

耦合波导管本征值的讨论*

顾福年

(江西大学)

提 要

本文对文献[1]提出一些不同的见解,对联系边界条件有另外的提法,在处理方法上亦有不同。本文认为耦合槽可以分为浅槽和深槽两种形式,首先对槽口的电场作了近似估计,然后用格林张量函数求出矩形和圆形波导耦合时的电磁场,再用边界条件得出本征方程;对于本征方程,认为可以用两个电路的导纳相等来理解。本文亦对耦合波导管的传输常数和原有波导管传输常数加以讨论,最后再对某些应用上的问题加以简单的讨论。

一、引 言

在“物理学报”和“中国科学”上发表了黄宏嘉同志的微波强耦合论^[1],作者学习之后得益不少,同时觉得有一些问题再讨论一下是有益的。本文的目的是从理论上对微波波导的耦合问题,提出一些看法。

本文所用的方法亦是按波型函数(正交函数)展开的方法,就其本质来说和论文[1]是相同的;但是一开始就用波导管所对应的格林张量函数^[2,3],实际上就省去了列出常微分方程组和求解这方程组所需的步骤,而可直接列出电磁场的解。

本文研究几个柱形波导管通过沿着轴向相通的长槽互相耦合的问题,在原则上波导管可以任意多个,为简单起见只考虑二个波导管的耦合问题。目前就讨论矩形波导 I 和圆形波导 II 的耦合,其截面如图 1。槽的长度应该分两种情况来考虑:一种是无限长槽,一种是有限长槽。现在只研究无限长槽的情况。槽的截面可以放大,如图 2,其形状近似

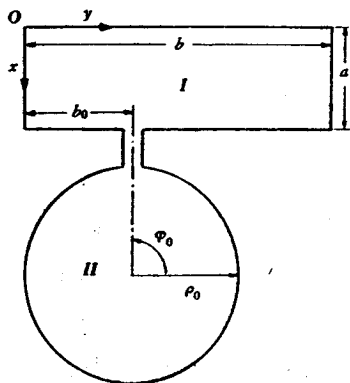


图1 波导管耦合

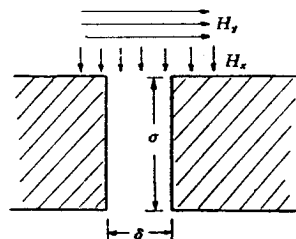


图2 槽断面放大

* 1964年10月20日收到;1965年5月11日收到修改稿。

地成二个矩形,设其宽度为 δ , 深度为 σ . 我们将分两种情况来考虑,第一是浅槽,即 $\lambda \gg \delta \gg \sigma$; 第二是深槽,即 $\lambda \gg \sigma \geq \delta$. 这里 λ 是电波在自由空间的波长.

本文的中心问题是如何求具有无限长耦合槽的波导管的传输常数.

二、边界条件

为了建立两波导的关系,首先是边界条件(衔接条件),它不但表示波导 I 和波导 II 两者边界上的关系,而且代表了波导 I, II 上电磁场的相互影响. 在波导 I, II 的边界上除去槽外都是普通的边界条件:

$$E_t|_{\text{边界}} = 0, \quad H_n|_{\text{边界}} = 0. \quad (1)$$

在槽的地方我们考虑到槽的宽度和深度比波长小得多,所以可采用似稳电磁场的结果,即忽略位移电流项而解拉普拉斯方程^[4].

1. 浅槽 ($\lambda \gg \delta \gg \sigma$)

在槽的两边电磁场是连续的. 以附标 I 记矩形波导,以附标 II 记圆形波导,则互相联系的边界条件,在 H 型波的情况下是

$$\begin{aligned} (E_y)_I &= -(E_\varphi)_{II}, (E_x)_I = -(E_\rho)_{II}, (E_z)_I = (E_z)_{II} = 0; \\ (H_y)_I &= -(H_\varphi)_{II}, (H_x)_I = -(H_\rho)_{II}, (H_z)_I = (H_z)_{II}. \end{aligned} \quad (2)$$

开槽后由于妨碍了环行电流,此时槽的两边存在电位差 $V_0(z)$, 用保角变换的方法可以求得电场的近似分布^[4,5], 这结果在很多文献中亦应用了,如文献[6, 7].

设槽的位置在波导 I 位于 $x = a, b_0 - \frac{\rho_0 \Delta}{2} \leq y \leq b_0 + \frac{\rho_0 \Delta}{2}$; 在波导 II 的位置是 $\rho = \rho_0, \varphi_0 - \frac{\Delta}{2} \leq \varphi \leq \varphi_0 + \frac{\Delta}{2}$, 则

$$(E_y)_I = \frac{V_0(z)}{\pi \sqrt{\left(\frac{\rho_0 \Delta}{2}\right)^2 - (y - b_0)^2}}, \quad (3a)$$

$$(E_\varphi)_{II} = \frac{-V_0(z)}{\rho_0 \pi \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - (\varphi - \varphi_0)^2}}. \quad (3b)$$

这里 $\rho_0 \Delta = \delta$, 我们亦不难验证 $\int_{\text{槽}} E_y ds = V_0(z)$. 这个电场是相当于两个刀口之间的电场,在靠近边界时电场趋于无限大.

2. 深槽 ($\lambda \gg \sigma \geq \delta$)

在图 2 上所示某一侧的均匀电场 E_x 或者均匀磁场 H_y , 当经过矩形槽时,它起着屏蔽作用,到槽的另一边要衰减不少,相当于乘一个指数因子 $e^{-\frac{\pi \sigma}{\delta}}$ ^[4]. 因此我们可以认为这里的电磁场不可能通过槽而直接发生作用,它们都是由于槽口两边相同的电位差 $V_0(z)$ 以及轴向磁场 H_x 而共同作用的. 此时 $V_0(z)$ 可以看作在两块平板之间的电场,如果不计及边缘效应时,其值当然到处都是 $V_0(z)/\delta$. 因为 $\sigma \ll \lambda$, 所以在一个横截面上的相位差可以忽略. 我们亦可以并不困难地估计边缘效应,但这也仅是两块矩形板之间的电场,没有考虑波导管壁的影响,亦很难说估计了边缘效应就可以增加电场的准确程度. 下面我

们就采取

$$(E_y)_I = -(E_\varphi)_{II} = \frac{V_0(z)}{\delta}. \quad (4)$$

在具有无限长槽时, 这二个波导管合成体仍可看作一个柱形波导管, 不过其截面不是规则形状, 它的截面上既有矩形又有圆形, 所以仍可传输电波. 所以, 其电磁场对 z 轴的依赖关系可以假定为 e^{ilz} 的形式, 这里 l 是传输常数. 这样 $V_0(z) = V_0 e^{ilz}$, 这一点无论对于深槽或浅槽都成立. 在深槽时

$$E_y = \frac{V_0}{\delta} e^{ilz}. \quad (4a)$$

为了研究联系边界条件, 必须先讨论槽间的磁场, 利用麦克斯韦方程 $-j\omega\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{E}$ 以及 (4a), 对 H 型波可以求到

$$H_x = \frac{l}{\omega\mu} E_y = \frac{l}{\omega\mu} \frac{V_0}{\delta} e^{ilz}. \quad (5)$$

这里 E_y 和 H_x 都是不依赖于 x, y 坐标的, 象文献[1]或[8]一样, 我们作槽口断面上的路积分[见图 3(b)]:

$$\int_{z_1}^{z_2} H_{zI} dz - \int_{z_1}^{z_2} H_{zII} dz - \int_{x_0}^{x_0+\sigma} H_x|_{z=z_1} dx + \int_{x_0}^{x_0+\sigma} H_x|_{z=z_2} dx = j\omega\epsilon \iint E_y dx dz.$$

