

## $S\tilde{U}(12)$ 羣表示的填充与强衰变\*

馬 中 騏 刘 連 寿 陈 激

(北京大学物理系)

### 提 要

本文讨论了  $\frac{3}{2}^-$ ,  $\frac{1}{2}^-$ ,  $\frac{7}{2}^+$  等共振态在  $S\tilde{U}(12)$  羣表示中的填充及其强衰变,发现 **16016**, **35100** 两个表示中的  $\frac{3}{2}^-$  粒子不能衰变到  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$ . 通过改变运动方程质量项的符号使表示的宇称改变,就能将  $(\frac{3}{2}^-, 8)$  和  $(\frac{1}{2}^-, 1)$  填在 **572** 表示中,从而使它们能衰变到  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$ . 但是,  $(\frac{3}{2}^-, 1)$  和  $\frac{7}{2}^+$  仍然不能通过  $S\tilde{U}(12)$  对称的有效顶点衰变. 本文还详细分析了  $S\tilde{U}(12)$  在基本粒子分类和强衰变中的成功之处与局限性,并讨论了这种局限性产生的原因.

$SU(6)$  理论<sup>[1-3]</sup>在强作用粒子分类上比  $SU(3)$  前进了一步,它将几个具有确定自旋、宇称的  $SU(3)$  表示联系起来. 它的两个低维表示 (**35**, **56**) 恰好对应着现有的全部稳定粒子及低能共振态,其中粒子的自旋完全符合要求,而且同一个  $SU(6)$  表示中的粒子有相同宇称. 但是,  $SU(6)$  是非相对论性的理论,它不能很好地处理粒子之间相互作用的问题,例如  $\frac{3}{2}^+$  及  $1^-$  粒子的强衰变就被禁戒了.

近来,在  $SU(6)$  理论的相对论推广方面有不少工作<sup>[4-8]</sup>,其中比较成功的是  $S\tilde{U}(12)$  理论<sup>[7,8]</sup>. 本文讨论  $S\tilde{U}(12)$  理论在粒子填充与强衰变方面的情况. 由于  $SU(6)$  是  $S\tilde{U}(12)$  的非相对论近似(见附录 B),所以在粒子填充方面,它们给出相对应的结果.

前面提到,  $S\tilde{U}(12)[SU(6)]$  填充表示的成功之处,在于全部稳定粒子及低能共振态恰好填满了它的两个低维表示. 可是,在进一步填充新表示的时候,就出现了困难,因为它要求同时照顾到粒子的内部量子数与自旋宇称,而且还要求比  $SU(3)$  更强得多的衰变预言与实验无矛盾. 这些要求往往不能同时得到很好的满足.

实验上发现的  $SU(3)$  重子多重态,除了已经填到 **364** 中的以外,还倾向于有一个  $\frac{3}{2}^-$  八重态,  $\frac{3}{2}^-$  单态和  $\frac{1}{2}^-$  单态,它们都通过强作用衰变到  $\frac{1}{2}^+$  重子和  $0^-$  介子<sup>[9,10]</sup>. 此外,还有一些  $\pi N$  共振态,它们的自旋宇称已经肯定,但所属的  $SU(3)$  表示尚残缺不全. 如,  $N_{1/2}^*(\frac{5}{2}^+)$ ,  $N_{3/2}^*(\frac{7}{2}^+)$  等等. 在第一、二节中我们将分析上述几个  $SU(3)$  多重态在  $S\tilde{U}(12)$  中的填充问题. 第三节给出  $S\tilde{U}(12)$  理论对强衰变的一些预言,最后在第四节进行讨论.

$\frac{3}{2}^-$  粒子衰变为  $\frac{1}{2}^+$  重子与  $0^-$  介子的宽度很大<sup>[11]</sup>,与  $\frac{3}{2}^+$  粒子的宽度相仿. 因此,按照现有  $S\tilde{U}(12)$  理论的精神,应该认为它衰变的有效顶点也是  $S\tilde{U}(12)$  对称的. 这样,  $\frac{3}{2}^-$  就

\* 1965年7月26日收到.

必须填在  $143 \times 364$  所得到的表示中<sup>1)</sup>。我们知道

$$143 \times 364 = 364 + 572 + 16016 + 35100. \quad (1)$$

按照 Salam<sup>[12]</sup> 与 Sakita<sup>[7]</sup> 等的观点,  $364$  与  $572$  都有正宇称。这样,  $\frac{3}{2}^-$  只能属于  $16016$  或  $35100$ 。

在  $16016$  中包含有一个  $\frac{3}{2}^-$  八重态(不包含  $\frac{3}{2}^-$  单态), 相应的场函数为(见附录 A)

$$\Psi_{BCDE}^A = \left\{ \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma^\mu]_\beta^\alpha [(\hat{p} + m)\gamma_5 C]_{\gamma\delta} D_{\epsilon\mu\epsilon'} \epsilon_{cd} \delta_b^a + \right. \\ \left. + bce \text{ 的一切排列} \right\} + BED \text{ 循环}. \quad (2)$$

它衰变的  $S\tilde{U}(12)$  对称有效顶点是

$$\bar{\Psi}_A^{BCDE} \Phi_B^A \Psi_{CDE}, \quad (3)$$

其中  $\Phi_B^A$  与  $\Psi_{CDE}$  是  $143$  与  $364$  表示的场函数<sup>[8]</sup>。然而, 计算表明, 在顶点(3)中对应于  $\bar{\Psi}_A^{BCDE}$  取  $\frac{3}{2}^-$  场函数、 $\Phi_B^A$  中取  $0^-$  场函数而  $\Psi_{CDE}$  中取  $\frac{1}{2}^+$  场函数的那些项全部等于零。因此,  $16016$  表示中的  $\frac{3}{2}^-$  八重态不能通过  $S\tilde{U}(12)$  对称的有效顶点衰变到  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$ 。

