

超导膜的能隙和磁场的依赖关系*

吴杭生 蒋建华 应润杰

提 要

本文计算出超导膜在磁场中的能隙。所得到的表达式适用于所有的温度，但磁场要满足 $\left(\frac{c\hbar p_0}{mc} \frac{A}{\pi k_B T_c}\right)^2 \ll 1$ 条件，其中 A 是矢势， $\hbar p_0$ 是 Fermi 动量。理论结果和实验进行了比较，符合得还好。

一、引 言

1950年 Гинзбург 和 Ландау (以下简称为 ГЛ) 唯象地给出了一个非线性理论^[1]，用来研究临界温度 T_c 附近超导体在磁场中的性质。

在文献[2]中，作者之一和雷啸霖根据 Горьков 的工作^[3]指出，ГЛ 理论只有在下面三个近似成立时才是正确的：(i) 能隙 Δ 比 $\pi k_B T_c$ 小得多。(ii) 磁场足够弱，使得 $\left(\frac{c\hbar p_0}{mc} \times \frac{A}{\pi k_B T_c}\right)^2 \ll 1$ ，此处 $\hbar p_0$ 是 Fermi 动量， A 是矢势。(iii) 矢势在 ξ_0 内可以近似地看成常数，允许采取局域近似。从文献[2, 4]的讨论可以知道，对于尺寸比 ξ_0 远大的 London 型超导体和中间型超导体，当温度 T 在 T_c 附近 $\Delta t = 1 - \frac{T}{T_c} < \frac{1}{10}$ 的温度区间内，上面三个近似是成立的。但是，对于 Pippard 型超导体和尺寸比 ξ_0 小的超导体，即使在 $\Delta t < \frac{1}{10}$ 时，非局域效应也是显著的，近似(iii)是不成立的，ГЛ 理论因此是不适用的。在文献[2, 4—7]中，推广了 ГЛ 理论，提出了对上述各种情形（但 $\Delta t < \frac{1}{10}$ ）都适用的理论。

在低温下（ $\Delta t > \frac{1}{10}$ 时），前述的三个近似一般都不成立。要建立能适用于低温的一般理论，是比较困难的。

在本文中，我们就超导膜情形，在能隙 $\Delta(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{r}$ 无关的近似下，给出了一个适用于低温的描写超导膜在磁场中的行为的理论（磁场假定平行于膜的表面）。在这个工作中，我们避免采用近似(i)和(iii)，但仍假定磁场满足条件(ii)，从而允许将 Green 函数按矢势作微扰展开 (§ 2)。根据 § 2 的理论，我们计算出超导膜在磁场中的能隙 (§ 3)。除了 T_c 附近（ $\Delta t < \frac{1}{10}$ ）的区域外，本文的结果，当外磁场 H_0 接近临界场 H_c 时，是不适用的。但是在 H_0 足够小时，它是正确的。

* 1965年12月10日收到。

在附录中,我们还计算了 H_c 。从§3和附录,我们看到,文献[1,2,7]的结果都可以作为本文的理论在 $\Delta t < \frac{1}{10}$ 的极限下的情况。

二、补偿方程和电流方程¹⁾

我们采用和文献[4]相同的模型来描写金属膜。选择坐标系,令 r_1 轴沿着膜的厚度方向,而 r_2 与 r_3 轴沿着宽度方向。外磁场 H_0 沿着 r_3 轴,则矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 沿着 r_2 轴,并只和 r_1 有关,即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, A(r_1), 0), \quad (1)$$

假定能隙 $\Delta(\mathbf{r})$ 是实数,并和 $\mathbf{r}$ 无关。

我们从文献[4]的方程(1)出发。为了方便起见,把方程(1)改写成如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} i\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 - U(\mathbf{r}) + \mu & \Delta \\ -\Delta & -i\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 - U(\mathbf{r}) + \mu \end{pmatrix} \times \hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tau_3, \quad (2)$$

其中 $\hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}')$ 和 τ_3 表示如下二个矩阵:

$$\hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') & F_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') \\ F_\omega^+(\mathbf{r}\mathbf{r}') & -G_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') \end{pmatrix}, \quad (3a)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3b)$$

为了求出对于所有温度都适用的补偿方程,我们假定 $\left(\frac{e\hbar p_0}{mc} \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \right)^2 \sim \left(\frac{e\hbar p_0}{mc} \frac{A}{\pi k_B T_c} \right)^2$

$\ll 1$, 在磁场足够小时,这个条件是可以满足的。在磁场满足这个条件后,我们可以把 $\hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}')$ 按 $\mathbf{A}$ 作微扰展开。为了这个目的,我们先把(2)式改写成以下形式

$$\begin{pmatrix} i\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(r) + \mu & \Delta \\ -\Delta & -i\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(r) + \mu \end{pmatrix} \hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tau_3 + \frac{ie\hbar}{mc} A(r_1) \frac{\partial}{\partial r_2} \tau_3 \hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}'), \quad (4)$$