设 $z_2 - z_1 = \Delta$, 两边除以 Δ , 而且令 $\Delta \rightarrow 0$, 则上式变为

$$H_{zI} - H_{zII} + \sigma \frac{l}{\omega\mu} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{E_y|_{z=z_1+\Delta} - E_y|_{z=z_1}}{\Delta} = j\omega\epsilon\sigma E_y,$$

即

$$H_{zI} - H_{zII} = j\sigma \left[\omega\epsilon - \frac{l^2}{\omega\mu} \right] E_y. \quad (6)$$

由于 $l^2 = \omega^2\epsilon\mu - k_d^2 > 0$, 所以 $\omega\epsilon > \frac{l^2}{\omega\mu}$, 但是当耦合波导管的本征值 k_d 很小时 (从下面讨论知道这是可能的) $\frac{l^2}{\omega\mu} \approx \omega\epsilon$, 所以 H_x 的作用不能忽略, 在文献[1]中没有考虑 H_x 项的作用会引起相当大的误差.

在本文中由于所用方法的局限性, 使得 H_x 在槽口上不收敛, 我们不能采取上面的迴

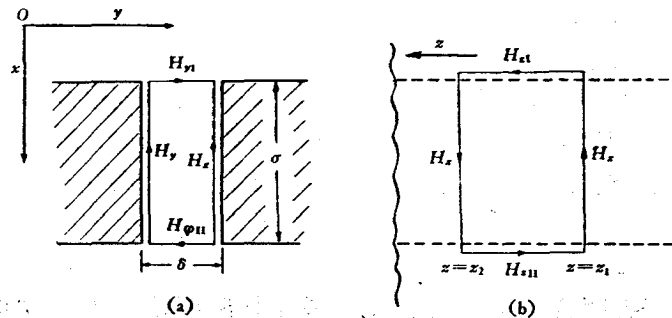


图3 积分迴路

路,使迴路沿着槽横断面的边界上作积分[见图 3(a)]:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = -j\omega\epsilon \iint E_x ds,$$

在 H 波时 $E_x = 0$, 而且在沿 x 方向积分时,由于 H_x 不随 y 而变;更一般而言,由于 H_x 的对称性,所以它的积分之值为零,这样我们的联系边界条件是

$$\int_{槽口} H_{y1} dy + \int_{槽口} H_{\varphi 1l} d\varphi = 0. \quad (7)$$

三、主要研究方法

1. 以前的理论结果

上面已经说过,无限长槽时耦合的波导管仍为一个柱形波导管,不过形状不规则而已.如果是有限长槽耦合的波导管,可以看作上述波导管在尾端有分叉连接.

我们知道任何柱形波导管的 z 分量电磁场 φ_{iz} , 一定满足下面微分方程的定解问题:

$$(\nabla^2 + k_i^2)\varphi_{iz} = 0, \quad \varphi_{iz}|_{c_i} = 0 \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial n} \right|_{c_i} = 0. \quad (8)$$

我们以 $i = 0$ 代表耦合后的波导管,以 $i = 1$ 代表 I 波导, $i = 2$ 代表 II 波导;这里 C_0, C_1, C_2 为对应波导的边界.其对应的本征值组 $(k_0^2)^n, (k_1^2)^n, (k_2^2)^n$ 的大小可以用变分法来估计,如果我们把它们各组按值的大小来依次编号,即

$$(k_i^2)^{(1)} \leq (k_i^2)^{(2)} \leq \dots \leq (k_i^2)^{(l)} \leq (k_i^2)^{(l+1)} \leq \dots,$$

可以知道对于第一类边界条件 (E 型波),有下面的关系式^[9]:

$$(k_0^2)^{(l)} \leq (k_1^2)^{(l)}, \quad (k_0^2)^{(l)} \leq (k_2^2)^{(l)}.$$

所以当波导管合并后,其本征值会发生突变,变到原有本征值之下.对应于第二类边界条件 (H 型波),如果我们把 $(k_1^2)^n$ 和 $(k_2^2)^n$ 两组本征值混合起来,再按大小次序排列,成为序列

$$(k_i^2)_1 \leq (k_i^2)_2 \leq \dots \leq (k_i^2)_l \leq (k_i^2)_{l+1} \leq \dots,$$

这里 $i = 1$, 或 2 , 则^[9]

$$(k_i^2)_l \leq (k_0^2)^{(l)}. \quad (9)$$

所以 $(k_0^2)^{(l)}$ 和 $(k_1^2)^{(l)}$ 或 $(k_2^2)^{(l)}$ 并不能直接来比大小,亦不能说 $(k_i^2)_{l+1} \geq (k_0^2)^{(l)}$. 对于 H 波来说(由下面知道这是发生耦合的波型),有下面重要事实^[9,10]: 当槽口很狭时存在一个很小的本征值,只要槽口充分狭,可以使这个本征值小于任何一个小数量.这个事实除了数学证明外,还可以这样理解.当槽口很狭时,在它的附近有可能形成一个接近于似稳定电磁场的区域,它的近似解满足拉普拉斯方程,即本征值接近于零.所以实际上有三个区域,除了波导 I, II 区域外,另外有一个稳定区域,这样使本征值降到 $(k_i^2)^{(l)}$ 之下.从以后的讨论中知道这种现象的确可能存在,但亦要指出发生这种现象会引起很大损耗,并不实用.

2. 电磁场的结构

对于耦合波导管的电磁场 z 分量 $\varphi_{iz}^{(l)}$, 一般说来不能以波导 I 或 II 的本征函数族 $\varphi_{i1}^{(k)}$ 和 $\varphi_{i2}^{(k)}$ 中的某一个来单独地表示,必然是一个级数和,而且要分区来表示:

$$\varphi_{0z}^{(I)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^I \varphi_{1z}^{(k)} & \text{(在区域 I),} \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k^I \varphi_{2z}^{(k)} & \text{(在区域 II).} \end{cases} \quad (10)$$

在槽隙又是一种表示形式, 上面已研究过. (10)式的两个级数除槽隙外都满足齐次边界条件(第一类或第二类), 但是在槽隙上有电磁场存在, 级数和到此处就有跳跃, 即级数并不一致收敛, 这种情况就象一个间断函数可以展开为傅氏级数一样.

上式的系数 a_k^I 和 b_k^I 显然都是槽隙 δ 的函数, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 如果系数 $a_{k_0}^I$ 比其他系数 a_k^I 都增长得快, 即 $a_{k_0}^I/a_k^I \rightarrow \infty$, 则可以认为 $\varphi_{0z}^{(I)}$ 是由 $\varphi_{1z}^{k_0}$ 型波和波导 II 相耦合而形成的. 对于系数序列 b_k^I 亦有相同的对应结论.

