

# 吸引费米体系多体微扰级数的收敛性

陶 云

(复 旦 大 学)

## 提 要

本文用泛函分析的方法,研究了吸引多费子体系中 Wigner 和 Schrödinger 两种微扰级数的收敛性问题. 发现这两种微扰级数的“收敛半径”是相同的,但是收敛与发散的速度是不相等的,我们提供了一个较有用的判据.

## 一、引 言

关于具有吸引势的非相对论量子力学问题,已经为许多作者所研究<sup>[1,2]</sup>. 一般说来,两体组成束缚态的物理图象以及 Born 级数

$$\hat{T}(E) = \hat{V}_I + \hat{V}_I \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \hat{V}_I \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \dots \quad (1)$$

的收敛性及其与束缚态能量  $E_i$  的关系已经比较清楚了<sup>[2]</sup>. (1) 式中  $\hat{H}_0$  是自由哈密顿部分,  $\hat{V}_I$  是相互作用哈密顿算符,  $E$  是一能量参量. 当  $E \in (-\infty, -B)$  时 ( $-B$  是  $\hat{H}_0 + \hat{V}_I$  的基态能量), 级数(1)均匀收敛. 所谓均匀收敛是指: 不论对被  $\hat{H}_0 + \hat{V}_I$  所涂的 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  中的任一元素  $f \in \mathcal{H}$ ,  $\hat{T}(E)f$  都有确定的极限值, 且  $\hat{T}(E)f \in \mathcal{H}$ . 当  $E \in [-B, 0)$  时, 级数(1)不再均匀收敛.

可是迄今人们还没有对多体问题中碰到的微扰级数的收敛行为进行较广泛的研究. Cooper<sup>[3]</sup> 和 Fukuda<sup>[4]</sup> 对强耦合极限的费米体系进行了比较详细的研究, 可是他们的方法只适用于一种特殊的哈密顿, 对于哈密顿的自由项不能看作常数项情况下, 他们的方法不能提供直接的知识.

在多体问题中, 需处理  $N$  个全同粒子哈密顿

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_I = - \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}, \quad (2)$$

$\hat{H}_0$  为自由部分,  $V_{ij}$  是两粒子之间的相互作用势能. 假定,  $N$  个粒子被关在体积为  $Q$  的容器内,  $\frac{N}{Q} = \rho$  是粒子密度,  $N$  和  $Q$  可以很大, 但先保持有限. 这里仅讨论吸引相互作用的费米体系. 对于具有排斥相互作用的体系, 更加复杂, 有待进一步研究.

在多体问题中最常碰到的微扰理论有

\* 1964 年 3 月 7 日收到.

### 1. Wigner 微扰理论

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi_0\rangle + \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I |\Psi\rangle \\ &= |\phi_0\rangle + \left[ \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \cdots \right] |\phi_0\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $|\phi_0\rangle$  是  $\hat{H}_0$  的基态, 在二次量子化表象中,  $|\phi_0\rangle$  就是“费米真空”;  $\hat{P}_0$  是排除  $|\phi_0\rangle$  态的投影算符;  $E$  为相应的  $\hat{H}$  的本征值, 基态能量移动为

$$\begin{aligned} \Delta E = E - E_F &= \langle \phi_0 | \hat{V}_I | \Psi \rangle \\ &= \langle \phi_0 | \left[ \hat{V}_I + \hat{V}_I \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \hat{V}_I \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \cdots \right] | \phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式就是求基态能量的 Wigner 微扰级数.

### 2. Schrödinger 微扰理论

基态波函数

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi_0\rangle + \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E) |\Psi\rangle \\ &= \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E) \right]^n \right\} |\phi_0\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

相应的基态能量移动

$$\begin{aligned} \Delta E = E - E_F &= \langle \phi_0 | \hat{V}_I | \Psi \rangle \\ &= \langle \phi_0 | \sum_{n=0}^{\infty} \hat{V}_I \left[ \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E) \right]^n | \phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \langle \phi_0 | \hat{V}_I \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} \hat{V}_I \right)^n | \phi_0 \rangle_D, \quad (7)$$

式中  $E_F$  是  $\hat{H}_0$  的基态能量,  $\langle \phi_0 | \cdots | \phi_0 \rangle_D$  表示取连接集团展式.