其中我们略去了 $\frac{e^2 A^2}{\hbar^2 c^2} \hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}')$ 项。这对 A 的限制比起 $\left(\frac{e\hbar p_0}{mc} \frac{A}{\pi k_B T_c} \right)^2 \ll 1$ 对 A 的限制还宽^[4,2]。定义

$$\begin{pmatrix} i\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(r) + \mu & \Delta \\ -\Delta & i\omega + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(r) + \mu \end{pmatrix} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tau_3, \quad (5)$$

1) 如果没有特殊的说明,本文采用的符号和文献[4]相同。

在准确到 A^2 项, 我们求得(4)的微扰解

$$\begin{aligned}\hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') &= \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{r}') + \int d\mathbf{l} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{l}\mathbf{r}') + \\ &+ \iint d\mathbf{l} d\mathbf{s} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{l}\mathbf{s}) \frac{ie\hbar}{mc} A(s_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{s}\mathbf{r}').\end{aligned}\quad (6)$$

补偿方程是^[4]

$$\Delta = \frac{1}{2d} \int dr_1 |g| k_B T \sum_\omega \text{Sp}(\tau_{12} \hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r})), \quad (7)$$

其中 $\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 把(6)式代入(7), 求得

$$\begin{aligned}\Delta - \frac{1}{2d} \int dr_1 |g| k_B T \sum_\omega \text{Sp}(\tau_{12} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{r})) &= \frac{1}{2d} \int \cdots \int d\mathbf{l} d\mathbf{s} dr_1 |g| k_B T \sum_\omega \text{Sp} \left(\tau_{12} \cdot \right. \\ &\cdot \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{l}\mathbf{s}) \frac{ie\hbar}{mc} A(s_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{s}\mathbf{r}) \Big),\end{aligned}\quad (8)$$

(8)式中右边包含 A 一次方项的贡献等于零, 我们没有写出.

方程(5)的解是

$$\hat{G}_\omega(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \iint \frac{dp dq}{(2\pi)^2} \sum_k' \hat{G}_\omega^0(pqk) e^{ip \cdot r_1 + iqr_3} \varphi_k(r_1), \quad (9)$$

而

$$\hat{G}_\omega^0(pqk) = \frac{-1}{\omega^2 + \xi_{pqk}^2 + \Delta^2} \begin{pmatrix} i\omega + \xi_{pqk} & -\Delta \\ \Delta & i\omega - \xi_{pqk} \end{pmatrix}, \quad (9a)$$

其中

$$\begin{aligned}\xi_{pqk} &= \frac{\hbar^2}{2m} (p^2 + q^2 + k^2) - \mu, \\ k &= \frac{l\pi}{2d} \quad (l = 0, 1, 2, \cdots),\end{aligned}\quad (9b)$$

$$\varphi_k(r_1) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2d}}, & \text{当 } k=0 \text{ 时,} \\ \sqrt{\frac{1}{d}} \cos kr_1, & \text{当 } k \neq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

在(9)中的对 k 求和上的一撇表示对 l 取包含零在内的正整数求和. 将(9)代入(8)的右边, 对 $\mathbf{l}, \mathbf{s}, r_1$ 积分, 并进行适当地并项后, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2d} \int \cdots \int d\mathbf{l} d\mathbf{s} dr_1 |g| k_B T \sum_\omega \text{Sp} \left\{ \tau_{12} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{r}\mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{l}\mathbf{s}) \frac{ie\hbar}{mc} \cdot \right. \\ \left. \cdot A(s_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \hat{G}_\omega^0(\mathbf{s}\mathbf{r}) \right\} = I_1 + I_2,\end{aligned}\quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{e^2 \hbar^2}{64 m^2 c^2 d^3} \iint \frac{dp dq}{(2\pi)^2} \sum_k \sum_\nu A(\nu) A(-\nu) p^2 |g| k_B T \sum_\omega \times \\ &\times \frac{\Delta}{(\omega^2 + \xi_{pqk}^2 + \Delta^2)(\omega^2 + \xi_{pqk+\nu}^2 + \Delta^2)} \times \\ &\times [2(i\omega + \xi_{pqk})(i\omega + \xi_{pqk+\nu}) + (i\omega + \xi_{pqk})(i\omega - \xi_{pqk}) + \Delta^2],\end{aligned}\quad (10a)$$

$$I_2 = \frac{c^2 \hbar^2}{64 m^2 c^2 d^3} \iint \frac{d p d q}{(2 \pi)^2} \sum_k \sum_v A(v) A(2k - v) p^2 |g| k_B T \sum_{\omega} \times \\ \times \frac{\Delta}{(\omega^2 + \xi_{pqk}^2 + \Delta^2)(\omega^2 + \xi_{pqk+v}^2 + \Delta^2)} \times \\ \times [2(i\omega + \xi_{pqk})(i\omega + \xi_{pqk+v}) + (i\omega + \xi_{pqk})(i\omega - \xi_{pqk}) + \Delta^2], \quad (10b)$$