现在研究耦合波导管的电磁场解. 和其他柱波导一样, 可以分为 E 型和 H 型波, 无论那一种波, 其形式一定是

$$E_i(\xi, \eta)e^{\pm i l z}, \quad H_i(\xi, \eta)e^{\pm i l z};$$

这里

$$l^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (k_0^i)^2. \quad (11)$$

它的电磁场在槽口上亦存在, 和各单个波导不同的地方是, 原来槽口封闭时没有电场的地方, 现在有了特殊形式的电场, 它由(3)和(4)式来表示. 如果要以正交函数展开为(10)式形状的话, 则可以把槽口上的电场考虑作为面磁流 I , 其方向是 z , 它和 z 座标的函数关系一定亦是 $e^{\pm i l z}$, 且面磁流

$$\mathbf{I} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0, \quad (12)$$

这里 \mathbf{n} 是由波导管内部指向槽口的, 所以分别是 \mathbf{i}_y 或 \mathbf{i}_x , 而 \mathbf{E}_0 为槽口上的切向电场, 即分别为 \mathbf{E}_{yI} 或 \mathbf{E}_{xI} . 所以 \mathbf{I} 的方向是 z 方向. 这磁流所引起的电磁场可以写成下面的形式^[2,3]:

$$\mathbf{E}_{I,II} = \iiint \tilde{\mathbf{A}}_{I,II} \cdot \mathbf{I}_{I,II} dv, \quad (13a)$$

$$\mathbf{H}_{I,II} = \iiint \tilde{\mathbf{B}}_{I,II} \cdot \mathbf{I}_{I,II} dv. \quad (13b)$$

这里 $\tilde{\mathbf{A}}_{I,II}$, $\tilde{\mathbf{B}}_{I,II}$ 是波导管 I, II 的格林张量函数, 它是并矢形式; $\mathbf{I}_{I,II}$ 就是(12)式所定义的磁流. 由(13)式所规定的电磁场在槽口上有跳跃性质, 即由波导内部趋于槽口时, 切向电场不为零, 而有(12)式所提到的 E_0 值; 但在槽口上由于波型函数 φ_{1z} 或 φ_{2z} 的性质, 它的切向电场为零.

由(3)和(4)式可以代入(12)式求得面磁流, 然后由(13)式求得电磁场, 再用联系边界条件(2)或(7)式决定传输常数 l , 以及由此解决其他问题, 这就是整个研究方法.

四、电磁场计算

1. 格林张量函数的计算

为了计算确定起见, 我们就按波导 I 是矩形, 波导 II 是圆形来考虑. 在矩形波导中如果其长为 a 宽为 b , 我们略去麻烦的计算, 对 E 型波可以得到下式:

$$\mathcal{E}_{m,n,I}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{2}{k_n^m \sqrt{ab}} \left[\pm i_x \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \pm i_y \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} + \right. \\ \left. + i_z \frac{(k_n^m)^2}{j k_n^m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \right] e^{\pm i k_n^m z}, \quad (14a)$$

$$\mathcal{H}_{m,n,I}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{2}{k_n^m \sqrt{ab}} \left[i_x \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} - i_y \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \right] e^{\pm i k_n^m z}, \quad (14b)$$

这里

$$k_n^m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad (14c) \\ (K_n^m)^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - (k_n^m)^2.$$

对于H型波,可得到:

$$\mathcal{E}_{m,n,II}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\chi_n^m \sqrt{ab}} \left[i_x \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} - i_y \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \right] e^{\pm i k_n^m z}, \quad (15a)$$

$$\mathcal{H}_{m,n,II}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{2}{\chi_n^m \sqrt{ab}} \left[\mp i_x \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \mp i_y \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} + \right. \\ \left. + i_z \frac{(k_n^m)^2}{j K_n^m} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \right] e^{\pm i k_n^m z}; \quad (15b)$$

这里

$$\chi_n^m = \left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \delta_n + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \delta_m \right]^{1/2}, \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & n \neq 0, \\ 2 & n = 0. \end{cases} \quad (15c)$$

在圆形波导中,如果其半径为 ρ_0 , 则对应于E波

$$\mathcal{E}_{m,n,III}^{\pm} = \frac{1}{k_n^m (N_E)_n^m} \left[\pm i_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \mp i_\varphi \frac{n}{\rho} J_n(k_n^m \rho) \sin n\varphi + \right. \\ \left. + i_z \frac{(k_n^m)^2}{j K_n^m} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \right] e^{\pm i k_n^m z}, \quad (16a)$$

$$\mathcal{H}_{m,n,III}^{\pm} = \frac{1}{k_n^m (N_E)_n^m} \left[-i_\rho \frac{n}{\rho} J_n(k_n^m \rho) \sin n\varphi - i_\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \right] e^{\pm i k_n^m z}; \quad (16b)$$

这里

$$J_n(k_n^m \rho_0) = 0, \\ (K_n^m)^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (k_n^m)^2, \quad (16c) \\ (N_E)_n^m = \delta_n \pi \frac{\rho_0^2}{2} [J_n'(k_n^m \rho_0)]^2, \quad \delta_n = \begin{cases} 2 & n = 0, \\ 1 & n \neq 0. \end{cases}$$

对于H型波

$$\mathcal{E}_{m,n,III}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_n^m (N_H)_n^m} \left[i_\rho \frac{n}{\rho} J_n(k_n^m \rho) \sin n\varphi + i_\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \right] e^{\pm i k_n^m z}, \quad (17a)$$

$$\mathcal{H}_{m,n,III}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_n^m (N_H)_n^m} \left[\pm i_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \mp i_\varphi J_n(k_n^m \rho) \sin n\varphi + \right. \\ \left. + i_z \frac{(k_n^m)^2}{j K_n^m} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \right] e^{\pm i k_n^m z}; \quad (17b)$$

这里

$$J_n'(k_n^m \rho_0) = 0,$$

$$(N_H^2)^m = \delta_n \pi \frac{\rho_0^2}{2} J_n^2(k_n^m \rho_0) \left[1 - \frac{n^2}{(k_n^m)^2 \rho_0^2} \right], \quad \delta_n = \begin{cases} 2 & n = 0, \\ 1 & n \neq 0. \end{cases} \quad (17c)$$

利用上面的矢量 \mathcal{E} 和 \mathcal{H} , 可以得到并矢 A, B 如下:

$$\overleftrightarrow{A}_{I,II}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \sum_{m,n} \mathcal{E}_{m,n;I,II}^{\mp}(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{m,n;I,II}^{\pm}(\mathbf{r}'), \quad (z \geq z') \quad (18a)$$

$$\overleftrightarrow{B}_{I,II}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \sum Y_{m,n} \mathcal{E}_{m,n;I,II}^{\mp}(\mathbf{r}) \mathcal{H}_{m,n;I,II}^{\pm}(\mathbf{r}'); \quad (18b)$$

其中

$$Y_{m,n} = \begin{cases} \omega \varepsilon / K_n^m & \text{如为 } E \text{ 型波} \\ K_n^m / \omega \mu & \text{如为 } H \text{ 型波} \end{cases} \quad (18c)$$

这里的附标“+”和“-”号是按照 $z < z'$ 或 $z > z'$ 来选取的。由(12)式知面磁流方向是 z 方向, 所以如果把(18)式代入(13)式计算电磁场, 我们发现当为 E 波时, 矢量 \mathcal{H} 没 z 分量, 所以求得的电磁场为零, 因此对于 E 型波来说是沒耦合作用的。这一点和文献[1]的结论是相同的, 在物理意义上说, E 型波沒 H_z 分量, 不可能使槽口上产生电位差 $V_0(z)$, 所以无法耦合。

2. 电磁场

现在我们可以由(13), (15), (17)和(18)式来计算电磁场, 它要分为第 I 区域(矩形), 第 II 区域(圆形), 以及浅槽和深槽四种情况, 由于我们只用磁场来满足联系边界条件, 所以下面不推求电场(虽然求电场只要如法泡制)。