在  $35100$  表示中包含有三个  $\frac{3}{2}^-$  八重态和一个  $\frac{3}{2}^-$  单态。但是, 计算表明, 它们都不能通过  $S\tilde{U}(12)$  对称的有效顶点衰变到  $\frac{1}{2}^+$  重子和  $0^-$  介子。

## 二

我们看到, 如果将  $\frac{3}{2}^-$  填在  $16016$  或  $35100$  中, 它们就不可能通过  $S\tilde{U}(12)$  对称的有效顶点衰变为  $\frac{1}{2}^+$  重子和  $0^-$  介子。解决这个矛盾的一个方案是将  $\frac{3}{2}^-$  填在  $572$  表示中。这牵涉到  $S\tilde{U}(12)$  的表示是否有唯一确定的宇称的问题。

我们知道, 单是  $S\tilde{U}(12)$  的表示本身, 并不具有直接的物理意义, 必须加上运动方程才能描述物理粒子。然而, 运动方程的形式并不是唯一的。只要将方程中的质量项改号, 所描述的粒子的宇称就会变号<sup>[13,14,21]</sup>。

以  $143$  表示为例, 它的场函数写成<sup>[8]</sup>

$$\Phi_{bb}^a = \left( \phi^i + \gamma_5 \phi_5^i + \gamma^\mu \phi_\mu^i + i\gamma^\mu \gamma_5 \phi_{\mu 5}^i + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu}^i \right)_\beta^\alpha (T^i)_b^a, \quad (4)$$

加上运动方程

$$(\hat{p})_\beta^\alpha \Phi_{bb}^a = m \Phi_{bb}^a, \quad (\hat{p})_\alpha^\beta \Phi_{bb}^a = -m \Phi_{bb}^a, \quad (5)$$

就得到

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 0, \\ \phi_{\mu 5} &= \frac{1}{im} p_\mu \phi_5, \quad p^\mu \phi_{\mu 5} = -im \phi_5, \\ \phi_{\mu\nu} &= \frac{1}{im} (p_\mu \phi_\nu - p_\nu \phi_\mu), \quad p^\mu \phi_{\mu\nu} = -im \phi_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

此时, 描写物理粒子的场函数是  $\phi_5(0^-)$ ,  $\phi_\mu(1^-)$ , 宇称都是负的。

1) Salam<sup>[12]</sup> 将  $\frac{3}{2}^-$  填  $5720$  表示, 但这一表示不包含在  $143 \times 364$  之中, 不能通过  $S\tilde{U}(12)$  对称的有效顶点衰变。Salam 认为  $5720$  与  $572$  两个表示“有相同的  $SU(6)$  结构”, 然而事实上,  $572$  对应  $SU(6)$  的  $70$ , 而  $5720$  对应  $70^*$  (见附录 B 表 2), 它们的性质有很大不同。例如  $35 \times 56$  中只包含  $70$  而不包含  $70^*$ 。

现在改用运动方程

$$(\hat{p})_{\beta}^{\beta'} \Phi_{\beta'a}^a = -m\Phi_{\beta'a}^a, \quad (\hat{p})_{\alpha'}^{\alpha} \Phi_{\beta'b}^a = -m\Phi_{\beta'b}^a, \quad (7)$$

就得到

$$\left. \begin{aligned} \phi_5 &= 0, \\ \phi_{\mu} &= -\frac{1}{m} p_{\mu} \phi, \quad p^{\mu} \phi_{\mu} = -m\phi, \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta} \phi_{\rho\delta} &= \frac{2}{m} (p_{\mu} \phi_{\nu 5} - p_{\nu} \phi_{\mu 5}), \quad p^{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta} \phi_{\rho\delta} = 2m\phi_{\nu 5}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

描写物理粒子的场函数成为  $\phi(0^+)$  与  $\phi_{\mu 5}(1^+)$ , 宇称都是正的。由此可见,  $0^+$  标量介子八重态和单态都可以用 **143** 表示描述, 而不必一定用 **4212** 或 **5940**<sup>[12]</sup>。

对于 **572** 维表示<sup>[15]</sup>, 我们写(只明显写出代表  $s = \frac{3}{2}$  粒子的项)

$$\Psi_{[ABC]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abcs} \left\{ (\gamma^{\mu} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 D'_{\mu})_{\gamma\delta} \gamma_{\sigma}^{\epsilon} + \frac{1}{2} (\sigma^{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 D'_{\mu\nu})_{\gamma\delta} \gamma_{\sigma}^{\epsilon} \right\}, \quad (9)$$

加上运动方程

$$(\hat{p})_{\alpha'}^{\alpha} \Psi_{\alpha' a \beta b \gamma c} = (\hat{p})_{\beta}^{\beta'} \Psi_{\alpha a \beta' b \gamma c} = (\hat{p})_{\gamma}^{\gamma'} \Psi_{\alpha a \beta b \gamma' c} = -m \Psi_{\alpha a \beta b \gamma c}, \quad (10)$$

就可以得到描述负宇称的重子。在这一表示中, 除了  $\frac{3}{2}^-$  八重态以外, 还包含  $\frac{1}{2}^-$  的单态、八重态和十重态。  $\frac{1}{2}^-$  的单态可以填  $Y_0^*(1405)$ , 而  $\frac{1}{2}^-$  八重态与十重态在实验上尚未发现<sup>[10,21]</sup>。