又其中

$$A(v) = 2 \int_0^{2d} dl_1 A(l_1) \cos v l_1. \quad (11)$$

在(10a)和(10b)中的 k 和 v 的求和是表示对所有正负整数求和的(差个 $\frac{2d}{\pi}$ 因子)。利用文献[4]说明的计算方法, 不难证明 $\left(\beta = \frac{1}{k_B T}\right)$

$$I_1 = -\frac{m p_0 |g|}{2 \pi^2 \hbar^2} \frac{\pi c^2 p_0}{32 m c^2 d} \text{th} \frac{\beta \Delta}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} A_l A_{-l} \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right), \quad (12)$$

其中

$$A_l = A \left(\frac{l \pi}{2d} \right), \\ \tilde{\Phi}_0(\eta, \zeta) = -\frac{16}{\pi^2} \frac{\zeta}{2} \text{cth} \frac{\pi \zeta}{2} \left[\zeta^2 \tilde{G}(\eta, \zeta) - \left(G(\eta, \zeta) - \eta \frac{T}{T_c} F(\eta, \zeta) \right) \right], \\ \tilde{G}(\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2 + \zeta^2]^2} \text{tg}^{-1} \frac{T_c}{T} \frac{1}{[(2n+1)^2 + \zeta^2]^{1/2} \eta}, \\ G(\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2 + \zeta^2]} \text{tg}^{-1} \frac{T_c}{T} \frac{1}{[(2n+1)^2 + \zeta^2]^{1/2} \eta}, \\ F(\eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2 + \zeta^2]^{1/2}} \left(1 - \frac{[(2n+1)^2 + \zeta^2]^{1/2} \eta T}{T_c} \times \right. \\ \left. \times \text{tg}^{-1} \frac{T_c}{[(2n+1)^2 + \zeta^2]^{1/2} \eta T} \right), \\ \frac{\sigma}{l} = \frac{2 \pi k T_c}{\hbar v_0 \nu}.$$

至于另一个积分 I_2 , 计算是比较困难的, 但在 $2d \gg 2d^* = \left(\frac{1}{0.36} \frac{\xi_0}{p_0} \right)^{1/2}$ 时, 它的贡献比起 I_1 来可以略去不计¹⁾。这样, (8) 式右边的积分是

1) 略去积分 I_2 的理由是和文献[4]的 §4 中所叙述的相似。我们简单的说明如下。

积分 I_2 和 I_1 的被积函数的比是 $\frac{A(v+2k)}{A(v)}$ 。假如我们令对积分起主要贡献的 v 和 k 分别是 v^* 和 k^* 。我们将证明, 在 $d \gg d^*$ 时, $|v^* + 2k^*| \gg |v^*|$, 因此有 $|A(v^* + 2k^*)| \ll |A(v^*)|$, 从而 $|I_2| \ll |I_1|$ 。由于 $A(r)$ 的主要 Fourier 分量 $A(v)$ 是在 $v \sim \frac{1}{\delta}$ 时, 所以 $v^* \sim \frac{1}{\delta}$, 其中

$$\frac{1}{\delta} = \max \left(\frac{1}{\delta_0(t)}, \frac{1}{d} \right). \quad (N.1)$$

和文献[4]类似的分析, 易见在 $d \gg \xi_0$ 时, $k^* \sim p_0$, 而在 $d \ll \xi_0$ 时, $k^* \sim p_0 \frac{2k_B T_c}{\hbar v_0 \nu^*} \sim 0.36 \frac{2p_0 \delta}{\xi_0}$ 。因此, 在 $d \gg$

$$\frac{1}{2d} \int \cdots \int d\mathbf{l} d\mathbf{s} d\mathbf{r}_1 |g| k_B T \sum_{\omega} \text{Sp} \left\{ \tau_{12} \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{r}\mathbf{l}) \frac{ie\hbar}{mc} A(l_1) \frac{\partial}{\partial l_2} \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{s}) \frac{ie\hbar}{mc} A(s_1) \frac{\partial}{\partial s_2} \times \right. \\ \left. \times \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{s}\mathbf{r}) \right\} = -\frac{mp_0|g|}{2\pi^2\hbar^2} \frac{\pi e^2 p_0}{16mc^2 d} \text{th} \frac{\beta\Delta}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l} A_l A_{-l} \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta\Delta}{\pi} \right). \quad (14)$$

(8)式左边的积分是很容易计算出来的,它等于

$$\frac{mp_0\Delta}{2\pi^2\hbar^2} |g| [g(\beta\Delta) - g(\beta\Delta_0(T))], \quad (15)$$

其中

$$g(\beta\Delta) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1 - 2\bar{n}(\xi)}{\xi} - \frac{1 - 2\bar{n}(E)}{E} \right) d\xi. \quad (16)$$