(1) 矩形区域

1) 浅槽 由(12)式及(3a)式来决定面磁流

$$\mathbf{I} = E_y \mathbf{i}_z.$$

如果考虑到 z 方向的函数变化, 并把面磁流写为体密度的表示式, 则

$$I_z = \begin{cases} \delta(x-a) \frac{V_0 e^{ilx}}{\pi \sqrt{\left(\frac{\rho_0 \Delta}{2}\right)^2 - (y-b_0)^2}}, & \text{在 } b_0 - \frac{\rho_0 \Delta}{2} < y < b_0 + \frac{\rho_0 \Delta}{2}, \\ 0 & \text{在 } y \text{ 的其余区域.} \end{cases} \quad (19)$$

这里 $\delta(x-a)$ 是 δ 函数, 为了使(13)式中的积分能实现, 我们必须把磁流作一些修改, 即把 z 的积分区域 $(-\infty, \infty)$ 分为两部分:

$$I_z = \lim_{c \rightarrow 0} \begin{cases} I_z e^{-cz}, & \text{当 } z \rightarrow \infty, \\ I_z e^{cz}, & \text{当 } z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (C > 0) \quad (20)$$

这种修改是通常的方法, 亦是符合物理意义的, 因为一点沒有损耗的介质是不存在的, 只在有限区域上有电源, 它所传播到无限远处的电波必然要使振幅衰减为零。这样我们就求得磁场

$$H_{II}(x, y, z) = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \frac{-1}{2\omega\mu} \sum_{m,n} K_n^m \mathcal{H}_{m,n}^-(\mathbf{r}) \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{(k_n^m)^2}{jK_n^m \gamma_n^m} \cos n\pi x \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^z e^{jK_n^m z' + jlx' + cz'} dz' \int_{b_0 - \frac{\rho_0 \Delta}{2}}^{b_0 + \frac{\rho_0 \Delta}{2}} \cos \frac{m\pi y'}{b} \frac{V_0}{\pi \sqrt{\left(\frac{\rho_0 \Delta}{2}\right)^2 - (y' - b_0)^2}} dy' - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\omega\mu} \sum_{m,n} K_n^m \mathcal{H}_{m,n}^+(\mathbf{r}) \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{(k_n^m)^2}{jK_n^m \chi_n^m} \cos n\pi x \times \\
& \times \int_z^\infty e^{-jK_n^m z' + jlx' - cx'} dz' \int_{b_0 - \frac{\rho_0 \Delta}{2}}^{b_0 + \frac{\rho_0 \Delta}{2}} \cos \frac{m\pi y'}{b} \frac{V_0}{\pi \sqrt{\left(\frac{\rho_0 \Delta}{2}\right)^2 - (y' - b_0)^2}} dy' \Big\} = \\
& = \frac{4V_0}{ab\omega\mu} \sum_{m,n} \frac{(k_n^m)^2}{(\chi_n^m)^2} \cos n\pi x \cos \frac{m\pi b_0}{b} J_0\left(\frac{m\pi \rho_0 \Delta}{b}\right) e^{ilz} \left[\left(\mathbf{i}_x \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{i}_y \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \right) \frac{l}{l^2 - (K_n^m)^2} + \mathbf{i}_z (k_n^m)^2 \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{j}{l^2 - (K_n^m)^2} \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

2) 深槽 求面磁流时用(4)式

$$I_z = \begin{cases} \delta(x-a) \frac{V_0 e^{ilz}}{\delta}, & b_0 - \frac{\rho_0 \Delta}{2} < y < b_0 + \frac{\rho_0 \Delta}{2}, \\ 0, & \text{在 } y \text{ 的其余区域.} \end{cases} \quad (22)$$

用同样办法得到

$$\begin{aligned}
H_{Iz}(x, y, z) &= \frac{8V_0}{\delta ab\omega\mu} \sum_{m,n} \frac{(k_n^m)^2}{(\chi_n^m)^2} \frac{b}{m\pi} \cos n\pi x \cos \frac{m\pi b_0}{b} \sin \frac{m\pi}{b} \frac{\delta}{2} e^{ilz} \times \\
& \times \left[\left(\mathbf{i}_x \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} + \mathbf{i}_y \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \right) \frac{l}{l^2 - (K_n^m)^2} + \right. \\
& \left. + \mathbf{i}_z (k_n^m)^2 \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{j}{l^2 - (K_n^m)^2} \right]. \quad (23)
\end{aligned}$$

(2) 圆形区域

1) 浅槽 由(12)及(3b)式来决定面磁流

$$\mathbf{I} = (E_\varphi)_{II} \mathbf{i}_z.$$

如果考虑到 z 方向的函数变化, 并把面磁流写为体密度的表示式, 则

$$I_z = \begin{cases} -\delta(\rho - \rho_0) \frac{V_0 e^{ilz}}{\rho_0 \pi \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - (\varphi - \varphi_0)^2}}, & \text{当 } \varphi_0 - \frac{\Delta}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{在 } \varphi \text{ 的其余区域.} \end{cases} \quad (24)$$

用同样方法计算, 可以得到

$$\begin{aligned}
H_{Iz}(\rho, \varphi, z) &= \frac{-V_0}{\omega\mu} \sum_{m,n} \frac{1}{(N_H^m)^m} J_n(k_n^m \rho_0) \cos n\varphi_0 J_0\left(\frac{\Delta}{2} n\right) e^{ilz} \left[\left(-\mathbf{i}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{i}_\varphi \frac{n}{\rho} J_n(k_n^m \rho) \sin n\varphi \right) \frac{l}{l^2 - (K_n^m)^2} + \mathbf{i}_z (k_n^m)^2 J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \frac{j}{l^2 - (K_n^m)^2} \right]. \quad (25)
\end{aligned}$$

2) 深槽 其磁流体密度

$$I_z = \begin{cases} -\delta(\rho - \rho_0) \frac{V_0 e^{ilz}}{\delta}, & \text{在 } \varphi_0 - \frac{\Delta}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{在 } \varphi \text{ 的其余区域.} \end{cases} \quad (26)$$

这样我们求得

$$\begin{aligned}
 H_{IIz}(\rho, \varphi, z) = & \frac{-2V_0}{\Delta\omega\mu} \sum_{m,n} \frac{1}{(N_H^m)^2} J_n(k_n^m \rho_0) \cos n\varphi_0 \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\Delta}{2} e^{iIz} \left[\left(-i_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + i_\varphi \frac{n}{\rho} J_n(k_n^m \rho) \sin n\varphi \right) \frac{l}{l^2 - (K_n^m)^2} + i_z (k_n^m)^2 J_n(k_n^m \rho) \cos n\varphi \frac{i}{l^2 - (K_n^m)^2} \right]. \quad (27)
 \end{aligned}$$

注意在圆形区域中的 k_n^m 和 K_n^m 与矩形区域中的不一样。

五、本征方程

求出电磁场之后, 我们就能利用联系边界条件来求耦合波导管的本征值。在讨论之前, 我们先研究一下在边界上级数(21), (23), (25)和(27)式的收敛性质。它们都有三个分量, 在边界上由于本征值的性质, 其第一分量(即 x 和 ρ 分量)变为零。再比较第三分量(即 z 分量)与第二分量(即 y 或 φ 分量)的系数, 我们发现第三分量的系数是乘上 $(k_n^m)^2$, 而第二分量只有 $\frac{m\pi}{b}$ 或 $\frac{n}{\rho}$ 的因子, 所以当 m, n 很大时, 第三分量的系数比第二分量大很多, 我们可以证明第二分量在边界上是收敛的, 而同样的分析可以证明第三分量是发散的。这一点是容易理解的, 由于我们的方法是假定了在槽口上有面磁流, 它的方向沿 z 轴, 而且在边界上磁流体密度是无限大, 我们在上面是用 δ 函数来表示它们, 这个影响就带入了磁场的 z 分量中, 这是目前我们用这种方法所不可避免的。当然不在边界上, 在 I, II 区域内部时, H_z 还是收敛的。下面我们就浅槽与深槽分别来讨论。