本文主要研究级数(4)和(6)[或(7)]的收敛性问题.

## 二、核算子 $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$ 的本征值的性质

我们把吸引相互作用多费米子体系的薛定谔方程

$$(\hat{H}_0 + \hat{V}_I) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle$$

改写成

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I |\Psi\rangle. \quad (8)$$

这里  $E$  限于比  $E_F$  小的本征能量. 如果我们把(8)式中的  $E$  看作是在数域  $F \in (-\infty, E_F)$  上的一参数, 则对于任意的  $E \in F$  不一定能满足(8). 代替(8)式, 我们把  $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  看作一算子, 具有参量  $E$ , 讨论它的本征值方程:

$$\lambda(E) |\Psi\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I |\Psi\rangle. \quad (9)$$

记满足(9)式的所有本征值  $\lambda(E)$  的集合为  $U(\lambda)$ , 对应每一  $\lambda_0(E) \in U(\lambda)$ , 有一组本征

矢  $|\Psi\rangle_{\sigma n}$ . 当本征值分裂时,  $\sigma$  可记为集合  $1, 2, 3, \dots$ , 这时  $U(\lambda)$  就由  $\lambda_1(E), \lambda_2(E), \lambda_3(E) \dots$  构成.

显然, 改变  $E \in (-\infty, E_F)$  时, 所有能满足式

$$\lambda_\sigma(E_\sigma) = 1 \quad (10)$$

的一切  $E_\sigma$  都是体系的本征能量. 因此讨论小于  $E_F$  的  $\hat{H}$  的本征值问题, 可代之以讨论方程(9). 对应  $E_\sigma$  的本征函数就是  $|\Psi\rangle_{\sigma n}$ .  $\lambda(E)$  有如下一系列重要性质:

1.  $\lambda_\sigma(E)$  是实的, 并且在整个  $E \in (-\infty, E_F)$  范围内是恒正的.  $\lambda_\sigma(E)$  的实性不难由下式知道:

$$\lambda_\sigma(E) = \frac{{}_{n\sigma}\langle\Psi|\hat{V}_I \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I|\Psi\rangle_{n\sigma}}{{}_{n\sigma}\langle\Psi|\hat{V}_I|\Psi\rangle_{n\sigma}} = \lambda_\sigma(E)^*; \quad (11)$$

其次因为当  $\hat{V}_I$  为负算子(吸引情况)时, 对  $E \in (-\infty, E_F)$ , 算子  $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  是恒正的, 所以本征值  $\lambda_\sigma(E) > 0$ .

2. 当  $E \rightarrow -\infty$ , 所有  $\lambda(E) \in U(\lambda)$  都有

$$\lambda(E) \xrightarrow{E \rightarrow -\infty} 0, \quad (12)$$

这是因为  $E \rightarrow -\infty$  时,  $\frac{1}{E - \hat{H}_0}$  是一无穷小算子,  $\hat{V}_I$  是与  $E$  无关的有界算子, 故  $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  是无穷小算子, 所以它的本征值必为无穷小量.

3.  $|\lambda(E)|$  随  $E$  从  $-\infty \rightarrow E_F$  单调上升, 证明如下.

由(9)式可得

$$[(\hat{H}_0 - E)\lambda(E) + \hat{V}_I]|\Psi\rangle = 0, \quad (13)$$

$$\langle\Psi|[(\hat{H}_0 - E)\lambda(E) + \hat{V}_I] = 0. \quad (14)$$

结果得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dE} \langle\Psi|[(\hat{H}_0 - E)\lambda(E) + \hat{V}_I]|\Psi\rangle \\ &= \langle\Psi| \left[ \frac{d}{dE} (\hat{H}_0 - E) \lambda(E) \right] |\Psi\rangle, \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{\lambda(E)} \cdot \frac{d\lambda(E)}{dE} = \frac{\langle\Psi|\Psi\rangle}{\langle\Psi|(\hat{H}_0 - E)|\Psi\rangle} > 0, \quad (15)$$

故

$$\frac{d\lambda(E)}{dE} > 0, \quad (16)$$

因而  $\lambda(E)$  随  $E$  单调上升.

