

载有电流的超导膜的能隙和临界电流^{* 1)}

吴 杭 生

提 要

利用文献[1]所导出的补偿方程和电流方程, 计算了一个载有电流的超导膜的能隙, 给出了它和电流的依赖关系。所得到的结果适用于所有的温度, 但电流数值要比较小。在温度接近 T_c 的范围内, 本文还对超导膜的临界电流问题进行了讨论。文中指出, 非局域效应对于比较厚的超导膜的临界电流是重要的, 但是对于比较薄的超导膜是不重要的。

—

在文献[1]中, 我们曾推导出超导膜在磁场(它平行于膜的表面)中的补偿方程和电流方程, 这组方程适用于所有的温度, 但是磁场的数值要足够小, 满足条件 $\left(\frac{e\hbar p_0}{mc} \frac{A}{\pi k_B T_c}\right)^2 \ll 1$ 。利用这组方程, 我们计算得到, 超导膜在恒定静磁场中的能隙和临界磁场。

一个载有电流的超导膜, 它的能隙因电流产生的磁场的作用而减小。本文研究了这个问题。利用文献[1]的理论, 我们计算出一个载有电流的超导膜的能隙, 给出它随着电流的变化的表达式。在温度接近 T_c 的范围内, 我们还对超导膜的临界电流问题进行了讨论, 指出非局域效应对于比较厚超导膜的临界电流是重要的, 但是对于比较薄的超导膜是不重要的。

二

考虑一个中空的圆柱形的超导体, 它的外径与内径的差比起内(外)径远小, 我们把它当作超导膜来处理^[2]。设内、外半径分别为 R_1 和 R_2 , $R_2 - R_1 = 2d$, 引入坐标 $r_1 = R - R_1$ ($0 \leq r_1 \leq 2d$)。令电流密度为 $j(r_1)$, 沿着圆柱体的轴的方向。选择横规范, 令电流产生的磁场的矢势 $A(r_1)$ 与 $j(r_1)$ 平行。

$j(r_1)$ 和 $A(r_1)$ 的关系是由文献[1]中方程(19)给出

$$\frac{d^2 A(r_1)}{dr_1^2} = \frac{3\pi^2 n e^2 \Delta}{2mc^2 \hbar v_0} \text{th} \frac{\beta \Delta}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} A_l \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) \cos \frac{l\pi}{2d} r_1. \quad (1)$$

在我们讨论的问题中, 边界条件应是

$$\begin{aligned} \frac{dA(r_1)}{dr_1} \Big|_{r_1=0} &= 0, \\ \frac{dA(r_1)}{dr_1} \Big|_{r_1=2d} &= \frac{2J}{cR_2} \equiv H_J, \end{aligned} \quad (2)$$

* 1965年12月10日收到。

1) 本文采用的符号的意义和文献[1]相同。

J 是通过样品的总电流。把(1)右边 $l = 0$ 项单独从求和中分出来, 计及

$$\frac{1}{l} \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) \Big|_{l=0} = \frac{8}{3\pi\beta\Delta} \frac{1}{\sigma} \frac{n_s(T, \Delta)}{n} \operatorname{cth} \frac{\beta \Delta}{2},$$

方程(1)可改写成

$$\frac{d^2 A(r_1)}{dr_1^2} = \frac{\pi n e^2}{m c^2 d} \frac{n_s(T, \Delta)}{n} A_0 + \frac{3\pi^2 n e^2 \Delta}{m c^2 \hbar v_0} \operatorname{th} \frac{\beta \Delta}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) A_l \cos \frac{l\pi}{2d} r_1, \quad (3)$$

其中

$$\frac{n_s(T, \Delta)}{n} = \frac{2\Delta^2}{(\pi k_B T)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[(2n+1)^2 + \frac{\beta^2 \Delta^2}{\pi^2} \right]^{3/2}}. \quad (4)$$

$n_s(T, \Delta)$ 表示温度为 T 、能隙为 Δ 时超导体的超导电子浓度。在得到(3)时还利用了 $A_l = A_{-l} (l \neq 0)$ 关系。

把(3)式两边对 r_1 积分, 得到

$$A(r_1) = a_0 + a_1 r_1 + \frac{\pi n e^2}{2 m c^2 d} \frac{n_s(T, \Delta)}{n} A_0 r_1^2 - \frac{12 n e^2 \Delta d^2}{m c^2 \hbar v_0} \operatorname{th} \frac{\beta \Delta}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^3} \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) A_l \cos \frac{l\pi}{2d} r_1, \quad (5)$$

a_0 与 a_1 是积分常数。利用边界条件(2), 求得

$$a_1 = 0, \\ A_0 = 2\delta_L^2 \frac{n}{n_s(T, \Delta)} H_J. \quad (6)$$

为了确定常数 a_0 , 利用 $A_0 = 2 \int_0^{2d} dr_1 A(r_1)$, 把(3)代入, 计及(6), 求得

$$a_0 = \frac{H_J \delta_L^2}{2d} \frac{n}{n_s(T, \Delta)} - \frac{H_J d}{3}, \quad (7)$$