1. 浅槽

我们用(2)中各式, 其中在槽口上 $(E_y)_I = -(E_\varphi)_{II}$ 是由(3a)和(3b)来保证的; 而 $(H_x)_I = -(H_\rho)_{II} = 0$, 在边界上现在还有三个等式必须满足, 即 $(E_x)_I = -(E_\rho)_{II}$, $(H_y)_I = -(H_\varphi)_{II}$, $(H_z)_I = (H_z)_{II}$ 。我们知道在麦克斯韦方程组中只有一个到二个独立未知函数, 现在已经有二组方程相同了, 所以这三个剩下来的方程是等价的。我们利用三个式子中任何一个都可以得到我们所需要的结果。这里 H_z 当然在耦合中起重要作用的, 但是现在表示它的级数不收敛, 所以不能用它, 而 E_x 与 E_ρ 和 H_y 与 H_φ 它们都可以因槽的深度加大而减弱耦合, 由于现在是浅槽, 所以这种减弱作用可以忽略。现在我们利用等式

$$\begin{aligned}
 & x = a \text{ 时, } b_0 - \frac{\rho_0 \Delta}{2} < y < b_0 + \frac{\rho_0 \Delta}{2}, \\
 (H_y)_I = & -(H_\varphi)_{II}, \text{ 当} \\
 & \rho = \rho_0 \text{ 时, } \varphi_0 - \frac{\Delta}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\Delta}{2}.
 \end{aligned} \quad (28)$$

其实如果我们利用(12)和(13a)式来计算电场, 再令 $(E_x)_I = -(E_\rho)_{II}$ 在边界上, 则得出的结果和(28)式是相同的。

为了使(28)式在整个上述区域上都相等是不可能的, 因为我们在(3)式中所假定的电场分布是近似的。如果可以根据电磁场的某一种实际分布情况来计算, 当然能使它在这一区域上都满足(28)式。但这样一种分布只能对应一个本征值, 不同的本征值要用不同的对应电磁场分布来计算。现在并不想详细研究电磁场分布更精确的形式, 我们说只要

槽很狭,则电场的细致分布并不起主要作用,作为近似,可以只令槽中心的磁场相等,即在 $x = a, y = b_0, \rho = \rho_0, \varphi = \varphi_0$ 处来满足(28)式. 现在利用(21)和(25)式,并且注意到 $k^2 - (K_n^m)^2 = (k_n^m)^2 - k^2$; 这里 k^2 是耦合波导管的本征值,所以有

$$\begin{aligned} & \frac{4V_0}{ab\omega\mu} \sum_{m,n} \frac{(k_n^m)^2}{(\lambda_n^m)^2} \cos \frac{m\pi b_0}{b} \sin \frac{m\pi b_0}{b} \cdot \frac{m\pi}{b} J_0 \left(\frac{m\pi}{b} \frac{\rho_0 \Delta}{2} \right) \frac{-jk}{k^2 - (k_n^m)^2} e^{jlx} = \\ & = \frac{V_0}{\omega\mu} \sum_{m,n} \frac{1}{(N_H^2)_n^m} J_n^2(k_n^{m'} \rho_0) \sin n\varphi_0 \cos n\varphi_0 \frac{n}{\rho_0} J_0 \left(\frac{\Delta}{2} n \right) \frac{-jk}{k^2 - (k_n^{m'})^2} e^{jlx}. \end{aligned} \quad (29)$$

我们可以把上式写成

$$\sum_{m,n} \frac{-jk A_{mn}}{k^2 - (k_n^m)^2} = \sum_{m,n} \frac{-jk A'_{mn}}{k^2 - (k_n^{m'})^2}, \quad (30)$$

这里

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \frac{(k_n^m)^2}{(\lambda_n^m)^2} \frac{m\pi}{b} \sin 2 \frac{m\pi b_0}{b} J_0 \left(\frac{m\pi}{b} \frac{\rho_0 \Delta}{2} \right), \quad (30a)$$

$$A'_{mn} = \frac{1}{(N_H^2)_n^m} J_n^2(k_n^{m'} \rho_0) \frac{n}{\rho_0} \sin 2n\varphi_0 J_0 \left(n \frac{\Delta}{2} \right). \quad (30b)$$

由这个本征方程可以得到一组无穷多解,这就是近似本征值的全体,我们任取(30)式中一项来研究

$$\frac{-jk\alpha_{mn}}{k^2 - (k_n^m)^2} = \frac{1}{jk/\alpha_{mn} + (k_n^m)^2/jk\alpha_{mn}}, \quad (31)$$

如果把 k 了解为角频率,上式了解为电导纳,则上式就相当于有电感 L 和电容 C 的串联电路,这里

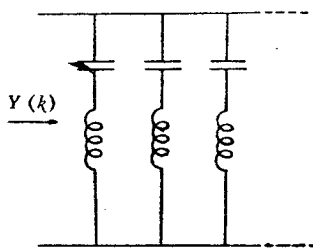


图4 等效电路

$$L = \frac{1}{\alpha_{mn}}, \quad C = \frac{\alpha_{mn}}{(k_n^m)^2}. \quad (32)$$

当然只有在 $\alpha_{mn} > 0$ 时才能代表实际元件;当 $\alpha_{mn} < 0$ 时,就相当于负电感和负电容. 也就是,在(30)式的每一边,对应一个波导,代表一个带有正、负电感和正、负电容电路的电纳,而且对应两种波导的电纳相等. 为了便于以后讨论和通常两端网络相对应,我们把 A_{mn} 或 A'_{mn} 取负值的项移到等式的另一边(如果妨碍级数收敛,我们可以近似地取主要有限项),这样(30)式两边都是可以用实际元件代表了,如图4所示的电路,此时(30)式变为

$$Y_1(k) = Y_2(k), \quad (33)$$

这里 Y_1, Y_2 都是电纳. 所以耦合波导管的本征值(本征频率)就是可以了解为使两个 LC 电路的电纳相等的那个频率. 我们可以把(33)式(或(30)式)所揭示的那个性质名为导纳(或阻抗)相等定理.

我们可以把 $Y_1(k)$ 和 $Y_2(k)$ 画出来,按照网络理论知道它们的斜率都是正的,在各本征频率(谐振频率) k_n^m 或 $k_n^{m'}$ 处趋于无限大,这二个曲线的交点就是耦合的本征频率. 我们画图5作为例子,从图上可以看到有二种可能性:如图5(a)则耦合本征频率比波导 I, II 的本征频率中最小的大,这种情况就如(9)式所预示的那样,这以后简称为情况 a . 但在图5(b)上则最小耦合本征频率比波导 I, II 的本征频率都小,这种情况亦在第四段

第 1 节中说明了,通常这本征频率是很小的,以后简称为情况 *b*. 上面这两种情况亦说明了在不同电磁场分布下,其本征频率的分布亦不同.