4. 当  $\lambda_i(E) \cong \lambda_j(E)$  时, 有

$${}_{in}\langle\Psi|\hat{V}_I|\Psi\rangle_{im} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

因为由(11)式

$$\lambda_i(E) {}_{im}\langle\Psi|\hat{V}_I|\Psi\rangle_{in} = {}_{im}\langle\Psi|\hat{V}_I \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I|\Psi\rangle_{in} = \lambda_i(E) {}_{im}\langle\Psi|\hat{V}_I|\Psi\rangle_{in}.$$

即

$$[\lambda_i(E) - \lambda_j(E)]_{im} \langle \Psi | \hat{V}_I | \Psi \rangle_{in} = 0,$$

所以

$${}_{im} \langle \Psi | \hat{V}_I | \Psi \rangle_{in} = 0 \quad (i \neq j). \quad (18)$$

5. 设  $\hat{V}_I$  是有界算子, 具体来说象原点非奇异的短程势、B. C. S 势等都是有限算子. 当  $N$  和  $Q$  有限时(因为这时  $\hat{H}_0$  或  $\hat{H}$  所涂成的空间有确定的内积值, 所以是 Hilbert 空间, 因而可用 Hilbert 空间中的算子理论. 在  $N$  与  $Q \rightarrow \infty$  情况下, 由于  $\hat{H}_0$  所涂的空间在  $\hat{H}$  的空间中稠密, 故可在最后用  $Q_n \rightarrow \infty$  的极限过程来讨论), 则  $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  是全连续算子. 要证明这一点是很容易的, 因为不难证明<sup>[5]</sup>  $\frac{N}{E - \hat{H}_0}$  是全连续正规算子, 而又  $\frac{\hat{V}_I}{N}$  是有界算子, 则由熟知的定理立即知它们的乘积  $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  仍旧是全连续算子.

6. 因为  $\frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  是全连续算子, 故  $\lambda_\sigma(E) \in U(\lambda)$  是分裂的, 对应的简并度亦是有限的, 现在按下降次序排列成  $\lambda_1(E), \lambda_2(E), \dots, \lambda_n(E) \dots$ .  $\lambda_1(E) = \max \{\lambda_i(E)\}$ , 当  $\lambda_i(E)$  有可列个时, 全连续算子的谱具有性质

$$\lambda_i(E) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \quad (19)$$

现在把这些  $\lambda_i(E)$  对  $E$  画成图 1. 所有当  $E \rightarrow E_F$  过程中经过 1 的  $\lambda_i(E)$  都能找到对应  $\hat{H}$  的本征值  $E_i$ , 那些  $\lambda_i(E_F - 0) < 1$  的  $\lambda(E)$  不对应  $\hat{H}$  的本征值, 只有当  $\hat{V}_I$  加强时 ( $\lambda_i(E)$  随  $\hat{V}_I$  线性增加), 才能使这些  $\lambda_i(E)$  通过 1, 因而增加了  $\hat{H}$  的小于  $E_F$  的本征值  $E_i$  的数目.

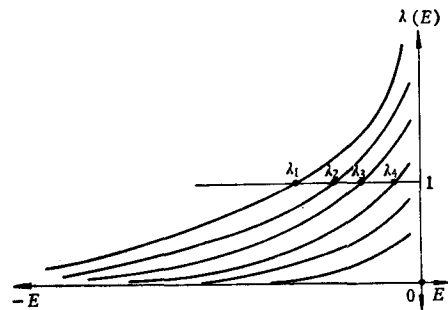


图 1

7. 当  $\hat{V}_I = \hat{B} \cdot \hat{A}$  时, 则下面两方程具有同样的本征值集合:

$$\lambda(E) |\Psi\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{B} \cdot \hat{A} |\Psi\rangle, \quad (20)$$

$$\chi(E) |\Phi\rangle = \hat{A} \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{B} |\Phi\rangle. \quad (21)$$

