可形式上看作

$$e \begin{array}{|c|} \hline a^I a^I \\ \hline a^{II} \\ \hline \end{array} a_i^I b_j^{II} c_k^I = \begin{array}{|c|} \hline a_i^I a_k^I \\ \hline a_j^{II} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \quad k \\ \hline j \\ \hline \end{array}. \quad (3)$$

这里,对各行内文字全相同的二元多项式,我们省略了文字符号.

显而易见,与标准盘 $\begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 2 \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 2 \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 3 \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \quad 2 \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \quad 3 \\ \hline 3 \end{array}$ 对应的多项式与 (2b) 或 (2c) 的相应多项式具有同样的性质,即: 1) 仍然是线性无关的; 2) 在 SU_3 作用下的变换性质相同,因此,仍旧构成 $(1,1)$ 型不可约表示的基底,以后称之为标准基.

为了便于拆开各列间的对称性,引进只保存列内反对称性的列多项式:

$$\begin{array}{|c|} \hline a_i \\ \hline b_j \\ \hline \end{array} c_k \equiv \frac{a_i c_k}{b_j} - \frac{a_j c_k}{b_i},$$

此处为了直观,我们将单项式 $a_i b_j c_k$ 写如 $\frac{a_i c_k}{b_j}$. 由 (1b), (2b) 得

$$\begin{array}{|c|} \hline a_i c_k \\ \hline b_j \\ \hline \end{array} = N_{ab} P_{ac} \frac{a_i c_k}{b_j} = N_{ab} \left(\frac{a_i c_k}{b_j} + \frac{a_k c_i}{b_j} \right) = \begin{array}{|c|} \hline a_i \\ \hline b_j \\ \hline \end{array} c_k + \begin{array}{|c|} \hline a_k \\ \hline b_j \\ \hline \end{array} c_i. \quad (4a)$$

同理可得

$$\begin{array}{|c|} \hline i \quad k \\ \hline j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline j \\ \hline \end{array} k + \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline j \\ \hline \end{array} i \quad (4b)$$

(参看 (3) 式及其下的注解). 如所周知, $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \end{array} = \bar{1}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \end{array} = -\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \end{array} = \bar{2}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \end{array} = \bar{3}$, 此处 $\bar{i}$ 为共轭表示的第 i 基底.

容易证明,二元列多项式 $\bar{i}j$ 属于 $(1,1)$ 型表示,因为由 (4b) 可见, $(1,1)$ 型表示的标准基可由列多项式线性表出. 再由

$$\bar{1}1 + \bar{2}2 + \bar{3}3 = 0 \quad (5)$$

可见, $\bar{i}j$ 中只有八个是独立的,与标准基的个数一样,故互为基底. 于是得证 $\bar{i}j$ 属于这空间.

一般,与 (4b) 相仿,易证 $(r\bar{r})$ 型表示的标准基 (第一行 $r + \bar{r}$ 格,第二行 $\bar{r}$ 格的 Young 算子构成的基) 均可用列多项式 $A_{r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3} (\equiv 1^{r_1} 2^{r_2} 3^{r_3} \bar{1}^{\bar{r}_1} \bar{2}^{\bar{r}_2} \bar{3}^{\bar{r}_3}, r_1 + r_2 + r_3 = r, \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 = \bar{r})$ 线性表出. 利用 (5) 可证其中独立的是 $A_{0 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3}$ 与 $A_{r_1 r_2 r_3; 0 \bar{r}_2 \bar{r}_3}$, 将之写成列盘的形式后正好与标准盘一一对应,故其个数与标准基的个数相同,从而构成 $(r\bar{r})$ 的新基底. 于是,任何 $(r\bar{r})$ 型的列多项式均属于 $(r\bar{r})$ 型表示.

我们的列多项式空间与 Moshinsky 的多项式空间是相同的,不过他是由微分方程求解得到的,我们则是根据对称性得到的,实质上他的微分算子 $C_{ii'}$ 就是置换算子,微分方程就相当于对于对称性的要求.