我们看到,  $S\tilde{U}(12)$  的每一个表示实际上都可以描述有两种不同宇称的粒子。这种不唯一性从夸克的观点看来是很容易理解的。按照 Salam<sup>[8]</sup> 的方式写运动方程, 就规定了表示的宇称。这种规定<sup>[12,7]</sup>实际上相当于说: 表示的宇称由反夸克的数目  $\bar{n}$  决定:

$$P = (-1)^{\bar{n}}. \quad (11)$$

这相当于认为夸克和反夸克在基本粒子内静止不动, 因而基本粒子的宇称由夸克和反夸克的内禀宇称决定。但是夸克在基本粒子内部必然是运动的。虽然它们的运动方式目前还不清楚, 但是可以肯定的是, 这种运动会对宇称有贡献。因此就存在着两种可能性:

$$\left. \begin{aligned} P &= (-1)^{\bar{n}}, \quad \text{相当于夸克的“}s\text{波运动状态”}; \\ P &= (-1)^{\bar{n}+1}, \quad \text{相当于夸克的“}p\text{波运动状态”}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这里, 我们借用“ $s$ 波”、“ $p$ 波”这两个术语来分别代表夸克的贡献正负宇称的两种状态。从这样的定性考虑可以看出,  $S\tilde{U}(12)$  的表示能具有两种宇称是并不奇怪的。

利用(9), (10)写出 **572\***, **364**, **143** 的  $S\tilde{U}(12)$  对称顶点, 可以得到  $\frac{3}{2}^-$  八重态以及  $\frac{1}{2}^-$  单态衰变的有效顶点(见附录 C)。在秦旦华等的文章<sup>[10]</sup>中, 将详细分析  $\frac{3}{2}^-$  和  $\frac{1}{2}^-$  共振态的实验情况。利用  $S\tilde{U}(12)$  顶点计算的结果也将在那里讨论。

注意, **572** 表示中不包含  $\frac{3}{2}^-$  单态, 而 **35100** 表示中的  $\frac{3}{2}^-$  单态又不能衰变到  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$ , 因此如果存在  $\frac{3}{2}^-$  单态的话<sup>[10]</sup>, 它将不能通过  $S\tilde{U}(12)$  对称的有效顶点衰变:

$$\frac{3}{2}^- (SU(3) \text{ 单态}) \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-. \quad (13)$$

## 三

假定强衰变的有效顶点具有  $S\tilde{U}(12)$  对称性,产生了以下几个新的特点:

- (1) 将几个不同  $SU(3)$  多重态之间的有效耦合常数联系起来;
- (2) 对于三个  $SU(3)$  八重态之间的耦合,能给出确定的  $D/F$  比;
- (3) 在顶点上出现了一些“形式因子”;
- (4) 在一些情况下给出禁戒律.

在前面讨论  $\frac{3}{2}^-$  衰变的时候,已经看到  $S\tilde{U}(12)$  给出禁戒的例子. 对于更高自旋的粒子,问题更加突出. 在  $143 \times 364$  所得到的四个表示中,最高自旋只能是  $\frac{3}{2}$ . 因此,更高自旋的粒子,例如  $N_{\frac{3}{2}}^*(\frac{7}{2}^+)$  无论如何也不可能通过具有  $S\tilde{U}(12)$  对称性的有效顶点衰变. 我们将在下节进一步分析这一问题. 本节先讨论第(1),(2),(3)三点<sup>1)</sup>.

这三个特点在  $364^*$ ,  $364$  与  $143$  之间的耦合中都有反映. 这一耦合意味着  $SU(3)$  的下述几种耦合:

$$\frac{1^+}{2}(8)\frac{1^+}{2}(8)0^-(8+1), \frac{3^+}{2}(10)\frac{1^+}{2}(8)0^-(8+1), \frac{3^+}{2}(10)\frac{3^+}{2}(10)0^-(8+1),$$

$$\frac{1^+}{2}(8)\frac{1^+}{2}(8)1^-(8+1), \frac{3^+}{2}(10)\frac{1^+}{2}(8)1^-(8+1), \frac{3^+}{2}(10)\frac{3^+}{2}(10)1^-(8+1);$$

它们由一个公共的有效耦合常数决定. 这样就能将  $g_{NN\pi}$ ,  $g_{NN\rho}$  与  $\frac{3}{2}^+$  的衰变宽度联系起来. 如果再加上矢量介子普适耦合的假定<sup>[16,17]</sup>

$$g_{NN\rho} = g_{\pi\rho\rho},$$

就能够进一步将它们和  $1^-$  介子的宽度联系起来<sup>2)</sup>.

这些联系体现了前面提到的(1),(2)两点. 值得注意的是(3):“形式因子”. 出现这种因子是  $S\tilde{U}(12)$  理论的特征. 在这些因子中包含有质量(见附录 C), 如果把这些质量取作物理粒子的观察质量,有效顶点的  $SU(3)$  对称性会被质量差破坏掉.

但是也可以认为,质量差所引起的对称性破坏是高级效应,它只影响运动学因子,而在相互作用顶点中的质量仍然是简并的,可以把它们取为  $S\tilde{U}(12)$  多重态的中心质量,或者  $SU(3)$  多重态的中心质量. 这样,有效顶点仍然保持  $SU(3)$  对称性.

