

$\pi\text{-}\pi$ P 波共振的近似解*

夏 意 誠
(兰 州 大 学)

从 Lorentz 不变性、么正性、交叉对称性及强相互作用中一些量子数的守恒定则出发所建立起来的 S 矩阵理论, 在处理强作用问题中获得了一定的成功. 计算 $\pi\text{-}\pi$ 共振参数正是这一理论的重要成就之一. 实验发现, $\pi\text{-}\pi$ 问题中 P, D 波均存在共振态, 数据为^[1]:

$$\rho(J=1, I=1) \quad 765 \text{ MeV}, \quad \text{全谱宽} \quad 120 \text{ MeV};$$

$$f^0(J=2, I=0) \quad 1250 \text{ MeV}, \quad \text{全谱宽} < 150 \text{ MeV}.$$

在较多地考虑了非弹性散射和交叉道中 D 波贡献后, 可以得到与实验符合较好的结果^[2]. 但计算量比较大. 本文试图通过对 ND^{-1} 之 D 函数作直线近似来简化运算. 文献[2]的计算使我们有可能讨论这一近似的误差. 计算表明, 直线近似在相当大的范围内是一较好的近似, 它可以达到简化运算的目的. 但是, 这也产生了一个很大的缺陷, 即不能分别解出 Γ_1, Γ_2 的值.

一、用 ND^{-1} 方法求 P - D 波耦合解

利用固定 S 的色散关系和交叉对称性, 可以得到用第二类 Logender 函数 $Q_l(z)$ 表出的散射振幅的积分表达式

$$A_{ll'}(\nu) = \frac{4}{\pi\nu} \int_0^\infty d\nu' \operatorname{Im} \tilde{A}^l\left(\nu', 1 + 2\frac{\nu+1}{\nu'}\right) Q_l\left(1 + 2\frac{\nu'+1}{\nu}\right) \quad (\text{当 } -9 < \nu < 0), \quad (1)$$

式中

$$\operatorname{Im} \tilde{A}^l\left(\nu', 1 + 2\frac{\nu+1}{\nu'}\right) = \sum_{l', l''} (2l' + 1) \beta_{ll'} \operatorname{Im} A_{ll'}^l(\nu') P_{l'}\left(1 + 2\frac{\nu'+1}{\nu'}\right),$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

l, l' 分别是同位旋量子数和角动量量子数.

从么正行为和么正性出发, 并利用 $\nu = \nu_{Rl}$ 处散射振幅实部为零的性质得到

$$A_{ll'}^l(\nu) = \frac{\Gamma_l^l \nu^l}{(\nu_{Rl} - \nu) F_{ll'}^l(\nu) - i\Gamma_l^l \sqrt{\frac{\nu^{2l+1}}{\nu+1}} R_{ll'}^l(\nu)} \quad (\text{当 } \nu > 0 \text{ 时}); \quad (2)$$

* 1965年9月8日收到.

式中

$$F_{(l)}^I(\nu) = f_{(l)}^I(\nu)/f_{(l)}^I(\nu_{R_l}),$$

$$f_{(l)}^I(\nu_{R_l}) = 1/\Gamma_l^I.$$

而 $f_{(l)}^I$ 的定义为

$$f_{(l)}^I(\nu)(\nu_{R_l} - \nu) = \nu^l \operatorname{Re} [A_{(l)}^I(\nu)]^{-1} = \sqrt{\frac{\nu^{2l+1}}{\nu}} \cot \delta_{(l)}^I(\nu),$$

其中 $R_{(l)}^I(\nu)$ 是弹性散射截面占总截面之比.