从列多项式中直接选出的上述独立基不是正交归一的,可以根据不同的物理需要用列多项式构成不同的正交归一基¹⁾. 为此,我们引进无穷小算子

$$\left. \begin{aligned} H_i &= a_i^I \frac{\partial}{\partial a_i^I} + a_i^{II} \frac{\partial}{\partial a_i^{II}}, \\ E_{i,-i} &= a_i^I \frac{\partial}{\partial a_i^I} + a_i^{II} \frac{\partial}{\partial a_i^{II}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在研究基本粒子强作用对称性时,取

$$\left. \begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} (H_1 - H_2), I_+ = E_{1,-2}, I_- = E_{2,-1}, \\ Y &= \frac{1}{3} (H_1 + H_2 - 2H_3). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

显而易见,独立基底 $A_{r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 0}$ 及 $A_{r_1 r_2 0; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3}$ 均为 Y 算子的本征态,其本征值为 $Y = \frac{r - \bar{r}}{3} -$

r_3 或 $\frac{r - \bar{r}}{3} + \bar{r}_3$. Y 算子是 Hermitean 的,故不同 Y 值的基是正交的,为以后简便起见,

选量子数 $y \equiv Y - \frac{r - \bar{r}}{3} = \bar{r}_3 - r_3$.

对于给定的 y 来说,例如 $r_3 = 0, y > 0$ 的情况,这时 $r_1 + r_2 = r$,于是 r_1, r_2 可以取 $r + 1$ 对不同的值,将相应的二因子 $1^{r_1} 2^{r_2}$ 乘以归一常数 $(r_1! r_2!)^{-\frac{1}{2}}$ 的值,正好是 I, I_3 的 $r + 1$ 个正则基 $|i, i_3\rangle$, 这里 $i = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{r}{2}, i_3 = \frac{r_1 - r_2}{2}$. 同理, $(\bar{r}_1! \bar{r}_2!)^{-\frac{1}{2}} \bar{1}^{r_1} (-\bar{2})^{r_2}$ 构成 $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) + 1$ 个正则基 $|\bar{i}, \bar{i}_3\rangle$, 这里 $\bar{i} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2} = \frac{\bar{r} - \bar{r}_3}{2} = \frac{\bar{r} - y}{2}, \bar{i}_3 = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{2}$. 于是我们可以改写上述多项式基 A 为

1) 以下的正交归一方法不能推广到 SU_n 的普遍情况,我们已找到了构成明显的正交归一基底的普遍方法,即将发表.

$$|y; i, i_3; \bar{i}, \bar{i}_3\rangle = (-)^{i+\bar{i}_3} [(i+i_3)! (i-i_3)! (\bar{i}+\bar{i}_3)! (\bar{i}-\bar{i}_3)!]^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times A_{i+i_3, i-i_3, \frac{|y|-y}{2}, \bar{i}-\bar{i}_3, \bar{i}+\bar{i}_3, \frac{|y|+y}{2}} \quad (8)$$

式中 $i = r - \frac{|y|-y}{2}$, $\bar{i} = \bar{r} - \frac{|y|+y}{2}$. 不过就整个基底来看, $i_3, \bar{i}_3$ 并非好量子数, 没有相应的 Hermitean 算子, 因此上式中 y 相同而 i, i_3 等不同的各基并不正交. 有必要将在一定 y 之下的 $(2i+1)(2\bar{i}+1)$ 个基底 (8) 用通常的 C. G. 系数组合成 I, I_3 的本征矢 $|y; i; \bar{i}; I, I_3\rangle$, 这里 $I = i + \bar{i}$, $i + \bar{i} - 1, \dots, |i - \bar{i}|$; $I_3 = i_3 + \bar{i}_3$. 这时我们采用 Van der Waerden^[15] 形式的 C. G. 系数.

$$\langle i, i_3; \bar{i}, \bar{i}_3 | i; \bar{i}; I, I_3 \rangle = \rho [(i+i_3)! (i-i_3)! (\bar{i}+\bar{i}_3)! (\bar{i}-\bar{i}_3)! \times \\ \times (I+I_3)! (I-I_3)!]^{-\frac{1}{2}} \times \delta_{i_3+\bar{i}_3, I_3} \times \\ \times \sum_{\nu} (-)^{\nu} \binom{i+\bar{i}-I}{\nu} \binom{i+I-\bar{i}}{i-i_3-\nu} \binom{\bar{i}+I-i}{I-i-\bar{i}_3+\nu}, \quad (9)$$