现在我们来研究一下什么时候可能发生图 5(a)的情况,或者图 5(b)的情况. 如果我们记有最小谐振频率 k_0^m 或 $k_0^{m'}$ 的函数是 $Y_1(k)$, 当然这谐振频率可能是矩形波导的,即 $k_0^m = \frac{\pi}{b}$ (称为情况 A), 亦可能是

圆形波导的,即 $k_0^{m'} = \frac{1.84}{\rho_0}$ (称为情况 B),

情况 A 或 B 系由 b 和 ρ_0 的大小来决定. 另外,成立情况 a 的条件是

$$\frac{1}{j} Y_1'(0) > \frac{1}{j} Y_2'(0); \quad (34a)$$

成立情况 b 的条件是

$$\frac{1}{j} Y_1'(0) < \frac{1}{j} Y_2'(0). \quad (34b)$$

我们知道

$$\frac{d}{dk} \left[\frac{-k\alpha_{mn}}{k^2 - (k_n^m)^2} \right] \Big|_{k=0} = \frac{\alpha_{mn}}{(k_n^m)^2}$$

如果把 A_{mn} 分为二部分,记 A_{mn} 中大于零的为 P_{mn}^m , 小于零的为 N_{mn}^m ; A'_{mn} 中大于零的为 $P_{mn}^{m'}$, 小于零的为 $N_{mn}^{m'}$, 所以判别情况 a, b 的条件(34)式就是下面不等式:

$$\sum' \frac{P_{mn}^m}{(k_n^m)^2} + \sum' \frac{-N_{mn}^m}{(k_n^m)^2} \leq \sum' \frac{-N_{mn}^{m'}}{(k_n^{m'})^2} + \sum' \frac{P_{mn}^{m'}}{(k_n^{m'})^2}, \quad (35)$$

如果把上不等式中的 N 项移到另一边,则(35)式相当于

$$\sum_{m,n} \frac{A_{mn}}{(k_n^m)^2} \leq \sum_{m,n} \frac{A'_{mn}}{(k_n^{m'})^2}. \quad (35a)$$

我们可以分析 $\sum \frac{A_{mn}}{(k_n^m)^2}$ 和 $\sum \frac{A'_{mn}}{(k_n^{m'})^2}$ 的值,知道它们取值是与 $\sin \frac{2\pi b_0}{b}$ 和 $\sin 2\varphi_0$ 同号,这亦是说与 A_{10} 和 A'_{11} 同号 (当 $b - \frac{\delta}{4} > b_0 > \frac{\delta}{4}$, $\pi - \frac{\Delta}{4} > \varphi_0 > \frac{\Delta}{4}$ 时) (见附录).

在情况 A 下 ($k_0^m < k_0^{m'}$), 且 $\sin \frac{2\pi b_0}{b} > 0$, 则(35)式左边是 $\frac{1}{j} Y_1'(0)$; 当 $\sin \frac{2\pi b_0}{b} < 0$, 则(35)式右边是 $\frac{1}{j} Y_1'(0)$. 我们按照(34)式来判断时,可以得到表 1 的结果.

表 1 情况 A 下耦合本征值的变化

耦合本征值情况	$\sin \frac{2\pi b_0}{b} > 0$	$\sin \frac{2\pi b_0}{b} < 0$
$\sin 2\varphi_0 \leq 0$	a	不定
$\sin 2\varphi_0 > 0$	不定	a

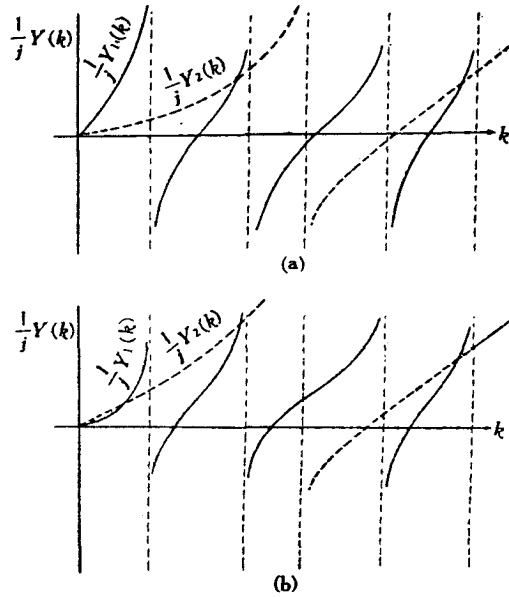


图 5 导纳曲线

上表中只有情况 a 可以肯定,至于不定的情况是因为 (35) 或 (35a) 式两边都是相同的符号,比较大小有实际困难;为了不致引入过于复杂的计算,我们略去了讨论,至于情况 B ($k_0^b > k_1'$) 的讨论完全一样,只要把 $2\varphi_0$ 和 $\frac{2\pi b_0}{b}$ 互换就成了。

这样,我们知道如果改变 φ_0 或 b_0 的值,可以使本征值的分布发生变化,可以由情况 a 变到情况 b,亦可以反过来变化。

2. 深槽

我们用联系边界条件 (7), 把 (23) 式和 (27) 式中的 H_{yI} 和 $H_{\varphi II}$ 代入, 此时对 H_{yI} 令 $x = a$, 对 y 的积分区域为 $b_0 - \frac{\delta}{2} < y < b_0 + \frac{\delta}{2}$; 对 $H_{\varphi II}$ 令 $\rho = \rho_0$, 对 φ 积分区域 $\varphi_0 - \frac{\Delta}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\Delta}{2}$, 得到

$$\frac{8V_0}{\delta ab \omega \mu} \sum_{m,n} \frac{(k_n^m)^2}{(\chi_n^m)^2} \frac{b}{m\pi} \sin 2 \frac{m\pi b_0}{b} \sin^2 \frac{m\pi \delta}{2b} \frac{l}{l^2 - (K_n^m)^2} e^{ilz} +$$

$$+ \frac{-2V_0}{\Delta \omega \mu} \sum_{m,n} \frac{1}{(N_H^2)_n^m} \frac{1}{n} J_n^2(k_n^{m'} \rho_0) \sin 2n\varphi_0 \sin^2 \frac{n\Delta}{2} \frac{l}{l^2 - (K_n^{m'})^2} e^{ilz} = 0. \quad (36)$$

和上面一样,可以把(36)式中的 $l^2 - (K_n^m)^2$ 换为 $k^2 - (k_n^m)^2$, 再作一些简单的乘除得到

$$\sum_{m,n} \frac{-jk B_{mn}}{k^2 - (k_n^m)^2} = \sum_{m,n} \frac{-jk B'_{mn}}{k^2 - (k_n^{m'})^2} \quad (37)$$

这里

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \frac{(k_n^m)^2}{(\chi_n^m)^2} \frac{b}{m\pi} \sin \frac{2m\pi b_0}{b} \sin^2 \frac{m\pi}{b} \frac{\delta}{2}, \quad (37a)$$

$$B'_{mn} = \frac{\rho_0}{(N_H^2)_n^m} \frac{1}{n} J_n^2(k_n^{m'} \rho_0) \sin 2n\varphi_0 \sin^2 \frac{n\Delta}{2}. \quad (37b)$$

如果和(30)式相比,它们的形式相同,不过 B_{mn} 和 A_{mn} 的值是大大不同的。我们如果拿 B_{mn} 来代替上面(30)式的 A_{mn} , 可以作完全类似的讨论,亦可以把(37)式近似地写成导纳(或阻抗)相等的(33)式形状。我们亦可以证明 $\sum \frac{B_{mn}}{(k_n^m)^2}$ 的符号和 $\sin \frac{2\pi b_0}{b}$ 相同,而 $\sum \frac{B'_{mn}}{(k_n^{m'})^2}$ 的符号和 $\sin 2\varphi_0$ 相同(见附录),所以表中所指出的情况在深槽亦成立,不过当 Δ 很小时,无论 $\frac{1}{j} Y_1(0)$ 或 $\frac{1}{j} Y_2'(0)$ 都是很小,因此图 5 曲线在 $k = 0$ 附近很接近,极容易有情况 b 发生,或出现不稳定现象。