$\Delta_0(T)$ 是磁场等于零时超导膜的能隙, $E = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}$, $\bar{n}(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}$. 计及(14)与(15)式,补偿方程(8)写成

$$g(\beta\Delta) - g(\beta\Delta_0(T)) = -\frac{\pi e^2 p_0}{16mc^2 d} \frac{1}{\Delta} \text{th} \frac{\beta\Delta}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l} A_l A_{-l} \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta\Delta}{\pi} \right). \quad (17)$$

电流方程为

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ie\hbar}{m} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}})_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} k_B T \sum_{\omega} \text{Sp}(\tau_{11} \delta \hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{r}')), \quad (18)$$

其中

$$\tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta \hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{r}') - [\hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{r}')]_{\Delta=0}.$$

把 $\hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{r}')$ 的微扰展开式(6)代入(18)式,准确到 A 的一次项,并利用 Maxwell 方程

$$\frac{d^2 A(r_1)}{dr_1^2} = -\frac{4\pi}{c} j(r_1), \text{ 我们求得}$$

$$\frac{d^2 A(r_1)}{dr_1^2} = \frac{3\pi^2 n e^2 k_B T_c}{m c^2 \hbar v_0} \frac{\beta\Delta}{2} \text{th} \frac{\beta\Delta}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} A_l \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta\Delta}{\pi} \right) \cos \left(\frac{l\pi}{2d} r_1 \right), \quad (19)$$

其中 n 代表单位体积中的电子浓度, v_0 是 Fermi 速度, $\Phi_0(\eta, \zeta)$ 定义是

$$\Phi_0(\eta, \zeta) = \frac{16}{\pi^2} \frac{\zeta}{2} \text{cth} \frac{\pi\zeta}{2} \left[G(\eta, \zeta) - \eta \frac{T}{T_c} F(\eta, \zeta) \right]. \quad (20)$$

方程(17)和(19)是我们所求得的补偿方程和电流方程,在磁场强度足够弱时,它们对于所有温度都是适用的.

三、能隙随磁场的变化

我们先从(19)求出矢势 $A(r_1)$. 对于恒定磁场中的超导膜,在膜的表面两边的磁场

ξ_0 时, $|\nu^* + 2k^*| \sim 2p_0 \gg |\nu^*| \sim \frac{1}{\delta}$ 得到满足;而在 $d \ll \xi_0$ 时, $|\nu^* + 2k^*| \sim \delta \left(0.36 \frac{4p_0}{\xi_0} + 1 \right)$, 当

$$\delta \gg \left(\frac{1}{0.36} \frac{\xi_0}{p_0} \right)^{1/2} \quad (N.2)$$

时, $|\nu^* + 2k^*| \gg |\nu^*|$ 成立. 条件(N.2)是对 d 的限制. 因此积分 I_2 略去的条件是

$$2d \gg 2d^* = \left(\frac{1}{0.36} \frac{\xi_0}{p_0} \right)^{1/2}. \quad (N.3)$$

平行而且相等, 边界条件是

$$\left. \frac{dA(r_1)}{dr_1} \right|_{r_1=0 \text{ 或 } 2d} = H_0. \quad (21)$$

把(19)两边对 r_1 积分, 利用(21)以及 A_l 的定义, 我们求得

$$A_l = \begin{cases} 0 & \text{当 } l = \text{偶数}, \\ -\frac{16d^2}{\pi^2} \frac{l}{l^3 + \alpha \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{l}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right)} H_0, & \text{当 } l = \text{奇数}, \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$\alpha = \frac{6}{\pi^2} \frac{d^3}{\delta_L^2 \xi_0} \frac{\Delta}{\Delta_0(0)} \text{th} \frac{\Delta}{2k_B T}, \quad (23)$$

$\delta_L^{-1} = \left(\frac{4\pi n e^2}{mc} \right)^{1/2}$, $\xi_0 = 0.18 \frac{\hbar v_0}{k_B T_c}$, $\Delta_0(0) = \frac{\pi}{\gamma} k_B T_c$ 是 $T = 0^\circ\text{K}$ 时超导体的能隙(外场等于零), γ 是 Euler 常数. 把(22)式代入(17)式, 我们求得决定能隙随磁场的改变的方程:

$$g(\beta \Delta) - g(\beta \Delta_0(T)) = -\frac{4\alpha}{\pi^2} \frac{H_0^2}{H_{cm}^2(0)} \frac{\Delta_0^2(0)}{\Delta^2} \sum_{l=0}^{\infty} \times \\ \times \frac{(2l+1) \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right)}{\left[(2l+1)^3 + \alpha \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right) \right]^2}, \quad (24)$$

其中 $H_{cm}(0) = \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi \hbar^2}} \Delta_0(0)$ 是 $T = 0^\circ\text{K}$ 时大样品临界磁场.

1. 在 $\Delta t < \frac{1}{10}$ 时 在 T_c 的附近, 临界磁场 $H_c \sim (\Delta t)^{1/2}$ 的数值很小, 推导(17)和(19)的条件 $\left(\frac{e \hbar p_0}{mc} \frac{A}{\pi k_B T_c} \right) \ll 1$ 是满足的, 从而(24)对所有 $0 \leq H_0 \leq H_c$ 都是对的.