式中 $\rho \equiv [(2I+1)/(i+\bar{i}+I+1)! (i+\bar{i}-I)! (i-\bar{i}+I)! (-i+\bar{i}+I)!]^{-\frac{1}{2}}$, $\binom{i+\bar{i}+I}{\nu}$ 等为二项式系数, ν 的取和范围为不使分母中的 Γ 函数发散, 用 C. G. 系数 (9) 耦合 (8), 得到的基是 I, I_3 的本征矢, 必定是正交的. 但是, 此基还没有归一化, 不过由于这时 I_+, I_- 的矩阵元已经是标准型的, 因此同一 y, I , 不同 I_3 的各矢具有相同的归一化因子 N_{yI} . 可见, 只要对某一个 I_3 算出归一化因子就可以了, 显然, 选择 $I_3 = I$ 的情况最简单. 当 $I_3 = I$ 时, (9) 式中 ν 的唯一允许值为 $i - i_3$, 于是有

$$\frac{1}{N_{yI}} |y; i; \bar{i}; I, I\rangle = \sum_{i_3 \bar{i}_3} \langle i, i_3; \bar{i}, \bar{i}_3 | i; \bar{i}; I, I \rangle |y; i, i_3; \bar{i}, \bar{i}_3\rangle \\ = \rho \sqrt{(2I)!} \sum_{i_3 \bar{i}_3} \binom{i+\bar{i}+I}{i-i_3} 1^{i+i_3} 2^{i-i_3} 3^{\frac{|y|-y}{2}} 1^{\bar{i}-\bar{i}_3} 2^{\bar{i}+\bar{i}_3} 3^{\frac{|y|+y}{2}} \delta_{i_3+\bar{i}_3, I} \\ = \rho \sqrt{(2I)!} (1\bar{1}+2\bar{2})^{i+\bar{i}+I} 1^{i-\bar{i}+I} 2^{\bar{i}+I-i} 3^{\frac{|y|-y}{2}} 3^{\frac{|y|+y}{2}} \\ = (-)^{i+\bar{i}-I} \rho \sqrt{(2I)!} 1^{i-\bar{i}+I} 2^{\bar{i}+I-i} 3^{\frac{|y|-y}{2}+i+\bar{i}-I} 3^{\frac{|y|+y}{2}-i-\bar{i}+I},$$

最后一式曾用到 (5) 式. 结果化成了 $A_{r_1 0 \ r_3; 0 \ \bar{r}_2 \ \bar{r}_3}$ 型的多项式, 与 Moshinsky 相仿. 该文中已算出 A 的模的平方为 $\frac{(\bar{r}_2 + \bar{r}_3 + r_1 + 1)! (\bar{r}_2 + r_3 + r_1 + 1)!}{(\bar{r}_2 + \bar{r}_1 + 1)! (r_3 + r_1 + 1)!} r_1! r_3! \bar{r}_2! \bar{r}_3!$, 故易得

$$N_{yI} = \left[(r+1)! / \left(\frac{\bar{r}+r+|y|}{2} + I + 1 \right)! \left(\frac{\bar{r}+r+|y|}{2} - I \right)! \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

最后我们得到正交归一的完整基底

$$|y; i; \bar{i}; I, I_3\rangle = N_{yI} \sum_{i_3 \bar{i}_3} \langle i i_3; \bar{i}, \bar{i}_3 | i; \bar{i}; I, I_3 \rangle |y; i, i_3; \bar{i}, \bar{i}_3\rangle. \quad (11)$$

利用 C. G. 系数的正交归一性可得

$$|y; i, i_3; \bar{i}, \bar{i}_3\rangle = \sum_{I, I_3} \langle i i_3; \bar{i}, \bar{i}_3 | i; \bar{i}; I, I_3 \rangle N_{yI} |y; i; \bar{i}; I, I_3\rangle. \quad (12)$$

因为在第三节中将要先利用列多项式 $A_{\vec{r}}$ 构成不变量, 然后再将其化为所选择的独立基底而求得相应的 C. G. 系数, 因此我们需要将 $A_{\vec{r}}$ 表为独立基底的线性组合.