证明如下: 记  $\chi(E)$  的集合为  $U(\chi)$ , 所有  $\lambda \in U(\lambda)$  及  $\chi \in U(\chi)$ , 都分别有非零元素的解  $|\Psi\rangle$  和  $|\Phi\rangle$ ; 当  $\lambda_i(E) \in U(\lambda)$  时有  $|\Psi\rangle_i$ , 后者满足 (20), 且  $\hat{A} |\Psi\rangle_i \neq 0$ , 否则  $|\Psi\rangle_i = 0$ . 故由 (20) 式可得

$$\lambda_i(E) \hat{A} |\Psi\rangle_i = \hat{A} \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{B} \cdot \hat{A} |\Psi\rangle_i, \quad (22)$$

因而  $\lambda_i(E) \in U(\chi)$ , 对应本征矢为  $\hat{A} |\Psi\rangle_i$ , 由此

$$U(\lambda) \subset U(\chi). \quad (23)$$

反之, 若  $\chi_i(E) \in U(\chi)$ , 则有  $|\Phi\rangle_i$  满足 (21) 式. 记

$$|f\rangle_i = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{B} |\Phi\rangle_i, \quad (24)$$

显然有

$$\hat{A}|f\rangle_i \neq 0, \quad (25)$$

否则  $|\Phi\rangle_i = 0$ , 由(21)式可得

$$|\Phi\rangle_i = \frac{1}{\chi_i(E)} \hat{A}|f\rangle_i. \quad (26)$$

代入(24)式得

$$\chi_i(E)|f\rangle_i = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{B} \cdot \hat{A}|f\rangle_i \quad (|f\rangle_i \neq 0), \quad (27)$$

故  $\chi_i(E) \in U(\lambda)$ , 结果

$$U(\chi) \subset U(\lambda), \quad (28)$$

比较(23)式, 得

$$U(\lambda) = U(\chi). \quad (29)$$

若  $\hat{B}^+ = \hat{A}$  (这是我们以后常会碰到的情况, 例如取  $\hat{V}_I = \sqrt{\hat{V}_I} \cdot \sqrt{\hat{V}_I}$ , 则  $\hat{B} = \sqrt{\hat{V}_I} = \hat{B}^+ = \hat{A}$ ; 又如对于 B. C. S 哈密顿情况<sup>[6]</sup>,  $\hat{B} = \hat{A}^+$ ). 这时方程(21)的核算子是全连续自共轭算, 对全连续自共轭算子, 立即由熟知的定理 (见[7]中定理) 可得

$$|\lambda(E)|_{\max} = |\chi(E)|_{\max} = \left\| \hat{A} \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{B} \right\|. \quad (30)$$

### 三、微扰级数的收敛性

#### 1. Wigner 微扰理论

对于吸引相互作用体系, 当本征值  $E < E_F$  时的薛定谔方程是由(8)式来决定:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I |\Psi\rangle. \quad (8)$$

把  $\hat{H}_0$  (或  $\hat{H}$ ) 所涂的 Hilbert 空间分成两个互不相交的子空间:  $\mathcal{H}^{(0)}$  和  $\mathcal{H}_\perp^{(0)}$ . 设  $\mathcal{H}^{(0)}$  是由能量为  $E_0$  的所有  $\hat{H}_0$  的本征矢的线性包所组成的子空间 (我们常遇到的  $\mathcal{H}^{(0)}$  就是  $\hat{H}_0$  基态所组成的空间), 记投影到  $\mathcal{H}^{(0)}$  与  $\mathcal{H}_\perp^{(0)}$  上的投影算子分别为  $\hat{Q}$  与  $\hat{P}$ , 它们具有性质:

$$\begin{cases} \hat{Q}^2 = \hat{Q}, \quad \hat{Q}\hat{H}_0 = \hat{H}_0\hat{Q}; \\ \hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{P}\hat{H}_0 = \hat{H}_0\hat{P}; \end{cases} \quad \hat{Q}\hat{P} = \hat{P}\hat{Q} = 0, \quad \hat{P} + \hat{Q} = \hat{I}. \quad (31)$$