按照上述三种假定计算的结果分别列在表 1 的第二、三、四列中(以  $\frac{g_{NN\pi}^2}{4\pi} = 15$  作输入);第五列是实验值<sup>[11]</sup>. 对于  $\phi-\omega$  混合角采用<sup>[19]</sup>  $\theta = 35.2^\circ$ .

由于矢量介子与  $\bar{N}N$  的耦合和它们与  $\pi\pi$  的耦合有不同的形式因子,对于耦合强度的普适性需要有具体的理解. 在上述计算中是认为在  $q^2 = 0$  时成立普适性. 同时假定了  $\bar{N}N$  的磁耦合项对耦合的普适性没有贡献.

由表可见,在形式因子中采用观察质量能对  $\frac{3}{2}^+$  的宽度得到较好的结果,然而却极大

1) 本节的内容由奥丹迪同志参加计算与讨论. 计算中用的质量不简并的顶点由关洪、胡希伟同志提供.

2) 最初给出这些联系的是 Gürsey, Pais 与 Radicati<sup>[18]</sup>, 然而他们所写出的顶点包含有宇称破坏部分. 以后 Bég 与 Pais<sup>[9]</sup> 修改了这一顶点, 去掉了其中破坏宇称的部分. 实际上, Bég 和 Pais 的顶点相当于在  $S\tilde{U}(12)$  顶点中只取了赝矢耦合部分.

表 1

	计 算 值 (MeV)			实 验 值 (MeV)
	采用观察质量	采用 $S\tilde{U}(12)$ 中心 质量	采用 $SU(3)$ 中心 质量	
$\Gamma_{N_{33}^*}$	104	70	65	125
$\Gamma_{Y_1^*}$	40	28	26	$53 \pm 2$
$\Gamma_{\Xi^*}$	12.5	9.4	8.7	$7.5 \pm 1.7$
$\Gamma_{\rho}$	73	174	85	$106 \pm 5$
$\Gamma_{K^*}$	3.6	69	31	$50 \pm 2$
$\Gamma_{\phi}$	0.05	6.7	3.4	$3.1 \pm 0.6$

地破坏了矢量介子八重态内部的衰变宽度比。为了与实验不发生太大矛盾, 必须在形式因子中采用多重态的中心质量, 这意味着有效顶点的  $SU(3)$  对称性需要保持, 而不能被质量差破坏掉。

#### 四

从前面的分析可以看到, 用  $S\tilde{U}(12)$  群对强相互作用粒子进行分类虽然有成功之处 (143, 364 两个表示恰好填满了, 而且所预言的  $\frac{3}{2}^+$  与  $1^-$  衰变宽度在数量级上符合实验), 然而现有的  $S\tilde{U}(12)$  理论的成功仅仅局限在这两个表示之中。试图超出这两个表示以外, 进一步对新发现的共振态进行分类就遇到了严重困难。

如果仅仅要求量子数符合, 当然可以为每一个粒子在  $S\tilde{U}(12)$  表示中找到位置。但是, 目前在实验上发现的粒子丝毫显不出集中在少数几个  $S\tilde{U}(12)$  表示之中的趋势, 它们零零落落地分散在许多高维表示之中。如果说  $\frac{3}{2}^-$  八重态可以填 572 或 16016 的话 (仅仅看量子数),  $\frac{3}{2}^-$  单态就必须填 35100, 而  $\frac{7}{2}^+$  就需要填到 (见附录 B) 324324 维表示之中! 与此同时, 这些表示中多出了成百上千个“未发现”的粒子。这种状况显然说明现有的  $S\tilde{U}(12)$  理论没有能完满地解决强相互作用粒子分类的问题。

如果进一步要求强作用的有效顶点 (三体  $S$  矩阵元) 具有  $S\tilde{U}(12)$  对称性, 矛盾就更大了。这样会出现一系列与实验不符合的禁戒律:

$$\frac{3^-}{2} (\text{单态}) \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-, \quad (13)$$

$$\frac{7^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-. \quad (14)$$

.....

当然可以设想  $\frac{3}{2}^-$  (单态) 及  $\frac{7}{2}^+$  通过一定的机构衰变, 例如如图 1 (此时, 中间粒子的传播函数会破坏  $S\tilde{U}(12)$  对称性)。然而, 如果这类机构在  $\frac{3}{2}^-$  及  $\frac{7}{2}^+$  等等的衰变中有重要贡献, 就没有理由认为在  $\frac{3}{2}^+$  的衰变中可以不考虑类似的机构。这实际上意味着强衰变的有效顶点不再是  $S\tilde{U}(12)$  对称的, 第三节所得到的结果也就失去了意义。

以上这些困难说明了  $S\tilde{U}(12)$  理论有着根本性的缺陷。我们认为, 缺陷之一在于它没有能合理地考虑轨道角动量。

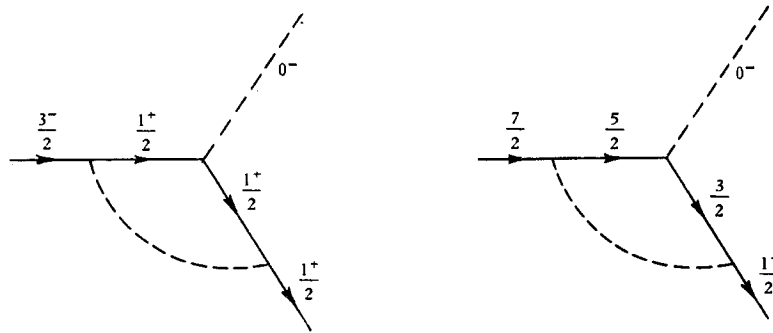


图 1

在现有的  $S\tilde{U}(12)$  理论中,在基本粒子内夸克是静止不动的。此时,基本粒子的宇称是夸克内禀宇称之积(见第二节),而基本粒子自旋是夸克自旋的矢量和。例如  $S = \frac{7}{2}$  的粒子至少必须包含七个夸克(五个夸克两个反夸克),因此它就只能填在很高维的表示之中。然而,很难设想夸克是不动的,而夸克的运动必然会对基本粒子的宇称和自旋都给出贡献,不能不加考虑。