在(2)式中引入零谱宽近似后便有

$$\operatorname{Im} A_{(l)}^I(\nu) \approx \pi \Gamma_l^I(\nu_{R_l})^l \delta(\nu - \nu_{R_l}) \quad (\text{当 } \nu > 0 \text{ 时}). \quad (3)$$

把(3)式带入(1)式就可完成积分运算. 如果我们考虑这样一个 Bootstrap 机构: 交叉道中的 ρ 和 f^0 共振提供一对交换力产生主通道的 ρ 共振, 则由(1)和(3)式就有

$$A_{(1)}^I(\nu) = \Gamma_1 A(\nu) + \Gamma_2 B(\nu), \quad (4)$$

$$A(\nu) = \frac{6}{\nu} \nu_{R_1} Q_1 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_1} + 1}{\nu}\right) P_1 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_1}}\right), \quad (5)$$

$$B(\nu) = \frac{20}{3} \frac{(\nu_{R_2})^2}{\nu} Q_1 \left(1 + 2 \frac{\nu_{R_2} + 1}{\nu}\right) P_2 \left(1 + 2 \frac{\nu + 1}{\nu_{R_2}}\right). \quad (6)$$

另一方面, 从 $A_{(1)}^I(\nu) = \frac{N_{(1)}^I(\nu)}{D_{(1)}^I(\nu)}$ 出发, 引入变元 $\omega = 2\nu + 1$, 并对 $N_{(1)}^I(\omega)$ 在 ω_0 处作一次割线, 对 $D_{(1)}^I(\omega)$ 在 ω_0, ω_1 作二次割线, 引用朱洪元向前散射的方法^[4], 在交叉道中仅考虑 P - D 波, 并忽略 F 分波, 则 P 波振幅可表出. 利用条件 $A_{(1)}^I(0) = 0$, $\operatorname{Re} D_{(1)}^I(\nu_{R_1}) = 0$, 和考虑到多作一次割线后可取 $R_{(1)}^I(\nu) \approx 1$, 于是有^[2]

$$N_{(1)}^I(\nu) = \left[\frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_{R_2} + \nu + 1} \right] Y - \left[\frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_{R_1} + \nu + 1} \right] X, \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} D_{(1)}^I(\nu) = \frac{\nu_{R_1} + \nu}{\nu_{R_1} - \nu_0} + (\nu - \nu_0) \left\{ \left[J_1(\nu_{R_1}) - J_1(\nu) + \frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} (L(\nu_{R_1}) - L(\nu)) \right] X - \right.$$

$$\left. - \left[J_2(\nu_{R_1}) - J_2(\nu) + \frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} (L(\nu_{R_1}) - L(\nu)) \right] Y \right\}; \quad (8)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \frac{g_1 D_{(1)}^I(-\nu_{R_1} - 1)}{\nu_{R_1} + \nu_0 + 1} & g_1 &= \Gamma_1 \nu_{R_1}, \\ Y &= \frac{5}{9} \frac{g_2 D_{(1)}^I(-\nu_{R_2} - 1)}{\nu_{R_2} + \nu_0 + 1} & g_2 &= \Gamma_2 (\nu_{R_2})^2; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

而

$$L(\nu) = -\frac{\nu - \nu_1}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_{(1)1}^I(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu_1)(\nu' - \nu)} \approx$$

$$\approx \frac{h(\nu) - h(\nu_0)}{\nu - \nu_0} - \frac{h(\nu_1) - h(\nu_0)}{\nu_1 - \nu_0}, \quad (10)$$

$$J_i(\nu) = -\frac{\nu - \nu_1}{\pi} P \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu'}{\nu' + 1}} \frac{R_{(1)i}^I(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_1)(\nu' - \nu)(\nu' + \nu_{R_i} + 1)} \approx$$

$$\approx \frac{h(-\nu_{R_i} - 1) - h(\nu_{R_i})}{\nu_{R_i} + \nu_1 + 1} - \frac{h(-\nu_{R_i} - 1) - h(\nu)}{\nu_{R_i} + \nu + 1}, \quad (11)$$

其中

$$h(\nu) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} \ln(|\nu|^{\frac{1}{2}} + |\nu+1|^{\frac{1}{2}}) & (\text{当 } \nu > 0 \text{ 或 } \nu < -1 \text{ 时}), \\ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{-\nu}{\nu+1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\nu+1}{-\nu}} & (\text{当 } 0 > \nu > -1 \text{ 时}). \end{cases} \quad (12)$$