(8)式可改写成

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \hat{Q}|\Psi\rangle + \hat{P}|\Psi\rangle \\ &= \hat{Q}|\Psi\rangle + \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

由(32)式进行逐次逼近法求得的解是否收敛, 将决定于

$$I + \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \left( \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I \right)^2 + \dots \quad (33)$$

这个算子级数在空间  $\mathcal{H}$  是否收敛, 由 [7] 中定理 2 (4. XIII) 可知, 级数(33)收敛的情况将与算子  $\frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I$  的最大本征值  $\chi_{\max}(E)$  有关. 记

$$r = \chi_{\max}(E), \quad (34)$$

当  $r < 1$  时, 级数(33)收敛, 否则就发散.

为此我们讨论本征值方程

$$\chi(E)|\Phi\rangle = \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I |\Phi\rangle. \quad (35)$$

由(35)可得

$$\chi(E) = \frac{\langle \Phi | \hat{V}_I \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \hat{V}_I | \Phi \rangle} \quad (|\Phi\rangle \in \mathcal{S}_\perp^0).$$

当  $\hat{V}_I = \hat{B} \cdot \hat{A}$ , 且  $\hat{B} = \hat{A}^+$  时, 和上节导得(30)式相同. 合并上式后可得

$$\begin{aligned} \chi_{\max}(E) = \chi_1(E) &= \left\| A \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} B \right\| \\ &= \sup_{|f\rangle \in \mathcal{S}_\perp^0} \frac{\langle f | \hat{V}_I \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I | f \rangle}{\langle f | \hat{V}_I | f \rangle} \\ &\leq \sup_{|f\rangle \in \mathcal{S}} \frac{\langle f | \hat{V}_I \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I | f \rangle}{\langle f | \hat{V}_I | f \rangle} \equiv \lambda_{\max}(E). \end{aligned} \quad (36)$$

如果  $\hat{H}$  的基态包含有一定成分的  $\hat{Q}|\Psi\rangle$ , 则(36)式取不等号

$$\chi_1(E) < \lambda_1(E). \quad (37)$$

当  $E = E_{\#}$  时

$$\chi_1(E_{\#}) < \lambda_1(E_{\#}) = 1, \quad (38)$$

所有其他的  $\chi_n(E_{\#}) < \chi_1(E_{\#}) < 1$ . 这样, (33)式收敛, 也就是(32)用逐次求得的级数解在  $E \leq E_{\#}$  时均匀收敛. 因而 Wigner 微扰级数收敛, 其收敛范围至少是  $E \leq E_{\#}$ , 也就是说, 在  $Q|\Psi\rangle \neq 0$  时, 可用 Wigner 微扰级数求基态能量.

现在问题是: 在寻常的 Wigner 微扰级数中  $Q|\Psi\rangle$  就是  $\hat{H}_0$  的基态(费米真空态  $|\phi_0\rangle$ ), 而  $\hat{H}$  的基态常常是与它正交的, 即  $Q|\Psi\rangle = 0$ , 这样由(32)求得的解只是代表与  $|\phi_0\rangle$  不正交的较高的激发态, 因此由

$$E = E_F + \langle \phi_0 | \hat{V}_I \left[ 1 + \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I + \left( \frac{\hat{P}}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I \right)^2 + \cdots \right] | \phi_0 \rangle \quad (39)$$

确定的  $E$  是  $\hat{H}$  的较高的本征值. 由于  $\chi(E)$  的单调上升性, 结果它可以大于 1, 因此(39)式所表示的 Wigner 微扰级数可以不再均匀收敛, 所以由(32)式出发逐次求解可以导致发散.