我们亦可以看到无论在浅槽或深槽,如果在矩形波导中取 $b_0 = \frac{b}{2}$, 或者在圆形波导中取 $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, 则本波导在槽口上引起耦合的电磁场等于零,故耦合波导的本征值和本波导的几何结构无关,只决定于另一波导的电和几何结构。而且,在本波导容易有杂波产生,如果两个波导同时满足上面的条件,则不发生耦合作用。

六、应用上的一些讨论

上面虽然只解出耦合波导管的本征频率,但是对于应用已有相当帮助。现在我们从

最简单的说, 如果我们在波导 I, II 中加以滤波设备, 使得在波导 I 中只有 H_{mn} 波, 而在波导 II 中只有 $H_{m'n'}$ 波, 同时忽略滤波而带来的扰动, 或者更精确地说, 这只有在 k_n^m 和 $k_{n'}^{m'}$ 很接近时, 此时(30)式或(37)式具有一个和 k_n^m 亦即和 $k_{n'}^{m'}$ 很接近的解, 则这些式中只有二项由于分母变小而在级数中起显著作用, 我们把(30)式或(37)式中除了 A_{mn} 和 $A'_{m'n'}$ (或 B_{mn} 和 $B'_{m'n'}$ 项) 项外, 其余各项都去掉, 成为

$$\frac{-jkA_{mn}}{k^2 - (k_n^m)^2} = \frac{-jkA'_{m'n'}}{k^2 - (k_{n'}^{m'})^2}$$

它的解

$$k^2 = \frac{A_{mn}(k_{n'}^{m'})^2 - A'_{m'n'}(k_n^m)^2}{A_{mn} - A'_{m'n'}} \quad (38)$$

由此可以求得耦合波导管的传输常数 $l^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k^2$.

因此在区域 I, II 中都有形如 $f(\xi, \eta) e^{\pm ilz}$ 的波存在. 现在把 l 值代入(21)和(25)式中, 由于 l 与 k_n^m 和 $k_{n'}^{m'}$ 相接近, 所以在区域 I 中电磁场的主要分布和矩形 H_{mn} 波型相接近, 在区域 II 中和圆形 $H_{m'n'}$ 波型相接近. 一般说来, 如果有耦合都是无限多个波互相耦合, 只是在上述情况下可以取二个主要波型来代表. 我们可以利用(21)和(25)式[或者(22)和(27)式]来计算 H_{mn} 矩形和 $H_{m'n'}$ 圆形之间振幅比例, 在浅槽情况下

$$\frac{E_{mn(\text{矩形})}}{E_{m'n'(\text{圆形})}} = \frac{4}{ab} \frac{(k_n^m)^2}{(\chi_n^m)^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(N_H^2)_{n'}^{m'}} \frac{\cos \frac{m\pi b_0}{b}}{J_{n'}(k_{n'}^{m'} \rho_0)} \frac{J_0\left(\frac{m\pi}{b} \frac{\rho_0 \Delta}{2}\right)}{J_0\left(\frac{\Delta}{2} n'\right)} \frac{1}{\cos n' \varphi_0} \cdot \frac{l^2 - (K_{n'}^{m'})^2}{l^2 - (K_n^m)^2} \quad (39)$$

在这种最简单情况下, 如果由于耦合槽端点反射电波而形成驻波, 可以测量到的转换长度 L 为

$$L = \frac{\pi}{2} l, \quad (40)$$

而转换损失就在(39)式中去求.

在通常情况下, 可以控制区域 I 中电磁场分布的波型 H_{mn} , 使区域 I 中起主要作用的是对应的一项. 但在区域 II 中可以有很多波型存在, 求解出来的耦合本征频率就不止一个, 它们对应传输常数 l_1, l_2, \dots, l_a , 这些波型有着不同的电磁场分布, 如果它们同时存在, 除了在截面上各波型互相干涉, 在 z 的方向亦会有差拍, 形成如下的驻波

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (l_{a_1} \pm l_{a_2}) z}{\cos \frac{1}{2} (l_{a_1} \pm l_{a_2}) z},$$

在测量中亦有对应的转换长度.

从上面我们可以得出下面的几个结论:

1. 两个波导管在长槽相耦合时, 可以根据槽的深浅分为两种不同的情况考虑.
2. 把耦合后的波导管看作一个具有异形截面的波导管, 所以不可能保存原来的电磁场分布以及传输常数.
3. 决定耦合后的本征频率与两个电路在某些频率下电纳相等是一致的.
4. 变化耦合槽的位置可以影响到耦合本征值的分布.
5. 一般情况下互相耦合的波型是无限多个, 只有在两个波导管原来的传输常数相近

的情况下,才能使杂波相对减少,而近似地考虑两个波型的耦合.

附 录

1. 研究双重级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\chi_n^m)^2} \frac{m\pi}{b} \sin \frac{2m\pi b_0}{b} J_0\left(\frac{m\pi}{b} \frac{\delta}{2}\right)$, 即浅槽的 $\frac{ab}{4} \sum_{m,n} \frac{A_{mn}}{(k_n^m)^2}$, 如令 $x = \frac{2\pi b_0}{b}$, $\delta' = \frac{\pi}{b} \frac{\delta}{2}$, 又把上面级数分为两部分, 即

$$\begin{aligned} \frac{ab}{4} \sum \frac{A_{mn}}{(k_n^m)^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\left(m \frac{\pi}{b}\right)^2} \frac{m\pi}{b} \sin mx \cdot J_0(m\delta') + \\ &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m\pi/b}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \sin mx \cdot J_0(m\delta'). \end{aligned} \quad (41)$$

我们知道

$$J_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(y \sin \varphi) d\varphi,$$

所以级数(41)的第一部分为

$$\begin{aligned} \frac{b}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin mx \cdot J_0(m\delta') &= \frac{b}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin mx \cos(m\delta' \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{b}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\sin m(x + \delta' \sin \varphi) + \sin m(x - \delta' \sin \varphi)] d\varphi = \\ &= \frac{b}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \left[\frac{\pi - x - \delta' \sin \varphi}{2} + \frac{\pi - x + \delta' \sin \varphi}{2} \right] d\varphi = \frac{b}{4\pi} (\pi - x), \end{aligned} \quad (42)$$

当 $\delta' \sin \varphi < x < 2\pi - \delta' \sin \varphi$ 时上式成立, 这里我们用了下式^[12]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin my}{m} = \frac{\pi - y}{2} \quad (\text{当 } 0 < y < 2\pi).$$

再看级数(41)的第二部分

$$\begin{aligned} \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 + \left(\frac{nb}{a}\right)^2} \sin mx \cdot J_0(m\delta') &= \\ &= \frac{b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 + \left(\frac{nb}{a}\right)^2} \sin mx \cos(m\delta' \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{b}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{sh} \frac{nb}{a} (\pi - x - \delta' \sin \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \frac{nb}{a} (\pi - x + \delta' \sin \varphi) \right] \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{nb\pi}{a}} d\varphi = \\ &= \frac{b}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} \frac{nb}{a} (\pi - x) \operatorname{ch}(\delta' \sin \varphi) / \operatorname{sh} \frac{nb\pi}{a} d\varphi, \end{aligned}$$

当 $\delta' \sin \varphi \leq x \leq 2\pi - \delta' \sin \varphi$. (43)

这里用到^[12]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin my}{m^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi - y)a}{2 \operatorname{sh} \pi a}, \quad \text{当 } 0 \leq y \leq 2\pi.$$

从(42)和(43)式看,都是当 $\pi - x > 0$ 取正值; $\pi - x < 0$ 取负值,即和 $\sin x$ 同号.