1. 表为 $A_{r_1 r_2 0; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3}$ 或 $A_{r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 0}$. 用(5)即得

$$\begin{aligned} A_{r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3} &= \sum_{\mu, \nu} \delta_{\mu+\nu, \frac{r_3 + \bar{r}_3 - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}} \frac{\left(\frac{r_3 + \bar{r}_3 - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}\right)!}{\mu! \nu!} (-)^{\mu+\nu} \times \\ &\quad \times A_{r_1+\mu, r_2+\nu, \frac{r_3 - \bar{r}_3 + |\bar{r}_3 - r_3|}{2}; \bar{r}_1+\mu, \bar{r}_2+\nu, \frac{\bar{r}_3 - r_3 + |\bar{r}_3 - r_3|}{2}} \\ &\equiv \sum_{\substack{s_1, s_2, y \\ s_1 s_2 y}} \delta_{r_1+\mu, s_1} \delta_{r_2+\mu, s_2} \delta_{\bar{r}_1+\mu, \bar{s}_1} \delta_{\bar{r}_2+\mu, \bar{s}_2} \delta_{\bar{r}_3-r_3, y} \langle r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 | \rangle y; s_1 s_2 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \rangle \times \\ &\quad \times A_{s_1, s_2, \frac{-y+|y|}{2}; \bar{s}_1, \bar{s}_2, \frac{y+|y|}{2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

2. 表为 $|y; I, I_3\rangle$. 用上式及(8), (12)式, 得

$$\begin{aligned} A_{r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3} &= \sum_{\substack{\mu, \nu \\ y, I, I_3}} \frac{\left(\frac{r_3 + \bar{r}_3 - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}\right)!}{\mu! \nu!} \delta_{\mu+\nu, \frac{r_3 + \bar{r}_3 - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}} \times \\ &\quad \times \sqrt{(r_1 + \mu)!(r_2 + \nu)!(\bar{r}_1 + \mu)!(\bar{r}_2 + \nu)!} (-)^{r_2+\nu} \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{r + \bar{r} - |\bar{r} - r|}{2}, \frac{r_1 - r_2 + \mu - \nu}{2}; \frac{\bar{r} + r_3 - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \nu - \mu}{2} \middle| \frac{\bar{r}_3 + r - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}, \frac{\bar{r} + r_3 - |\bar{r}_3 - r_3|}{2}; I, I_3 \right\rangle \times \\ &\quad \times \delta_{y, \bar{r}_3 - r_3} N_{yI} |y; I, I_3\rangle \equiv \sum_{y, I, I_3} \langle r_1 r_2 r_3 \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 | \rangle y; II_3 \rangle |y; II_3\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

上二式中两种变换系数 $\langle | \rangle$ 都是长方矩阵的矩阵元.

二

本节寻找用来构成积表示不可约空间的适当 Young 盘, 发现这时可以不拆开原有各因子表示的各列内的反对称性.

先结合两个简单的例子说明我们的想法.

如果给定了表示 $A: \{a_1, a_2, a_3\}$ 及 $B: \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$, 今讨论其直积. 平常的 Young 图

运算 $\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜线} & \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 指的是表示 $\square$ 与 $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 的直积中含有 $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 型与 $\begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜线} & \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 型

的表示, 并不简单地告诉我们基底组成的方式. 由于本文中的 Young 盘代表具体的基底, 在写出对应的 Young 盘乘法时必须小心. 显而易见

$$\begin{array}{|c|} \hline a_i \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline b_j^1 \\ \hline b_k^{11} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline a_i \\ \hline b_j^1 \\ \hline b_k^{11} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline b_j^1 a_i \\ \hline b_k^{11} \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline a_i \\ \hline b_j^1 \\ \hline b_k^{11} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a_i b_j^1 \\ \hline b_k^{11} \\ \hline \end{array},$$

换句话说, $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 与 $\begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜线} & \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 虽然都是 (1,1) 型表示的基, 都属于表示积 $\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$,

但是只有 $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 是直积 $\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 的基底, $\begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜线} & \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 则不属于这个积空间. 今后称前者为

允许积盘.