我们以 B. C. S 哈密顿作为例子, 看来 B. C. S 基态

$$|\Psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k a_{k+}^\dagger a_{k+}^\dagger) |0\rangle \quad (40)$$

是  $\hat{H}$  比较接近的基态(它是渐近正确的). 对于这样的基态与  $|\phi_0\rangle$  的标积是

$$\langle \phi_0 | \Psi \rangle = \prod_{k < k_F} v_k \prod_{k > k_F} u_k \xrightarrow[N, Q \rightarrow \infty]{} 0. \quad (41)$$

(41)式中我们注意到了

$$v_k^2 = \begin{cases} 1, & T_k \left( = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \in (-\mu, -\hbar\omega), \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{T_k}{\sqrt{T_k^2 + \Delta^2}} \right) < 1, & T_k \in (-\hbar\omega, \hbar\omega), \\ 0 & T_k \in (\hbar\omega, \infty); \end{cases}$$

$$u_k^2 = \begin{cases} 1, & T_k \in (\hbar\omega, \infty), \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{T_k}{\sqrt{T_k^2 + \Delta^2}} \right) < 1, & T_k \in (-\hbar\omega, \hbar\omega), \\ 0, & T_k \in (-\mu, -\hbar\omega). \end{cases}$$

而能层  $(-\hbar\omega, \hbar\omega)$  内的状态数正比于粒子数  $N$ , 所以在  $N$  与  $Q \rightarrow \infty$  时, (41)式趋于零.

由此可见,  $\hat{H}_{B.C.S}$  的基态, 在  $Q, N$  很大时, 确与  $|\phi_0\rangle$  正交, 故  $Q|\Psi\rangle = 0$ . 因此, 由非齐次方程(32)出发求得的解一则并不代表基态(它代表与  $|\phi_0\rangle$  不正交的  $\hat{H}_{B.C.S}$  较高的激发态); 二则 Wigner 微扰级数不再均匀收敛了. 这就是为什么用寻常微扰理论不可能得出超导基态, 并且级数发散的原因.

## 2. Schrödinger 微扰理论

正如上节中所指出的那样, 讨论 Schrödinger 微扰理论[见(5)–(7)]的收敛性只要讨论其核算子  $\frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E)$  的本征值情况, 即看它的本征值是否全落在“单位圆”内部. 写出

$$\eta(\Delta E)|\varphi\rangle = \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E)|\varphi\rangle. \quad (42)$$

今比较

$$\chi(E)|\Phi\rangle = \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I|\Phi\rangle, \quad (43)$$

记  $U(\eta)$  与  $U(\chi)$  分别代表满足(42)和(43)式的所有本征值全体. 当  $\chi(E) \in U(\chi)$  时, 则

$$\begin{aligned} \chi(E)|\Phi\rangle &= \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0 + \Delta E} \hat{V}_I|\Phi\rangle \\ &= \left\{ \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} \hat{V}_I - \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} \Delta E \frac{\hat{P}_0}{E - \hat{H}_0} \hat{V}_I \right\} |\Phi\rangle \\ &= \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E \chi(E)) |\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

因此,  $\chi(E) \in U(\eta)$ , 且

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \eta(\Delta E'), \\ \Delta E' &= \chi(E)\Delta E = \chi(E)(E - E_F); \end{aligned} \quad (45)$$

反之, 若  $\eta(\Delta E) \in U(\eta)$ , 则

$$\eta(\Delta E)|\varphi\rangle = \frac{\hat{P}_0}{E_F - \hat{H}_0} (\hat{V}_I - \Delta E)|\varphi\rangle,$$

有

$$(E_F - \hat{H}_0)\eta(\Delta E)|\varphi\rangle = \hat{P}_0\hat{V}_I|\varphi\rangle - \hat{P}_0\Delta E|\varphi\rangle,$$

得

$$\eta(\Delta E)|\varphi\rangle = \frac{\hat{P}_0}{E_F + \frac{\Delta E}{\eta(\Delta E)} - \hat{H}_0} \hat{V}_I|\varphi\rangle, \quad (46)$$

故

$$\left. \begin{aligned} \eta(\Delta E) &= \chi\left(E_F + \frac{\Delta E}{\eta(\Delta E)}\right), \\ \eta(\Delta E) &\in U(\chi). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

因此每一个  $\chi(E)$  就有一与之对应的  $\eta(\Delta E)$ , 反之每一个  $\eta(\Delta E)$  就有一与之对应的  $\chi(E)$ .