由(5)–(7)得到

$$A(r_1) = \frac{H_J \delta_L^2}{2d} \frac{n}{n_s(T, \Delta)} - \frac{H_J d}{3} + \frac{H_J r_1^2}{4d} - \frac{12 n e^2 \Delta d^2}{m c^2 \hbar v_0} \operatorname{th} \frac{\beta \Delta}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^3} \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) A_l \cos \frac{l\pi}{2d} r_1, \quad (8)$$

因而 $A(r_1)$ 的 Fourier 分量 A_l 在 $l > 0$ 时的表示式是

$$A_l = \frac{8d^2}{\pi^2} \frac{(-1)^l l H_J}{l^3 + \alpha \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right)}, \quad (9)$$

α 的定义见文献[1]中方程(23)。

把(6)和(9)代入补偿方程(见文献[1]中(17)式), 求得确定能隙 Δ 和电流的依赖关系的方程为

$$g(\beta \Delta) - g(\beta \Delta_0(T)) = - \frac{H_J^2}{H_{cm}^2(0)} \frac{\delta_L^2}{16d^2} \frac{n}{n_s(T, \Delta)} \frac{1}{\Delta'} \frac{d \ln n_s(T, \Delta)}{d \Delta'} -$$

$$-\frac{\alpha}{\pi^2} \frac{H_J^2}{H_{cm}^2(0)} \frac{1}{\Delta'^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right)}{\left[l^2 + \alpha \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) \right]^2}, \quad (10)$$

其中 $\Delta' = \frac{\Delta}{\Delta_0(0)}$. 方程(10)对于所有温度都是成立的, 但是电流 J 要求满足如下条件:

$$\left(\frac{e \hbar p_0}{mc} \cdot \frac{A}{\pi k_B T_c} \right)^2 \sim \left(\frac{e \hbar p_0}{mc} \frac{H_J \delta}{\pi k_B T_c} \right)^2 \ll 1, \quad (11)$$

H_J 和 J 的关系由(2)给出, $\delta \approx \min(d, \delta_0(t))$, $\delta_0(t)$ 是大样品的穿透深度.

三

在 T_c 附近, 条件(11)从而方程(10), 对于所有 $J \leq J_c$ 都是成立的, 其中 J_c 是代表临界电流. 因此利用(10), 不仅可以求得能隙与电流关系, 而且还可以计算临界电流. 由于在 $T \sim T_c$ 时, $\frac{\Delta}{\pi k_B T_c} \ll 1$. 计及此事实, 方程(10)简化成

$$\phi^2 = 1 - H_J'^2 \left\{ \frac{1}{4d'^2} \frac{1}{\phi^4} + \frac{2\theta}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l} \right)}{\left[l^2 + \theta \phi^2 \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l} \right) \right]^2} \right\}, \quad (12)$$

其中 $\Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l} \right) = \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) \Big|_{\Delta=0}$, $H_J' = \frac{H_J}{\sqrt{2} H_{cm}(t)}$, $\theta = \frac{3\gamma}{2\pi} \frac{8}{7J(3)} \frac{d^3}{\delta_0^2(t) \xi_0}$, ϕ 与 d' 意义和文献[1]相同.

对于很薄的膜, $|\theta \Phi_0| \ll 1$. (12) 右边的括号中的第二项可以略去不计, 因此确定能隙和电流依赖关系的方程是

$$\phi^2 = 1 - \frac{1}{4d'^2} \frac{1}{\phi^4} H_J'^2, \quad (13)$$

临界电流 H_{Jc} 以及在 $H_J = H_{Jc}$ 时的能隙 Δ_c 是(13)式和 $\frac{dH_J}{d\Delta} = 0$ 两方程的根, 这两个方程是

$$\phi_c^2 = 1 - \frac{1}{4d'^2} \frac{1}{\phi_c^4} H_{Jc}'^2,$$

$$\phi_c^2 = H_{Jc}'^2 \frac{1}{2d'^2} \frac{1}{\phi_c^2},$$

其中 $\phi_c = \frac{\Delta_c}{\Delta_0(t)}$. 消去 ϕ_c , 我们求得的临界电流是

$$H_{Jc}' = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}d}{\delta_0(t)}. \quad (14)$$

(13)和(14)是与局域 GJL 理论^[2]相同. 这个结果说明了在膜的厚度足够小时, 对于临界电流来说, 非局域效应是不重要的. 这点曾在文献[3]得到.