一般,允许积盘指一给定的三行以下的 Young 型,其中文字 a^I, a^{II}, b^I, b^{II} 的个数与因子表示中的个数相同,而且每个 a^{II} 同列的上方均有 a^I , b^{II} 的上方均有 b^I .

容易证明,由允许积盘构成的多项式空间构成给定的 Young 型对应的不可约表示空间,而且空间中的任一多项式都可以用因子表示的多项式的乘积线性表出.

其次,再用 $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜线} & \text{斜线} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 为例说明另一个问题与解决方法. 这时,

无论如何也选不出一个不拆开子盘的列来构成积盘 $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 的方式. 换句话说, $\begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline d \\ \hline \end{array}$

不能仅表为 $\begin{array}{|c|c|} \hline a & d \\ \hline b & \\ \hline c & \\ \hline \end{array}$, 还必须同时表为 $\begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & \\ \hline d & \\ \hline \end{array}$ 的线性组合. 但是如果采用共轭表示的语言,就可以变成 $\begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜线} & \text{斜线} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \text{斜线} \\ \hline \end{array}$ 性质的问题,不再有用几个积盘的线性组合来拼凑的困难.

根据上述二例的启发,问题归结为要将积表示空间分解为足够多的独立的允许积盘,或将其共轭空间作这种分解.

如所周知,利用格排列^[11,12]法则,可以判断积表示中含有那些不可约表示及其重数. 如果我们对每一格排列均找到一个唯一的允许积盘与它对应(或一个共轭后允许的积盘),而且证明了其独立无关性,也就解决了这一分解问题.

由格排列法则知道图 1 左方的 Young 型的直接积中含有与右方的格排列对应的

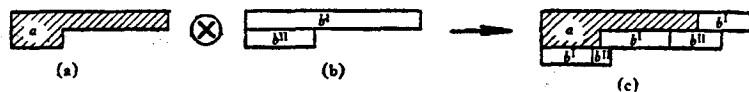


图 1

Young 型,这是由特征标理论得出的. 它只告诉我们积空间中含有那些不可约表示及其重数,并不代表具体的基底构成方式. 与上图建立一个对应法则,就可以得到对应的允许积型如下.

1. 将第二行中 b^{II} 上方的 a^I 与第一行的 b^I 对调; 由格排列法则, 积型中第一行的 b^I 的格数必定大于第二行的 b^{II} 的格数, 故必定可以使二行中所有的 b^{II} 成对.
2. 再将第三行的 b^{II} 上方的 a^{II} 与第二行的 b^I 交换, 这时可能出现三种情况如图 2. 情况 (b) 是情况 (a), (c) 的特例, 或者说是临界. 情况 (a), (b) 是允许盘. 情况 (c) 的共轭是允许盘 (a).

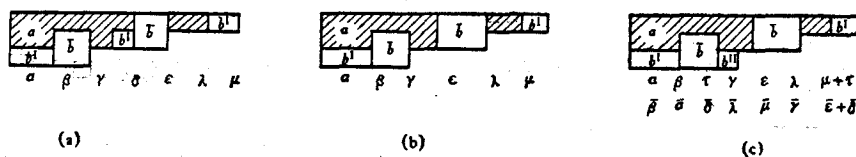


图 2

不同 Young 型的允许盘显然是独立的, 同一 Young 型的不同允许盘用 Rutherford 的判别法则易见也是独立的.

这样, 就得到了具体地构成积空间的各个不可约子空间的方法.

用这个法子可以判断表示积的分解情况如下.