在衰变问题中,由于夸克不动就要求始态粒子的自旋等于末态中夸克自旋的矢量和。这导致下述选择定则:

$$\text{始态粒子自旋} \leq \frac{\text{末态夸克总数}}{2} \quad (15)$$

这样就禁戒了  $\frac{7}{2}^+$  衰变到  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$ , 因为  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$  总共只有五个夸克。

实际上,  $S\tilde{U}(12)$  理论还要求比 (15) 更强的选择定则。我们知道,  $SU(6)$  理论禁戒了  $\frac{3}{2}^+$  衰变为  $\frac{1}{2}^+$  和  $0^-$  是因为这个衰变必须通过  $p$  波进行,而  $SU(6)$  只能容许  $s$  波衰变(自旋守恒)。  $S\tilde{U}(12)$  理论容许了  $\frac{3}{2}^+$  的  $p$  波衰变,然而它并没有彻底解决轨道角动量的问题。它对于衰变中的轨道角动量仍然有很强的限制。例如,在 **16016** 或 **35100** 衰变到 **364** 与 **143** 的问题中,  $S\tilde{U}(12)$  对称性使得一切不能通过  $s$  波进行的衰变都禁戒了(注意在此情况下  $p$  波衰变是被宇称守恒禁戒掉的):

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{16016} \\ \mathbf{35100} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{364} + \mathbf{143} \text{ 凡是不能通过 } s \text{ 波进行的衰变都禁戒。} \quad (16)$$

而  $\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-$  是  $d$  波衰变,因此  $S\tilde{U}(12)$  禁戒了 **16016** 及 **35100** 中的  $\frac{3}{2}^-$  衰变为  $\frac{1}{2}^+, 0^-$ 。

从上述可见,现有的  $S\tilde{U}(12)$  理论没有能合理地考虑基本粒子内部夸克之间以及基本粒子相互之间的轨道角动量。我们知道,自旋与轨道角动量是同一个三维空间中的角动量,它们的区分只有相对的意义,它们之间经常相互转化。  $S\tilde{U}(12)[SU(6)]$  理论没有充分地考虑到这一点,这是它产生一系列矛盾的一个重要原因。

作者感谢胡宁教授的指导以及科研组其它同志的协助。

1)  $S\tilde{U}(12)$  容许  $572^+$  到  $364 + 143$  的  $p$  波衰变。我们在第二节中将  $572$  表示的宇称改号的同时,也引进了一个附加的角动量(夸克运动的贡献?),这样  $572^-$  就能通过  $d$  波衰变到  $\frac{1}{2}^+$  与  $0^-$  了。

### 附录 A 16016 表示的场函数

16016 是  $S\tilde{U}(12)$  群的表示, 它对应的杨氏图可以画成

$$\begin{array}{c} \boxed{A} \\ \boxed{B|C|D|E} \end{array} \tag{A1}$$

这代表着有一个上指标和四个对称下指标的无迹张量. 将它按  $S\tilde{U}(4) \otimes SU(3)$  群约化, 得到

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \boxed{A} \\ \boxed{B|C|D|E} \end{array} &= \left[ \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \quad \boxed{a} \\ \boxed{\beta|\gamma|\delta|\epsilon} \quad \boxed{b|c|d|e} \end{array} \right] + \\ &+ \left[ \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \quad \boxed{a} \\ \boxed{\gamma|\epsilon|\beta} \quad \boxed{c|e|b} \\ \boxed{\delta} \quad \boxed{d} \end{array} \right] + BCDE \text{ 任意排列} \\ &+ \left[ \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \quad \boxed{a} \\ \boxed{\gamma|\epsilon} \quad \boxed{c|e} \\ \boxed{\delta|\beta} \quad \boxed{d|b} \end{array} \right] + CDE \text{ 循环} \\ &+ \left[ \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \quad \boxed{a} \\ \boxed{\gamma|\epsilon} \quad \boxed{c|e} \\ \boxed{\delta} \quad \boxed{d} \\ \boxed{\beta} \quad \boxed{b} \end{array} \right] + BCDE \text{ 循环}, \end{aligned} \tag{A2}$$

其中

$$\begin{aligned} A &\equiv \alpha a, \quad B \equiv \beta b, \quad C \equiv \gamma c, \quad D \equiv \delta d, \quad E \equiv \epsilon e, \\ \alpha, \beta, \dots &= 1, \dots, 4; \quad a, b, \dots = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

式 (A2) 右边每一项的前一个因子是  $S\tilde{U}(4)$  杨氏图, 后一因子是  $SU(3)$  杨氏图. 由 (A1) 代表的  $S\tilde{U}(12)$  张量应该是无迹的. 为此, 只需要  $S\tilde{U}(4)$  和  $SU(3)$  的张量有一个无迹就够了. 下面将看到, 运动方程自动保证  $S\tilde{U}(4)$  张量无迹, 因此这里的  $SU(3)$  杨氏图规定代表有迹张量.