由(45)式知

$$\frac{d(\Delta E')}{dE} = \frac{d}{dE} \{\chi(E)[E - E_F]\} = (E - E_F) \frac{d\chi(E)}{dE} + \chi(E), \quad (48)$$

与导得(15)式相似,有

$$\frac{d\chi(E)}{dE} = \chi(E) \frac{\langle \Phi | \hat{P}_0 | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \hat{P}_0 (\hat{H}_0 - E) \hat{P}_0 | \Phi \rangle}. \quad (49)$$

将(49)式代入(48)式得

$$\frac{d\Delta E'}{dE} = \chi(E) \left[ 1 - (E_F - E) \frac{\langle \Phi | \hat{P}_0 | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \hat{P}_0 (\hat{H}_0 - E) \hat{P}_0 | \Phi \rangle} \right] > 0. \quad (50)$$

所以当  $E$  增加, 由(45)式决定的  $\Delta E'$  也增加. 今令  $E$  为本征能量, 若

$$\chi(E) < 1, \quad (51)$$

又因  $E - E_F < 0$ , 故

$$\Delta E' = \chi(E)(E - E_F) > E - E_F. \quad (52)$$

因此要使 Schrödinger 微扰级数中的  $\Delta E'$  表示真正的本征值  $E$  与  $E_F$  之差  $\Delta E$ , 就必须  $\Delta E'$  减小些, 也就是  $E$  减小些, 结果

$$\eta(\Delta E) = \chi(E') \quad (E' < E), \quad (53)$$

而

$$\chi(E') < \chi(E) \quad (\text{当 } E' < E \text{ 时}). \quad (54)$$

这样可得

$$\eta(E - E_F) < \chi(E). \quad (55)$$

同理可证

$$\eta(E - E_F) \geq \chi(E) \quad (\text{当 } \chi(E) \geq 1 \text{ 时}). \quad (56)$$

由(55)和(56)推知, Schrödinger 微扰级数的收敛行为与 Wigner 微扰级数的收敛行为不完全同. 由于级数收敛与发散的快慢决定于核算子最大本征值的大小, 当最大本征值落在“单位圆”内, 则值愈小, 级数收敛愈快; 而当最大本征值落在“单位圆”外面, 则离 1 愈远, 发散愈快. 所以如果 Wigner 级数收敛, 则 Schrödinger 级数亦收敛, 并且收敛更快些; 如果 Wigner 微扰级数发散, 则 Schrödinger 微扰级数亦发散, 并且发散更快些. 但两

种级数收敛的临界判据是相同的。由于 Schrödinger 微扰级数可以建立连接集团展式，它在多体问题中较重要，现在我们建立了判別 Schrödinger 微扰级数收敛的判据，即只需判別相应的 Wigner 微扰级数收敛情况。由于 Wigner 级数的核算子比 Schrödinger 微扰级数的核算子要简单，这样会有助于连接集团展式收敛性的判別。我们在其他文章中<sup>[6]</sup>，用它来讨论某些具体问题。

最后，作者借此机会对周世勋教授的指导深致谢意。

### 参 考 文 献

- [1] Schwinger, J., *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 47 (1961), 122;  
Bargmann, V., *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 38 (1952), 961.
- [2] Weinberg, S., *Phys. Rev.*, 131 (1963), 440.
- [3] Cooper, L. N., *Phys. Rev.*, 122 (1961), 1021.
- [4] Fukushima, K., Fukuda, N., *Prog. Theor. Phys.*, 28 (1963), 809.
- [5] 程麟趾, 武汉大学学报, 2 (1963), 166.
- [6] 陶 云、孙 鑫、周世勋, 物理学报, 21 (1965), 880.
- [7] Конторович, Л. В., Акилов, Г. П., *Функциональный анализ в Нормированных пространствах*.

## THE CONVERGENCE OF A MANY-BODY PERTURBATION SERIES FOR AN ATTRACTIVE FERMI-SYSTEM

TOUR YUNG

### ABSTRACT

The problem of the convergence for Wigner and Schrödinger perturbation series is discussed by means of the functional analysis method. It is found that the convergent radii of two typic perturbation series are equivalent, but the rates of the convergence or divergence are not equivalent. An useful test is given.