设因子表示为 $(r\bar{r})$ 型的及 $(s\bar{s})$ 型的, 欲构成 $(t\bar{t})$ 型的表示, 则在情况 (a), (c) 分别有

$$\begin{cases} \beta + \delta + \lambda = r, \\ \alpha + \gamma = \bar{r}, \\ \alpha + \delta + \mu = s, \\ \beta + \varepsilon = \bar{s}, \\ \lambda + \mu = t, \\ \gamma + \delta + \varepsilon = \bar{t}; \end{cases} \quad (15a)$$

或

$$\begin{cases} \beta + \lambda = r, \\ \alpha + \tau + \gamma = \bar{r}, \\ \alpha + \mu - \tau = s, \\ \beta + \tau + \varepsilon = \bar{s}, \\ \lambda + \mu = t, \\ \gamma + \varepsilon = \bar{t}. \end{cases} \quad (15b)$$

仅当 $r + s + \bar{t} - \bar{r} - \bar{s} - t$ 为大于零的三的倍数 ($= 3\delta$) 时才会有情况 (a) 的积表示; 仅当其为小于零的三的倍数时 ($= -3\tau$) 才会有情况 (c) 的表示; 其值为零时, 即情况 (b).

方程 (15) 左方的变量个数较方程个数多一, 故正整数解可能不止一个. 如果已经求出一解, 则易见 $\alpha, \varepsilon, \lambda$ 减一, β, γ, μ 加一 (或者都反过来), 仍旧是一个解. 故独立解数为

$$\min(\alpha, \varepsilon, \lambda) + \min(\beta, \gamma, \mu).$$

不同的解对应不同的构成积表示 $(t\bar{t})$ 的方法, 解的个数就是等价的不可约表示 $(t\bar{t})$ 的重数. (注意, 等价表示或者都有允许盘, 或者都有共轭后允许盘, 这对于保证等价表示的独立性是必要的.)

在 (15) 式中代入求得的 δ (或 τ), 任意给定 α , 求出其余的参数, 即可得重数. 例如, 情况 (b) 的重数为

$$\min(\bar{t} - \bar{r}, r - \bar{s} + \bar{t} - \bar{r}, 0) + \min(\bar{s} - \bar{t} + \bar{r}, s, \bar{r}).$$

将上式中的 $r, s, \bar{t}$ 换为 $r - \delta, s - \delta, \bar{t} - \delta$, 即得情况 (a) 的重数; 将 $\bar{r}, s, \bar{s}$ 换为 $\bar{r} - \tau, s + \tau, \bar{s} - \tau$, 即得 (c) 的重数. 重数小于等于零, 即表示积中无此种表示.

总之, 本节代替通常与特征标相应的 Young 型的乘法, 得到了一些更具体的 Young 盘的乘法. 这样, 就构成了积表示各不可约子空间的多项式基底.

三

利用上节的允许积盘,已经可以求得积表示的标准基用因子表示的列多项式表达的式子。只要再将积表示的列多项式基用标准基表出,就可以求得列多项式基间的 C.G. 系数。但这样去求一般的明显表达式是很麻烦的。我们在本节内直接求列基之间的 C. G. 系数。

为此,我们将 Van der Waerden 的组成不变量法^[15]推广到 SU_3 群。方法主要思想是这样的,两个不可约表示的直积空间中如果含有恒等表示(不变量),则这二表示必定互相共轭,而且所含的恒等表示是一重的,换句话说,构成不变量的方式是唯一的,它就是二表示中互为共轭的全部基底成对相乘后的和 $\sum_{q_c} |q_c\rangle |\tilde{q}_c\rangle$; 这里 q_c 是表示 C 的完整量子数集合, $|q_c\rangle$ 是具有量子数 q_c 的基, $|\tilde{q}_c\rangle$ 是其共轭基。因此,如果表示 A, B 的直积空间中的某一些基底 $|q_a\rangle |q_b\rangle$ 与表示 C 的共轭表示空间 $\tilde{C}$ 的全部基底 $|\tilde{q}_c\rangle$ 组成了不变量 $\sum_{q_a q_b q_c} \langle q_a q_b \tilde{q}_c | q_a \rangle |q_a\rangle |q_b\rangle |\tilde{q}_c\rangle$, 则 $\sum_{q_a q_b} \langle q_a q_b \tilde{q}_c | q_a \rangle |q_a\rangle |q_b\rangle$ 必定与 $|q_c\rangle$ 有同样的变换性质,为等价的基底。换句话说, $\langle q_a q_b \tilde{q}_c | q_a \rangle$ 就是由 A, B 构成 $\tilde{C}$ 的 C. G. 系数(或者说 A, B, C 的对称化 C. G. 系数——Wigner 系数), 不过还可能差一个对于整个表示积型共同的归一化因子^[15], 因为我们仅仅断言了上述两种方式构成的都是不变量,都是标量,并不能从而得出结论说,二者是相等的。两方还可能差一常数比。