首先考虑场函数的  $S\tilde{U}(4)$  部分. 它们是

$$\Psi_{[\beta\gamma\delta\epsilon]}^{\alpha}, \quad \Psi_{[\gamma\delta][\epsilon\beta]}^{\alpha}, \quad \Psi_{[\gamma\delta][\epsilon\beta]}^{\alpha}, \quad \Psi_{[\beta\gamma\delta]\epsilon}^{\alpha}.$$

它们分别对应杨氏图(数字是  $S\tilde{U}(4)$  表示维数)

$$\begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\beta|\gamma|\delta|\epsilon} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\gamma|\epsilon|\beta} \\ \boxed{\delta} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\gamma|\epsilon} \\ \boxed{\delta|\beta} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\gamma|\epsilon} \\ \boxed{\delta} \\ \boxed{\beta} \end{array} \tag{A3}$$

120                      140                      60\*                      36\*

为了得到这几个场函数, 先利用 Salam<sup>[81]</sup> 的方法写出对应于以下两个杨氏图:

$$\begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\beta} \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{c} \boxed{\alpha} \\ \boxed{\beta} \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \gamma & \varepsilon \\ \hline \delta & \\ \hline \end{array}$$

并且满足运动方程的函数

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta[\gamma\delta\varepsilon]}^{\alpha} = & \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma_5]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}C]_{\gamma\delta}\phi_{\varepsilon\mu} + \\ & + \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma^{\nu}C]_{\gamma\delta}\phi_{\varepsilon\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta[\gamma\delta]\varepsilon}^{\alpha} = & \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma_5]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma_5C]_{\gamma\delta}\phi_{\varepsilon} + \\ & + \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma_5C]_{\gamma\delta}\phi'_{\varepsilon\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

对(A4)加上  $\beta\gamma$  和  $\beta\varepsilon$  的对称化条件就得到 120 表示的场函数

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta[\gamma\delta\varepsilon]}^{\alpha} = & \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma_5]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}C]_{\gamma\delta}D'_{\varepsilon\mu} + \\ & + \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma^{\nu}C]_{\gamma\delta}\phi_{\varepsilon\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

其中  $D'_{\mu}$  满足  $S = \frac{3}{2}$  粒子的方程<sup>[20]</sup>

$$\hat{p}D'_{\mu} = mD'_{\mu}, \quad \gamma^{\mu}D'_{\mu} = 0. \quad (\text{A7})$$

但是  $\phi_{\mu\nu}$  还不能描写单一自旋的粒子。令

$$\phi_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{10} \left( \frac{p_{\mu} + \gamma_{\mu}}{m} \right) \gamma_5 D'_{\nu} - \frac{1}{10} \left( \frac{p_{\nu} + \gamma_{\nu}}{m} \right) \gamma_5 D'_{\mu} - \frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} p_{\lambda} D'_{\rho}, \quad (\text{A8})$$

则  $G_{\mu\nu}$  满足  $S = \frac{5}{2}$  粒子的方程<sup>[20]</sup>

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}, \quad \hat{p}G_{\mu\nu} = mG_{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu}G_{\mu\nu} = 0, \quad g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A9})$$

类似地,对(A5)加上  $\beta\varepsilon$  对称化条件就得到 140 维表示的场函数

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta[\gamma\delta](\varepsilon\beta)}^{\alpha} = & \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma_5]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma_5C]_{\gamma\delta}N_{\varepsilon} + \\ & + \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma_5C]_{\gamma\delta}\phi_{\varepsilon\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

令

$$\phi_{\mu} = D_{\mu} - \frac{1}{3} \left( \frac{p_{\mu} + \gamma_{\mu}}{m} \right) \gamma_5 N, \quad (\text{A11})$$

则  $N$  和  $D_{\mu}$  分别描写  $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  的粒子

$$\hat{p}N = mN, \quad \hat{p}D_{\mu} = mD_{\mu}, \quad \gamma^{\mu}D_{\mu} = 0. \quad (\text{A12})$$

再对(A5)加上  $\beta\varepsilon$  的反对称化条件,就得到 60\* 表示的场函数:

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta[\gamma\delta](\varepsilon\beta)}^{\alpha} = & \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma_5]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma_5C]_{\gamma\delta}N'_{\varepsilon} + \\ & + \frac{1}{m^2} [(\hat{p} + m)\gamma^{\mu}]_{\beta} [(\hat{p} + m)\gamma_5C]_{\gamma\delta}\phi'_{\varepsilon\mu}, \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

$N'$  描写  $S = \frac{1}{2}$  的粒子

$$\hat{p}N' = mN', \quad (\text{A14})$$

而

$$\phi'_\mu = \left( \frac{p_\mu}{m} + \gamma_\mu \right) \gamma_5 N' \quad (\text{A15})$$

不独立.

试图从(A5)构成  $36^*$  的场函数, 不难发现它恒等于零, 即这一表示不描写物理粒子.

从(A6), (A10), (A13) 式中还可以看到, 运动方程同时保证了这些场函数是无迹的.

有了场函数的  $S\tilde{U}(4)$  部分, 再按照(A2) 添上相应的  $SU(3)$  指标(注意  $SU(3)$  部分应约化为无迹张量之和), 就得到  $16016$  的场函数. 它包含的物理粒子有

$$\left[ \begin{array}{l} \left( \frac{5}{2}, 35 \right), \left( \frac{5}{2}, 10 \right) \\ \left( \frac{3}{2}, 35 \right), \left( \frac{3}{2}, 10 \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{3}{2}, 27 \right), \left( \frac{3}{2}, 10 \right), \left( \frac{3}{2}, 8 \right) \\ \left( \frac{1}{2}, 27 \right), \left( \frac{1}{2}, 10 \right), \left( \frac{1}{2}, 8 \right) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2}, 10^* \right), \left( \frac{1}{2}, 8 \right) \end{array} \right]. \quad (\text{A16})$$

这里的三个方括弧分别与(A2)中的前三个方括弧对应.