由于在 $\Delta t < \frac{1}{10}$ 时, 能隙是个小量, $\left(\frac{\Delta}{\pi k_B T_c} \right) \ll 1$, 方程(24)的右边的 $\frac{\beta \Delta}{\pi}$ 可以近似地令它为零. 利用 $g(x)$ 在 $x \ll 1$ 时的展开式

$$g(x) = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} x^2 - \frac{93\zeta(5)}{128\pi^4} x^4 + \dots, \quad (25)$$

$\zeta(x)$ 是 Riemann ζ 函数. 方程(24)简化成

$$\phi^2 = 1 - \frac{32d'^2 H_0^2}{\pi^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathbf{K} \left(\frac{\sigma}{2l+1} \right)}{\left[(2l+1)^2 + \frac{4d'^2 \phi^2}{\pi^2} \mathbf{K} \left(\frac{\sigma}{2l+1} \right) \right]^2} \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{K}(\eta) = \frac{12\eta}{7\zeta(3)} (G(\eta) - \eta F(\eta)), \\ G(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{tg}^{-1} \frac{1}{(2n+1)\eta}, \quad (27)$$

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(1 - (2n+1)\eta \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{(2n+1)\eta} \right),$$

$$d' = \frac{d}{\delta'_0(T)}, \quad H'_0 = \frac{H_0}{\sqrt{2} H_{cm}(T)}, \quad \phi = \frac{\Delta}{\Delta_0(t)}.$$

此处 $\delta'_0(T) = \sqrt{\frac{mc^2}{8\pi n e^2 \Delta t}}$ 与 $H_{cm}(T) = 4 \sqrt{\frac{\pi}{7\zeta(3)}} \frac{(mp_0)^{1/2}}{\hbar} k_B T_c(\Delta t)$ 分别是 $T \sim T_c$ 的穿透深度与大样品临界磁场。

(26)和附录中的(53),由雷啸霖根据文献[2]的理论求得^[7],并且证明了ГЛ理论以及文献[4]的结果都可以作为(26)和(53)的特殊情形求得。

2. 在 $\Delta t > \frac{1}{10}$ 时 在 T 远离 T_c 时, 方程(17)和(19)因而方程(24), 在外磁场 H_0 接近 H_c 时是不正确的, 它们只能用来研究外磁场足够弱的情形。

在 H_0 的数值比较小时, Δ 和 $\Delta_0(T)$ 相差很小, 我们可以把(24)式的两边按 $(\Delta - \Delta_0)$ 作 Taylor 级数展开, 并利用

$$\Delta_0 \frac{d}{d\Delta_0} g(\beta\Delta_0) = \frac{n_s(T)}{n}, \quad (28)$$

其中 $n_s(T)$ 是超导电子浓度,

$$\begin{aligned} \frac{n_s(T)}{n} &= 2\Delta_0^2 \pi k_B T \sum_{\omega>0} \frac{1}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \\ &= 1 - \frac{2\Delta_0}{k_B T} \int_0^\infty d\varphi \frac{\operatorname{ch}\varphi}{(e^{\beta\Delta_0 \operatorname{ch}\varphi} + 1)(e^{-\beta\Delta_0 \operatorname{ch}\varphi} + 1)}, \end{aligned} \quad (29)$$

在一级近似下, (24)式简化成

$$\frac{\Delta}{\Delta_0(T)} = 1 - D(T, d) \frac{H^2}{H_{cm}^2(0)}, \quad (30)$$

其中

$$\begin{aligned} D(T, d) &= \frac{n}{n_s(T)} \frac{4\alpha_0}{\pi^2} \frac{\Delta_0^2(0)}{\Delta_0^2(T)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)\tilde{\Phi}_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right)}{\left[(2l+1)^3 + \alpha_0\Phi_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right)\right]^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{6}{\pi^2} \frac{d^3}{\delta_L^2 \xi_0} \frac{\Delta_0(T)}{\Delta_0(0)} \operatorname{th} \frac{\Delta_0(T)}{2k_B T}. \end{aligned} \quad (31)$$

在膜的厚度比较薄时, 使得 $\alpha_0\Phi_0 \ll 1$, 此即 $d \ll d_1 = \frac{2.04}{\Phi_0^{1/2}} \delta_0''(t) \left(\delta_0''(t) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left[\frac{3\pi^2 n e^2}{mc^2} \frac{\Delta_0(T)}{\hbar\nu_0} \operatorname{th} \frac{\Delta_0(T)}{2k_B T} \right]^{1/3} \right)$ 是 Pippard 极限下的弱场穿透深度。此时, (31)可以按 $\alpha_0\Phi_0$ 作 Taylor 级数展开, 在一级近似下,

$$D(T, d) = \frac{n}{n_s(T)} \frac{93\zeta(5)}{4\pi^4} \frac{d^3}{\delta_L^2 \xi_0} \frac{\Delta_0(0)}{\Delta_0(T)} \operatorname{th} \frac{\Delta_0(T)}{2k_B T} \Phi_1\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right), \quad (32)$$