根据以上的论证,我们在图 2(a), (b) 的下方或(c)的共轭的下方补上 C , 如图 3, 就

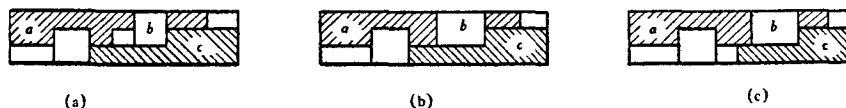


图 3

可以写出对应的不变量

$$(\bar{a} \cdot b)^a (a \cdot \bar{b})^\beta (\bar{a} \cdot c)^\gamma (abc)^\delta (\bar{b} \cdot c)^\epsilon (a \cdot \bar{c})^\lambda (b \cdot \bar{c})^\mu,$$

式中

$$\bar{a} \cdot b = \sum_i \bar{a}_i b_i,$$

$$abc = a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2.$$

将之展开得

$$\sum_{\substack{\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_{ijk} \\ \epsilon_i \lambda_i \mu_i}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \frac{\beta!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3!} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} \frac{(-)^{\delta_{218} + \delta_{321} + \delta_{132}} \delta!}{\delta_{132}! \delta_{123}! \delta_{213}! \delta_{231}! \delta_{312}! \delta_{321}!} \times \\ \times \frac{\epsilon!}{\epsilon_1! \epsilon_2! \epsilon_3!} \frac{\lambda!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3!} \frac{\mu!}{\mu_1! \mu_2! \mu_3!} A_{r_1 r_2 r_3; \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3} B_{s_1 s_2 s_3; \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3} C_{t_1 t_2 t_3; \bar{t}_1 \bar{t}_2 \bar{t}_3}, \quad (16)$$

式中 $\Sigma \alpha_i = \alpha, \dots, \Sigma \delta_{ijk} = \delta; r_i = \beta_i + \delta_{ijk} + \delta_{ikj} + \lambda_i, \bar{r}_i = \alpha_i + \gamma_i, s_i = \alpha_i + \delta_{jik} + \delta_{kij} + \mu_i, \bar{s}_i = \beta_i + \epsilon_i, t_i = \gamma_i + \delta_{jki} + \delta_{kji} + \epsilon_i, \bar{t}_i = \lambda_i + \mu_i$. 对于含有确定的 $r_i \bar{r}_i t_i \bar{t}_i s_i \bar{s}_i$ 项前的系数来说,当 $\delta = 0$ 时只有两个独立的求和指标, (例如 α_1, α_2); 当 $\delta \neq 0$ 时, 还要

增加五个独立求和指标 (δ_{ijk} 中的任意五个, 或者说项数增加了 $\binom{\delta+5}{6}$ 倍).