从(4)–(6)式和(7)–(12), 可以把 ND^{-1} 和(1)式相比较而得到解^[2]: $\nu_{R_1} = 6.4$, $\nu_{R_2} = 20$, $\Gamma_1 = 0.12$, $\Gamma_2 = 0.016$ (当 $\nu_0 = -1.2$, $\nu_1 = -1.6$ 时). 利用这一解, 我们可以求 $\text{Re } D'_{(1)}(\nu)$ 曲线并可与直线近似

$$\text{Re } D'_{(1)}(\nu) = \frac{\nu_{R_1} - \nu}{\nu_{R_1} - \nu_0} = \frac{6.4 - \nu}{7.6} \quad (13)$$

相比较.

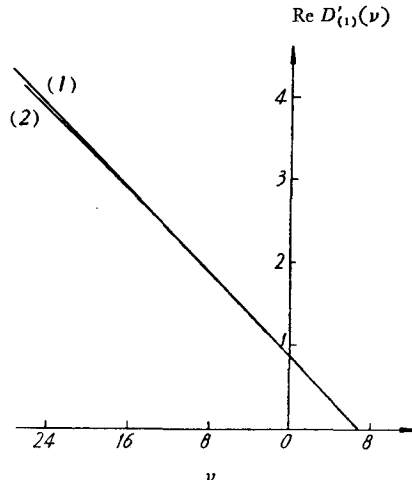


图 1

曲线(1)为直线近似(13)式,
曲线(2)为文献[2]之计算曲线.

从图 1 看到, 直线近似下误差最大不超过 3%.

以下将采用直线近似来求 P - D 波耦合解.

直线近似下(7)–(9)式具体为

$$N'_{(1)}(\nu) = \left[\frac{\nu_0}{\nu_{R_2} + 1} + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_{R_2} + \nu + 1} \right] Y - \left[\frac{\nu_0}{\nu_{R_1} + 1} + \frac{\nu - \nu_0}{\nu_{R_1} + \nu + 1} \right] X, \quad (14)$$

$$\text{Re } D'_{(1)}(\nu) = \frac{\nu_{R_1} - \nu}{\nu_{R_1} - \nu_0}, \quad (15)$$

$$X = \frac{g_1}{2} \frac{(2\nu_{R_1} + 1)}{(\nu_{R_1} - \nu_0)(\nu_{R_1} + \nu_0 + 1)}, \quad (16)$$

$$Y = \frac{5g_2}{9} \frac{(\nu_{R_1} + \nu_{R_2} + 1)}{(\nu_{R_1} - \nu_0)(\nu_{R_2} + \nu_0 + 1)}, \quad (17)$$

而

$$A'_{(1)}(\nu) = N'_{(1)}(\nu)/D'_{(1)}(\nu). \quad (18)$$

这样,由(4)–(6)和(14)–(18)及相应的定解条件,就可求解共振参量. 定解条件是

(i) 谱宽条件:

$$\Gamma_1 \nu_{R_1} = (\nu_{R_1} - \nu_0) N'_{(1)}(\nu_{R_1}); \quad (19)$$

(ii) ν_0 处比较:

$$\frac{N'_{(1)}(\nu_0)}{D'_{(1)}(\nu_0)} = A'_{(1)}(\nu_0) \quad (\text{用(4)式表出}); \quad (20)$$

(iii) ν_1 处比较:

$$\frac{N'_{(1)}(\nu_1)}{D'_{(1)}(\nu_1)} = A'_{(1)}(\nu_1) \quad (\text{用(4)式表示}). \quad (21)$$