其中

$$\Phi_1\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right) = \frac{32}{31\zeta(5)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^5} \tilde{\Phi}_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right). \quad (33)$$

假如厚度不仅使 $d \ll d_1$ 而且使得 $\sigma = 0.36 \frac{2d}{\xi_0} \ll 1$, 则 $D(T, d)$ 进一步简化成

$$D(T, d) = \frac{n}{n_s(T)} \frac{93\zeta(5)}{8\pi^4} \frac{d^3}{\delta_L^2 \xi_0} \frac{\Delta_0(0)}{\Delta_0(T)} \text{th} \frac{\Delta_0(T)}{2k_B T} \left(1 + \frac{\Delta_0(T)}{k_B T} \frac{1}{\text{sh} \frac{\Delta_0(T)}{k_B T}} \right). \quad (34)$$

在此处采用了 Φ_1 在 $\sigma \ll 1$ 时的表达式

$$\Phi_1 \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta_0(T)}{k_B T} \frac{1}{\text{sh} \frac{\Delta_0(T)}{k_B T}} \right). \quad (35)$$

在膜的厚度比较厚, $d \gg d_1$, 我们要分 London 型超导膜和 Pippard 型超导膜二种情形讨论. 对于 London 型超导膜, $\xi_0 \ll \delta_0(T)$ ($\delta_0(T)$ 是穿透深度). 注意到 $\nu \sim \frac{1}{\delta(T)}$, 我们有 $\frac{\sigma}{2l+1} \sim \frac{\delta(T)}{\xi_0} \gg 1$, 此时,

$$\begin{aligned} G\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right) - \frac{T}{T_c} \frac{\sigma}{2l+1} F\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right) &= \\ &= \frac{\gamma^2}{3} \frac{T}{T_c} \frac{2l+1}{\sigma} \frac{\Delta_0^2(0)}{\Delta_0^2(T)} \frac{n_s(T)}{n}, \\ \tilde{G}\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right) &= \frac{\pi k_B T_c}{6} \left(\frac{\pi k_B T}{\Delta_0} \right)^3 \frac{2l+1}{\sigma} \times \\ &\times \left(\frac{2}{\Delta_0} \frac{n_s(T)}{n} - \frac{1}{n} \frac{dn_s(T)}{d\Delta_0} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

(31)式简化成

$$D(T, d) = \frac{n}{n_s(T)} \frac{\Delta_0^2(0)}{8\Delta_0^2(T)} \frac{d \ln n_s(T)}{d \ln \Delta_0(T)} \left(\frac{2}{\pi\theta} \text{th} \frac{\pi\theta}{2} - \frac{1}{\text{ch}^2 \frac{\pi\theta}{2}} \right), \quad (37)$$

其中 $\theta^2 = \frac{4d^2}{\pi^2 \delta_L^2} \frac{n_s(T)}{n}$. 对于 Pippard 型超导膜, $\xi_0 \gg \delta_0(T)$, 此时 $\frac{\sigma}{2l+1} \sim \frac{\delta_0(T)}{\xi_0} \ll 1$.

在 $\frac{\sigma}{2l+1} \ll 1$ 时,

$$\tilde{\Phi}_0 \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta_0}{k_B T} \frac{1}{\text{sh} \frac{\Delta_0}{k_B T}} \right), \quad (38)$$

$$\Phi_0 \approx 1.$$

$D(T, d)$ 简化成

$$D(T, d) = \frac{n}{n_s(T)} \frac{2\alpha_0}{\pi^2} \frac{\Delta_0^2(0)}{\Delta_0^2(T)} \left(1 + \frac{\Delta_0(T)}{k_B T} \frac{1}{\text{sh} \frac{\Delta_0(T)}{k_B T}} \right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{((2l+1)^3 + \alpha_0)^2}. \quad (39)$$

四、理論和实验比較

最近 Messervey 和 Douglass^[8] 利用隧道方法, 对厚度 $420 \text{ \AA} \lesssim 2d \lesssim 9850 \text{ \AA}$ 的八块 Al 膜, 在 $0.642 \lesssim \frac{T}{T_c} \lesssim 0.9966$ 的范围内, 测量了它们的能隙和磁场的变化. 能隙和磁

场的变化关系一般是比较复杂的,但在 H_0 的数值比较小时, $\frac{\Delta}{\Delta_0(T)}$ 对所有测量的膜来说,都是和 $\frac{H^2}{H_{cm}^2(t)}$ 成线性依赖关系:

$$\frac{\Delta}{\Delta_0(T)} = 1 - D^*(T, d) \frac{H^2}{H_{cm}^2(T)}, \quad (40)$$

其中 $H_{cm}(T)$ 是在温度 T 时大样品的临界磁场. 本文的理论结果[见公式(30)]是和这个实验结果一致的.