作为不变量, 上式应该 $= \frac{1}{N} \sum_{q_a q_b q_c} \langle q_a q_b q_c | q_a \rangle | q_b \rangle | q_c \rangle$, 故只要借助 (13), (14) 诸式, 用 $|q\rangle = |y; r_1 r_2 \bar{r}_1 \bar{r}_2\rangle$ 或 $|q\rangle = |y; II_3\rangle$ 代替上式中的 $A_{r\bar{r}}, B_{s\bar{s}}, C_{t\bar{t}}$, 即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \langle q_a q_b q_c \rangle = & \sum_{\substack{\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i i_{jk} \\ \varepsilon_i \lambda_i \mu_i \bar{\varepsilon}_i \bar{\lambda}_i \bar{\mu}_i \bar{i}_{jk}}} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \frac{\beta!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3!} \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2! \gamma_3!} \times \\ & \times \frac{(-)^{\delta_{122} + \delta_{213} + \delta_{321}} \delta!}{\delta_{123}! \delta_{132}! \delta_{213}! \delta_{231}! \delta_{312}! \delta_{321}!} \frac{\varepsilon!}{\varepsilon_1! \varepsilon_2! \varepsilon_3!} \frac{\lambda!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3!} \frac{\mu!}{\mu_1! \mu_2! \mu_3!} \times \\ & \times \langle r\bar{r} | \rangle | q_a \rangle \langle s\bar{s} | \rangle | q_b \rangle \langle t\bar{t} | \rangle | q_c \rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

式中加于正整数 $\alpha_i \cdots, r_i \cdots$ 等的条件同前. $\langle | \rangle | q \rangle$ 的值见第一节末.

用 Moshinsky 的方法可以写出使不变量 (16) 归一化为一的归一化常数的表达式. 这种归一化与对称 Wigner 系数的归一化相同. 但是由于在非简单可约时, 我们得到的等价表示并不正交, 因此还应该按照文献 [6] 的方法求得等价表示的正交组合, 才是正交归一的 C. G. 系数.

本文的方法可以推广到 SU_n , 这时列多项式空间的独立基底仍为与标准列表对应的列多项式. 但用第二节的对应法则得到的有时是允许型与共轭后允许型的混合型. 因此我们推广上节的方法, 当有情况 (c) 时, 直接写出不变量 $(\bar{a} \cdot b)^a (a \cdot \bar{b})^b (\bar{a} \bar{b} \bar{c})^c (\bar{a} \cdot c)^d (\bar{b} \cdot c)^e (a \cdot \bar{c})^f (b \cdot \bar{c})^g$, 这样, 即使遇到混合型也容易构成不变量了.

作者感谢导师张宗燧的指导与支持, 华罗庚教授、万哲先副教授的关注及孙洪洲、韩其智同志的讨论.

参 考 文 献

- [1] Moshinsky, M., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 813.
- [2] 孙洪洲、韩其智, *物理学报*, **21** (1965), 56.
- [3] de Swart, J. J., *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 916.
- [4] Biedenharn, L. C., *Jour. Math. Phys.*, **4** (1963), 436.
- [5] Biedenharn, L. C., *Phys. Lett.*, **3** (1962), 69; *ibid.*, **3** (1963), 254.
- [6] Moshinsky, M., *Jour. Math. Phys.*, **4** (1963), 1128.
- [7] Racah, G., *Lecture Notes, The Institute for Advanced Study* (Princeton, New Jersey, 1951).
- [8] Klein, *Jour. Math. Phys.*, **4** (1963), 1283.
- [9] Гельфонд и Цейтлин, *ДАН СССР*, **71** (1950), 825.
- [10] Weyl, H., *Classical Groups* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946).
- [11] Litterwood, D. E., *The Theory of Group Characters* (Oxford University Press, Oxford, England, 1950).
- [12] Robinson, G. B., *Representation Theory of the Symmetric Group* (University of Toronto Press, Alva, Scotland, 1961).
- [13] Hamermesh, M., *Group Theory* (Addison Wesley, London, England, 1962).
- [14] Rutherford, D. E. *Substitutional Analysis* (Edinburgh, 1948).
- [15] Van der Waerden *Die Gruppen-theoretische Methode in der Quanten Mechanik* (Verlag von Julius Springer, Berlin, 1931).

POLYNOMIAL BASES OF GROUP SU_3 AND AN EXPLICIT EXPRESSION FOR ITS CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS*

HOU PEI-YU

ABSTRACT

Using the properties of the Young diagrams, we have constructed a complete set of polynomial bases for representing the SU_n group. The basis of irreducible representations in the product space of two irreducible representations is then discussed. Finally by methods of construction of an invariant, an explicit expression for the Clebsch-Gordan coefficients of group SU_3 is obtained.