对于比较厚的超导膜, $|\theta \Phi_0| > 1$, (12) 右边括号中的第二项不再能忽去了. 假如

膜是属于 London 型的, $\frac{\sigma}{l} \sim \frac{\delta_0(T)}{\xi_0} \gg 1$ ^[1], 不难证明, 方程(12)此时简化成

$$\phi^2(\phi^2 - 1) = -\left(\frac{H_J}{H_{cm}}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{\text{sh } 4\phi d'}{4\phi d'} \right\} \frac{1}{4 \text{sh}^2 2\phi d'}. \quad (15)$$

在得到此式时, 我们利用了当 $\frac{\sigma}{l} \gg 1$ 时, $\Phi_0\left(\frac{\sigma}{l}\right) \approx \frac{28}{3\pi^3} \zeta(3) \frac{l}{\sigma}$. 方程(15), 从而临界电流与 ΓI 理论给出的结果相同. 但是对于 Pippard 型超导膜, $\frac{\sigma}{l} \sim \frac{\delta_0(T)}{\xi_0} \ll 1$, 此时 $\Phi_0\left(\frac{\sigma}{l}\right) \approx 1$, 方程(12)简化成

$$\phi^2 = 1 - H_J^2 \left\{ \frac{1}{4d'^2} \frac{1}{\phi^4} + \frac{2\theta}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{(l^2 + \theta\phi^2)^2} \right\}. \quad (16)$$

方程(16), 从而临界电流 H_{Jc} 与 ΓI 相同. 此时非局域效应, 对于决定能隙以及 H_J 都是显著的.

四

除了 T_c 附近的区域外, 满足条件(11)的电流 J 比 J_c 要小得多. 此时, 能隙的改变是很小的, $(\Delta_0(T) - \Delta)/\Delta_0(T) \ll 1$. $\Delta_0(T)$ 代表 $J = 0$ 时, 超导体的能隙. 和文献[1]讨论相似, 把(10)两边按 $\Delta - \Delta_0(T)$ 作 Taylor 展开, 在第一级近似下, 求得

$$\frac{\Delta}{\Delta_0(T)} = 1 - D(T, d) \frac{H_{Jc}^2}{H_{cm}^2(0)}, \quad (17)$$

其中系数 $D(T, d)$ 是等于

$$D(T, d) = \frac{\delta_L^2}{16d^2} \frac{n^2}{n_s^2(T)} \frac{1}{\Delta_0'(T)} \frac{d \ln n_s(T)}{d\Delta_0'(T)} + \frac{\alpha_0}{\pi^2} \frac{n}{n_s(T)} \frac{1}{\Delta_0'^2(T)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \tilde{\Phi}_0\left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta_0(T)}{\pi}\right)}{\left[l^3 + \alpha_0 \Phi_0\left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta_0(T)}{\pi}\right)\right]^2}, \quad (18)$$

$n_s(T) \equiv n_s(T, \Delta_0(T))$, 即 $J = 0$ 时超导体的超导电子浓度, $\Delta_0'(T) = \Delta_0(T)/\Delta_0(0)$,

$\alpha_0 = \frac{6}{\pi^2} \frac{d^3}{\delta_L^2 \xi_0} \frac{\Delta_0(T)}{\Delta_0(0)} \text{th} \frac{\Delta_0(T)}{2k_B T}$. 当膜的厚度较薄或较厚时, 系数 $D(T, d)$ 可以进一步加以简化, 由于这些讨论与文献[1]类似, 在本文中便不进一步讨论它们了.

参 考 文 献

- [1] 吴杭生, 蒋建华, 应润傑, 物理学报, **22** (1966), 770.
- [2] Гинзбург, В. Л., ДАН СССР, **118** (1958), 464.
- [3] 吴杭生, 雷啸霖, 物理学报, **20** (1964), 873.

ENERGY GAP AND CRITICAL CURRENT OF A SUPER- CONDUCTING FILM WITH CURRENT FLOWING

WU HANG-SHENG

ABSTRACT

The energy gap of a superconducting film with current flowing is calculated, based on the theory reported in the previous Paper [1]. The result is valid in the whole temperature range but only for small currents. The critical current of a superconducting film is also discussed for temperatures near T_c . It is pointed out that the non-local effect is important for thick films, but not for thin films.