应用上述方法也不难得到其它高维表示的场函数形式.

## 附录 B $S\tilde{U}(12)$ 的非相对论过渡

$S\tilde{U}(12)$  表示中有的分量描写物理粒子场函数, 有的描写场函数的微商, 还有一些则被运动方程排除(所谓“平庸分量”). 凡是代表物理粒子的场函数在非相对论近似中不会等于零. 利用这一性质可以从  $S\tilde{U}(12)$  的非相对论近似中简单地找出各表示中包含的物理粒子的量子数.

考虑  $S\tilde{U}(12)$  的任意表示

$$\Psi_{CD\dots}^{AB\dots} \equiv \Psi_{\gamma_c, \delta d, \dots}^{a_a, b_b, \dots}, \quad (\text{B1})$$

运动方程是

$$(\hat{p})'_\gamma \Psi_{\gamma c, \dots}^{a_a, \dots} = m \Psi_{\gamma c, \dots}^{a_a, \dots}, \quad (\hat{p})^a_\alpha \Psi_{\gamma c, \dots}^{a_a, \dots} = -m \Psi_{\gamma c, \dots}^{a_a, \dots}. \quad (\text{B2})$$

取非相对论近似时,  $\mathbf{p} = 0$ ,  $p_0 = m$ , 上指标只有与  $\alpha = 3, 4$  相对应的六个分量不为零, 下指标只有与  $\gamma = 1, 2$  相对应的六个分量不为零. 这样, 12 个分量间的么正变换  $S\tilde{U}(12)$  在非相对论近似下, 就过渡到 6 个分量间的么正变换  $SU(6)$ . 也就是说,  $SU(6)$  是场函数“大分量”之间的么正变换. 因为上下指标所对应的大分量是不同的(对下指标来说是前 6 个分量, 对上指标来说是后 6 个分量), 所以  $S\tilde{U}(12)$  的无迹张量过渡到  $SU(6)$  就成为有迹的. 在约化为  $SU(6)$  不可约表示时, 当然应该把迹分出来<sup>[22]1)</sup>.

从上面的讨论可见,  $S\tilde{U}(12)$  表示和它相应的  $SU(6)$  表示有相同的杨氏图, 只是后者要分出迹来. 例如  $143$  表示对应的杨氏图为

1) 在本文完成以后, 看到 Delbourgo<sup>[22]</sup> 也指出了这一点.

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \quad (\text{B3})$$

由它的“大分量”所构成的  $SU(6)$  表示是  $35 + 1$ , 相应的杨氏图为

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + 1 \quad (\text{B4})$$

这个  $1$  是  $\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$  的迹.

常用的表示对应关系如表 2. 进一步将表中的  $SU(6)$  表示按  $SU(2) \otimes SU(3)$  约化, 就得到所包含的物理粒子的量子数. 例如在  $324324$  表示中包含三个自旋为  $\frac{7}{2}$  的  $SU(3)$  表示

$$\left(\frac{7}{2}, 81\right), \left(\frac{7}{2}, 35\right), \left(\frac{7}{2}, 10\right). \quad (\text{B5})$$

### 附录 C 几个 $S\tilde{U}(12)$ 顶点

在文献[8]中给出了  $364^*$ ,  $364$ ,  $143$  和  $143, 143, 143$  的  $S\tilde{U}(12)$  顶点. 但是在约化这些顶点时用到了一个假定: 同一个  $S\tilde{U}(12)$  表示中的粒子质量简并. 为了使结果不依赖于这一假定, 在下面写顶点的时候, 将参与相互作用的三个粒子的质量分别标上  $a, b, c$ . 对每个顶点都只写出我们需要的部分.

#### 1. $364^* 364 143$

$$\begin{aligned} g_1 & \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m_a + m_b}{\mu} \right) \left( 1 + \frac{p_a p_b}{m_a m_b} \right) (\bar{N}^{(a)} \gamma_5 N^{(b)})_{D+\frac{3}{2}F} \phi_5 + \right. \\ & + \frac{1}{m_b} \left( 1 + \frac{m_a + m_b}{\mu} \right) q^\mu \bar{D}_\mu^{(a)} N^{(b)} \phi_5 + \\ & + \frac{m_a + m_b}{4m_a m_b} p^\mu \left( 1 + \frac{q^2}{(m_a + m_b)\mu} \right) (\bar{N}^{(a)} N^{(b)})_F \phi_\mu + \\ & \left. + \left( 1 + \frac{m_a + m_b}{\mu} \right) \left( \bar{N} \frac{r^\mu}{4m_a m_b} N \right)_{D+\frac{3}{2}F} \phi_\mu + \dots \right\}. \quad (\text{C1}) \end{aligned}$$

#### 2. $143 143 143$

$$g_2 \left\{ 3i \frac{\mu_a + \mu_b}{2\mu_a \mu_b} p^\mu \left( 1 + \frac{q^2}{(\mu_a + \mu_b)\mu_c} \right) (\phi_5^{(a)} \phi_5^{(b)})_F \phi_\mu^{(c)} + \dots \right\}. \quad (\text{C2})$$