Messervy 和 Douglass 把测得的系数 $D^*(T, d)$ 按 $\frac{d}{\lambda(T, d)}$ 作图. 此处 $\lambda(T, d) = \delta_0(T) \left(1 + \frac{\xi_0}{2d}\right)^{1/2}$ 是 Tinkham 所引入的有效穿透深度^[9], 根据 McLean^[10] 的实验数据, 穿透深度 $\delta_0(T)$ 用半经验公式 $\delta_0(T) = \delta_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)^{-1/2}$ 来表示 ($\delta_0 = 5.3 \times 10^{-6}$ cm). 他们

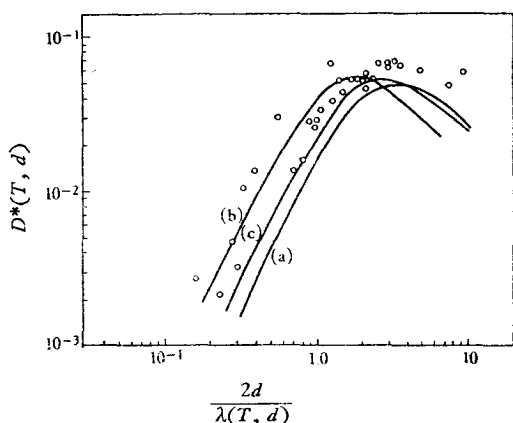


图1 $D^*(T, d)$ 随 $\frac{d}{\lambda(T, d)}$ 变化曲线(○——实验点)
曲线(a)——根据半经验公式(47)计算, $\xi_0 = 1.6 \times 10^{-4}$ cm;
曲线(b)与(c)——根据本文的理论公式(48)计算, ξ_0 分别
等于 1.6×10^{-4} cm 与 1.2×10^{-4} cm.

发现,对于不同温度和厚度, $D^*(T, d)$ 的实验点都近似地落在同一条曲线上(见图1). 这说明 $D^*(T, d)$ 近似地可以用单一参量 $\frac{d}{\lambda(T, d)}$ 表示出来, $D^*(T, d) = D^*\left(\frac{d}{\lambda(T, d)}\right)$. Messervy 和 Douglass 为了解释他们的实验,他们从仅适用于 T_c 附近的局域的 $\Gamma\Gamma$ 理论出发,把在 $\Gamma\Gamma$ 理论给出的 D^* 表达式中出现的穿透深度换成有效穿透深度 $\lambda(T, d)$, 得到如下的半经验公式

$$D^*\left(\frac{d}{\lambda}\right) = \frac{1}{8} \frac{\text{sh} \frac{2d}{\lambda} - \frac{2d}{\lambda}}{\frac{2d}{\lambda} \text{ch}^2 \frac{2d}{\lambda}}. \quad (41)$$

选择 $\xi_0 = 1.6 \times 10^{-4}$ cm, 由(41)计算出的曲线和实验点定性是一致的,只是数值稍偏低点[见图1中曲线(a)].

根据本文的理论,系数 $D^*(T, d)$ 是由下式给出的

$$D^*(T, d) = \frac{n}{n_s(T)} \frac{4\alpha_0}{\pi^2} \frac{\Delta_0^2(0)}{\Delta_0^2(T)} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \times \frac{(2l+1)\tilde{\Phi}_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right)}{(2l+1)^3 + \alpha_0\Phi_0\left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right)}. \quad (42)$$

在得到此公式时,我们利用了经验公式 $H_{cm}(T) = H_{cm}(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)$ 和公式(30)、(31). 公

式(42)给出的 D^* 和 T, d 的依赖关系是比较复杂, 一般很难希望只依赖单一参量 $\frac{d}{\lambda(T, d)}$ 的。但计算表明, 对于 Messervey 和 Douglass 实验所用的 Al 膜, 温度在 $0.642 \lesssim \frac{T}{T_c} \lesssim 0.9966$ 范围内, 因子 $\frac{n}{n_s(T)} \frac{\Delta_0^2(0)}{\Delta_0^2(T)} \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right)^2 \tilde{\Phi}_0 \left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right)$ 和 $\Phi_0 \left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta\Delta_0}{\pi}\right)$ 都近似地和 T 与 d 没有关系。因此 D^* 近似地仅通过参量 $\alpha_0 = \frac{6}{\pi^2} \frac{d^3}{\delta_L^2 \xi_0} \frac{\Delta_0(T)}{\Delta_0(0)} \text{th} \frac{\Delta_0(T)}{2k_B T}$ 依赖于温度和厚度的。在表 1 中, 我们计算了 α_0 和 $\frac{d^3}{\delta_0^2(1-t^4)^2 \xi_0}$ 的比值 $C(t)$, 其中 $t = \frac{T}{T_c}$ 。由表中所列的数字, 我们看到 $C(t) \approx 1$, 此即 $\alpha_0 \approx \frac{d^3}{\delta_0^2(1-t^4)^2 \xi_0}$ 。对于 Messervey 和 Douglass 实验所测量的大部分 Al 膜, 都有 $d \ll \xi_0$, 此时 $\frac{d^2}{2\lambda^2(T, d)} \approx \frac{d^3}{\delta_0^2(1-t^4)^2 \xi_0}$ 。这样, 对于 Al 膜来说, 当 T 和 d 限定在 Messervey 和 Douglass 的实验所测定的温度和厚度范围内, $D^*(T, d)$ 近似地只依赖单一参量 $d/\lambda(T, d)$ 。