虽然未知量有四个: ν_{R_1} , ν_{R_2} , Γ_1 , Γ_2 , 但从(19)式将会看到, 有关系 $\Gamma_1 \propto \Gamma_2$, 使我们不能分别解出 Γ_1 , Γ_2 , 而只能确定比值 $\eta = \Gamma_2/\Gamma_1$. 因此, 只要上述三个方程就够了. 用通常的手摇计算机就可求得, 当 $\nu_0 = -1.2$, $\nu_1 = -1.6$ 时有

$$\nu_{R_1} = 6.4, \quad \nu_{R_2} = 23, \quad \eta \approx 0.117.$$

它们相应于

$$m_\rho \approx 762 \text{ MeV}, \quad m_{f^0} \approx 1372 \text{ MeV}.$$

二、討 論

1. 从结果我们看到, 由于通过多作一次削减考虑了一部分非弹性效应和交叉道中 D 波的贡献, 因此仍然保持了使主通道中 P 波共振质量较高、谱宽较窄的特性, 量 ν_{R_1} , ν_{R_2} 和 η 与文献[2]中相应量值 $\nu_{R_1} = 6.4$, $\nu_{R_2} = 20$, $\eta = 0.133$ 很接近. 因此可以设想, 如果能在直线近似的基础上再稍微多考虑一些因素, 破坏了 $\Gamma_1 \propto \Gamma_2$ 的齐次线性关系, 就可期望得到较好的 ν_{R_1} , ν_{R_2} , Γ_1 , Γ_2 各量值.

2. 从运算过程看到, 上述解相当精确地满足定解方程. 但是, 当考虑到方法本身的误差, 就会对解的唯一性产生怀疑. 的确, 由于 ND^{-1} 方法和积分形式比较方法本身就是在忽略了高能散射贡献下进行的, 同时运算中最重要的零谱宽近似也会带来不可忽视的误差(百分之几). 因此, 一方面我们有理由认为解 $m_\rho \approx 762 \text{ MeV}$, $m_{f^0} \approx 1372 \text{ MeV}$, $\eta = 0.117$ 就是方程(19)–(21)的严格解, 另一方面, 在方法本身的误差范围($< 3\%$)内, 解也有相应的范围. 但从计算看到, 这样一个范围仍然保证了 P - D 波共振质量的解处于实验值附近. 这就说明, 用色散关系处理 $\pi-\pi$ 问题的确对客观规律作了一部分真实的反映, 说明交叉道中 P - D 波为主导的 Bootstrap 机构不仅是定性上更容易接受的机构, 而且定量上对结果也有所改进.

3. 解随削减点变化不灵敏. 从(14)看到, $\nu = -(\nu_{R_1} + 1)$, $-(\nu_{R_2} + 1)$ 是 $A'_{(1)}(\nu)$ 的极点. 在解 $\nu_{R_1} = 6.4$, $\nu_{R_2} = 23$ 情况下, 相对原点而言, 这是两个较远的左极点. 这样, 当 ν_0 , ν_1 在原点附近改变时, 将不会对解有显著影响. 例如 $\nu_0 = -1.2$, $\nu_1 = -2.0$, 解不变.

4. 综上所述, 直线近似是一较好近似. 其优点是: 使计算大大简化, 且解还较好. 因

此,用它来估计一个问题的解的性质及数量级都是较好的。但令人遗憾的是,它不能给出 Γ_1, Γ_2 的值。为弥补这点,我们可把直线近似的范围稍微缩小一些来进行考虑,这样按讨论 1 所述有可能给出 Γ_1, Γ_2 的值。但计算量可能会大大增加。

5. 从结果看到,若给定 $\Gamma_1 = 0.18$, 则 $\Gamma_2 = 0.021$ 较一般实验值大 3—5 倍,这种差异主要是由于忽略高能散射所导致。计算中忽略 S 波贡献是较为合理的,因为 S 波共振实验还未完全肯定存在,即使有可能发现,其贡献亦确实很小。

参 考 文 献

- [1] Rosenfeld, A., *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), 977.
- [2] 葛墨林,关于 $\pi-\pi$ 共振态(未发表).
- [3] Balázs, L., *Phys. Rev.*, **132** (1963), 867.
- [4] Efremov, A., Shirkov, D., 朱洪元,中国科学, **7** (1961), 812.
- [5] Moffat, J. W., *Phys. Rev.*, **121** (1961), 926.