#### 3. $572^* 364 143$

$$\begin{aligned} g_3 & \left\{ \frac{m_a - m_b - \mu}{m_a m_b \mu} [2m_a q^\mu (\bar{D}'_\mu{}^{(a)} \gamma_5 N^{(b)})_{3D-F} \phi_5 + \right. \\ & \left. + 3(P^2 - (m_a + m_b)^2) \bar{N}'^{(a)} \langle N^{(b)} \phi_5 \rangle] + \dots \right\}. \quad (\text{C3}) \end{aligned}$$

以上所用符号的意义如下

$$\begin{aligned} N & \text{—— } \frac{1^+}{2} \text{ 八重态, } D & \text{—— } \frac{3^+}{2} \text{ 十重态, } \phi_5 & \text{—— } 0^- \text{ 八重态;} \\ N' & \text{—— } \frac{1^-}{2} \text{ 单态, } D' & \text{—— } \frac{3^-}{2} \text{ 八重态, } \phi_\mu & \text{—— } 1^- \text{ 八重态;} \end{aligned}$$

表 2

$S\tilde{U}(12)$ 表示		$SU(6)$ 表示	
杨氏图	维 数	杨 氏 图	维 数
	143	+ 1	35+1
	5940	+  + 1	405+35+1
	4212	+  + 1	189+35+1
	5005	+	280+35
	364		56
	572		70
	220		20
	16016	+	700+56
	35100	+  +	1134+70+56
	20020	+	560+70
	24948	+  +	540+70+20
	5720	+	70*+20
	324324	+  +	4536+700+56

$$q = p_b - p_a, \quad P = p_b + p_a,$$

$$r_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} P^\nu q^\rho \gamma^\lambda \gamma_5,$$

$\langle \dots \rangle$  为  $SU(3)$  矩阵求迹.

### 参 考 文 献

- [1] Gürsey, F. and Radicati, L., *Phys. Rev. Letters*, **13** (1964), 173.  
 [2] Pais, A., *Phys. Rev. Letters*, **13** (1964), 175.  
 [3] Sakita, B., *Phys. Rev.*, **136B** (1964), 1756; *Phys. Rev. Letters*, **13** (1964), 643.  
 [4] Bardakci, K., Cornwall, M., Freund, P. G. O. and Lee, B. W., *Phys. Rev. Letters*, **13** (1964), 698; **14** (1965), 48; 264.  
 [5] Feynman, R. P., Gell-Mann, M. and Zweig, G., *Phys. Rev. Letters*, **13** (1964), 678.  
 [6] Bég, M. A. and Pais, A., *Phys. Rev.*, **137B** (1965), 1514; *Phys. Rev. Letters*, **14** (1965), 267; 509.  
 [7] Sakita, B. and Wali, K. C., *Phys. Rev. Letters*, **14** (1965), 404.  
 [8] Salam, A., Delbourgo, R. and Strathdee, J., *Proc. Roy. Soc.*, **A284** (1965), 146.  
 [9] Glashow, S. L. and Rosenfeld, A. H., *Phys. Rev. Letters*, **10** (1963), 192.  
 [10] 秦且华等 (未发表).  
 [11] Rosenfeld, A. H., *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), 977.  
 [12] Salam, A., Trathdee, J. S., Charap, J. M. and Mathews, P. T., *Phys. Letters*, **15** (1965), 184.  
 [13] Corson, E. M., *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave-equations* (1954), p. 129.  
 [14] Gell-Mann, M., *Physics*, **1** (1964), 63 及文献 [5].  
 [15] Salam, A., Delourgo, R., Rashid, M. A. and Strathdee, J., *Proc. Roy. Soc.*, **A285** (1965), 312.  
 [16] Sakurai, J. J., *Ann. Phys.* **11** (1960), 1.  
 [17] Gell-Mann, M., Report CTSL-20 (1961).  
 [18] Gürsey, F., Pais, A. and Radicati, L., *Phys. Rev. Letters*, **13** (1964), 299.  
 [19] Okubo, S., *Phys. Letters*, **5** (1963), 165.  
 [20] Behrends, R. E. and Fronsdal, C., *Phys. Rev.*, **106** (1957), 345.  
 [21] Bardakci, K., Cornwall, M., Freund, P. G. O. and Lee, B. W., *Phys. Letters*, **15** (1965), 79.  
 [22] Delbourgo, R., *Phys. Letters*, **15** (1965), 347.

## ASSIGNMENTS OF THE BARYON RESONANCES IN $S\tilde{U}(12)$ AND THEIR STRONG-DECAYS

MA CHUNG-CHI LIU LIAN-SOU CHEN JI

(Peking University)

### ABSTRACT

The assignments of resonances  $\frac{3^-}{2}$ ,  $\frac{1^-}{2}$  and  $\frac{7^+}{2}$  within the multiplets of  $S\tilde{U}(12)$  and their strong-decays are discussed. It is found that the  $\left(\frac{1^+}{2} + 0^-\right)$  decay modes of the  $\frac{3^-}{2}$  particles belonging to the multiplets **16016** and **35100** are forbidden. By redefining the parity of the representations by changing the sign of the mass terms in the wave-equations, it is possible to assign the particles  $\left(\frac{3^-}{2}, \mathbf{8}\right)$  and  $\left(\frac{1^-}{2}, \mathbf{1}\right)$  in the representation **572**. However, the decays of  $\left(\frac{3^-}{2}, \mathbf{1}\right)$  and  $\frac{7^+}{2}$  particles through an effective vertex with  $S\tilde{U}(12)$  symmetry are still forbidden. The success and failure of  $S\tilde{U}(12)$  in the problem of classification and strong-decays of elementary particles are analysed and discussed in detail.