表 1 比值 $C(t) = \alpha_0 / \left[\frac{d^3}{\delta_0^2(1-t^4)^2 \xi_0} \right]$
(参量 $\xi_0 = 1.2 \times 10^{-4} \text{cm}$)

t	0.74	0.80	0.86	0.92	0.98
$C(t)$	0.87	0.92	0.97	1.02	1.08

取 $\xi_0 = 1.6 \times 10^{-4} \text{cm}$ 和 $1.2 \times 10^{-4} \text{cm}$, 按 (42) 式画出的 $D^*(T, d) \sim d/\lambda$ 曲线 (见图 1 中曲线(b)和(c)), 在 $\frac{d}{\lambda}$ 小时, 和实验点符合很好, 而在 $\frac{d}{\lambda}$ 大时, 理论曲线比实验点偏低。

附 录

在 $\Delta t > \frac{1}{10}$ 时, 用本文的理论来计算临界场是否适当是很有疑问的。我们在附录中, 仅简单地说明推导步骤, 给出它的表达式。

利用公式^[1]

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{H_{cm}^2}{8\pi} - \frac{\sigma}{d}, \quad (43)$$

而

$$\sigma = \int_0^{2d} dr_1 \left\{ \frac{H^2(r_1)}{8\pi} - \frac{H_c H(r_1)}{4\pi} + \Delta F \right\}, \quad (44)$$

其中 $H(r_1) = \frac{dA(r_1)}{dr_1}$, $\Delta F = F_{SH} - F_{SO}$ 是有磁场时和无磁场时超导膜的自由能密度之差,

$$\Delta F = F_{SH} - F_{SO} = \frac{H_{cm}^2}{8\pi} + \int_0^{\Delta} d\Delta \quad \Delta^2 \frac{\delta \left| \frac{1}{g} \right|}{\delta \Delta}, \quad (45)$$

由(22)与(24),我们求得

$$\begin{aligned} \frac{H_c^2}{H_{cm}^2(0)} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{(2l+1)^3 + \alpha \Phi_0 \left(\frac{\sigma}{2l+1}, \frac{\beta \Delta}{\pi} \right)} \right\} = \\ = \frac{2\gamma^2}{\pi^2} \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \int_0^{\infty} dx x^2 \frac{dg(x)}{dx} - \frac{2\Delta^2}{\Delta_0^2(0)} (g(\beta \Delta) - g(\beta \Delta_0)). \end{aligned} \quad (46)$$

令(24)中的 $H_0 = H_c$, 并把它和(46)联立起来, 就可以解出 H_c .

在 $\Delta t < \frac{1}{10}$ 时, 利用 $\left(\frac{\Delta}{\pi k_B T_c} \right)^2 \ll 1$, 经过 § 3 说明的简化步骤, (52)简化成

$$\frac{H_c^2}{H_{cm}^2(t)} = \frac{(2 - \phi^2)\phi^2}{1 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2 + \frac{4d'^2\phi^2}{\pi^2} \mathbf{K}(\nu)}}, \quad (47)$$

其中 $\mathbf{K}(\nu)$ 是由(27)定义的.

参 考 文 献

- [1] Гинзбург, В. Л. и Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **20** (1950), 1064.
- [2] 吴杭生, 雷啸霖, 物理学报, **21** (1965), 1354.
- [3] Горьков Л. Л., ЖЭТФ, **36** (1959), 1918.
- [4] 吴杭生, 雷啸霖, 物理学报, **20** (1964), 873.
- [5] 雷啸霖, 吴杭生, 物理学报, **20** (1964), 991.
- [6] 吴杭生, 物理学报, **21** (1965), 135.
- [7] 雷啸霖, 物理学报, **21** (1965), 1619.
- [8] Messervey, M. and Douglass D. H., Phys. Rev., **135(A)** (1964), 24.
- [9] Tinkham, M. Phys. Rev., **110** (1958), 26.
- [10] McLean W. L. Proc. Phys. Soc., **A79** (1962), 572.

DEPENDENCE OF THE ENERGY GAP OF A SUPERCONDUCTING FILM ON MAGNETIC FIELD

WU HANG-SHENG JIANG JIAN-XUA YING RUN-JIE

ABSTRACT

In this paper, we have calculated the energy gap of a superconducting film in a magnetic field. The result is valid in the whole temperature range but only for small magnetic field satisfying the condition $\left(\frac{e\hbar p_0}{mc} \frac{A}{\pi k_B T_c} \right)^2 \ll 1$, where A is the vector potential and $\hbar p_0$ is Fermi momentum. The results are compared with the experimental data, and agreement is good.