2. 研究 $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(N_H^2)^m} \frac{1}{(k_n^m)^2} J_n^2(k_n^m \rho_0) \frac{n}{\rho_0} \sin 2n\varphi_0 J_0\left(n \frac{\Delta}{2}\right)$, 即浅槽的 $\sum_{m,n} \frac{A'_{mn}}{(k_n^m)^2}$, 先

研究 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(N_H^2)^m} \frac{1}{(k_n^m)^2} J_n^2(k_n^m \rho_0)$.

我们知道,一个在区间 $(0, \rho_0)$ 上的连续函数 $f(\rho)$ 可以展开为傅里叶-贝塞耳级数,

即

$$f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_n(k_n^m \rho),$$

这里

$$J'_n(k_n^m \rho_0) = 0.$$

如果令

$$f(\rho) = \frac{1}{n\pi} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n,$$

则

$$f_m = \frac{\pi}{(N_H^2)^m} \int_0^{\rho_0} \rho f(\rho) J_n(k_n^m \rho) d\rho = \frac{\rho_0}{n(N_H^2)^m k_n^m} J_{n+1}(k_n^m \rho_0).$$

利用递推式和本征值的性质,得到

$$J_{n+1}(k_n^m \rho_0) = \frac{n}{\rho_0} \frac{1}{k_n^m} J_n(k_n^m \rho_0),$$

所以

$$\frac{1}{n\pi} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(N_H^2)^m} \frac{1}{(k_n^m)^2} J_n(k_n^m \rho_0) J_n(k_n^m \rho), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0.$$

当 $\rho = \rho_0$, 知

$$\frac{1}{n\pi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(N_H^2)^m} \frac{1}{(k_n^m)^2} J_n^2(k_n^m \rho_0), \quad (44)$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A'_{mn}}{(k_n^m)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi \rho_0} \sin 2n\varphi_0 \cdot J_n\left(\frac{n\Delta}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi \rho_0} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\varphi_0 \cos\left(n \frac{\Delta}{2} \sin \varphi\right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \rho_0} \int_0^{\pi} \left[\cot\left(\varphi_0 + \frac{\Delta}{4} \sin \varphi\right) + \cot\left(\varphi_0 - \frac{\Delta}{4} \sin \varphi\right) \right] d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \rho_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\varphi_0}{\sin\left(\varphi_0 + \frac{\Delta}{4} \sin \varphi\right) \sin\left(\varphi_0 - \frac{\Delta}{4} \sin \varphi\right)} d\varphi, \quad (45) \end{aligned}$$

这里用到^[12]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin ny = \frac{1}{2} \cot \frac{y}{2}.$$

由(45)式可以看到,只要

$$\frac{\Delta}{4} < \varphi_0 < \pi - \frac{\Delta}{4}, \quad \pi + \frac{\Delta}{4} < \varphi < 2\pi - \frac{\Delta}{4},$$

则 $\sum \frac{A'_{mn}}{(k_n^m)^2}$ 的正负决定于 $\sin 2\varphi_0$.

3. 研究 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\chi_n^m)^2} \frac{b}{m\pi} \sin \frac{2m\pi b_0}{b} \sin^2 \frac{m\pi}{b} \frac{\delta}{2}$, 即深槽的 $\frac{ab}{4} \sum_{m,n} \frac{B_{mn}}{(k_n^m)^2}$ 和第1点一样,把上面级数分为两部分:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{4} \sum_{m,n} \frac{B_{mn}}{(k_n^m)^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin mx \sin^2 m\delta + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 \frac{1}{m \left[m^2 + \left(\frac{\pi b}{a}\right)^2\right]} \sin mx \sin^2 m\delta'. \end{aligned} \quad (46)$$

我们注意到

$$\sin mx \sin^2 m\delta' = \frac{1}{2} \sin mx - \frac{1}{4} [\sin m(x - 2\delta') + \sin m(x + 2\delta')],$$

而且我们知道^[12]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin mx = \frac{\pi^2 x}{6} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{x^3}{12} = f(x) \quad (\text{当 } 0 < x < 2\pi),$$

所以(46)式第一部分级数为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left[\frac{1}{2} \sin mx - \frac{1}{4} \sin m(x - 2\delta') - \frac{1}{4} \sin m(x + 2\delta') \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 [2f(x) - f(x - 2\delta') - f(x + 2\delta')] \approx \frac{1}{8} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 [-f''(x)] \cdot (2\delta')^2 \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 \frac{\pi - x}{2} \quad (\text{只要 } \delta' \ll 1). \end{aligned} \quad (47)$$

在研究(46)式的第二个级数之前,先可以用积分变换求出^[12]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m \left[m^2 + \left(\frac{nb}{a}\right)^2\right]} = \frac{(x - \pi) \operatorname{sh} \frac{nb\pi}{a} + \pi \operatorname{sh}(\pi - x) \frac{nb}{a}}{-2 \left(\frac{nb}{a}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{nb\pi}{a}},$$

故

$$\begin{aligned} &\left(\frac{b}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx \sin^2 m\delta'}{m \left[m^2 + \left(\frac{nb}{a}\right)^2\right]} \\ &= -\frac{\pi}{8} \left(\frac{b}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{nb}{a}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{nb\pi}{a}} 2 \operatorname{sh} \frac{nb}{a} (\pi - x) \left[1 - \operatorname{ch} 2\delta' \frac{n\pi b}{a}\right], \end{aligned} \quad (48)$$

因为 $\operatorname{ch} y > 1$, 故(48)式取值的正负号和 $\pi - x$ 相同; (47)式亦如此, 故在 $2\delta' \leq x \leq 2\pi - 2\delta'$, $\delta' \ll 1$ 时, $\sum_{m,n} \frac{B_{mn}}{(k_n^m)^2}$ 的正负号和 $\sin \frac{2\pi b_0}{b}$ 相同。

4. 研究 $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(N_H^2)^n} \frac{\rho_0}{n} \frac{1}{(k_n^m)^2} J_0^2(k_n^m \rho_0) \sin 2n\varphi_0 \sin^2 \frac{n\Delta}{2}$, 即深槽的 $\sum_{m,n} \frac{B'_{mn}}{(k_n^m)^2}$, 我们可以利用第 2 点中的(44)式, 所以

$$\sum_{m,n} \frac{B'_{mn}}{(k_n^m)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_0}{n^2 \pi} \sin 2n\varphi_0 \sin^2 \frac{n\Delta}{2}.$$

我们又注意到

$$\sin 2n\varphi_0 \sin^2 \frac{n\Delta}{2} = \frac{1}{4} [2 \sin 2n\varphi_0 - \sin n(2\varphi_0 - \Delta) - \sin n(2\varphi_0 + \Delta)],$$

而^[12]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = - \int_0^x \ln \left(2 \sin \frac{\xi}{2} \right) d\xi,$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \frac{B'_{mn}}{(k_n^m)^2} &= \frac{\rho_0}{4\pi} \left[-2 \int_0^{2\varphi_0} + \int_0^{\varphi_0 - \Delta} + \int_0^{\varphi_0 + \Delta} \right] \ln \left(2 \sin \frac{\xi}{2} \right) d\xi \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi} \left[\int_{2\varphi_0}^{2\varphi_0 + \Delta} \ln \left(2 \sin \frac{\xi}{2} \right) d\xi - \int_{2\varphi_0 - \Delta}^{2\varphi_0} \ln \left(2 \sin \frac{\xi}{2} \right) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

因为 $\ln x$ 当 $x > 0$ 时是单调上升函数, 而 $\sin \frac{\xi}{2}$ 在 $0 < \xi < \pi$ 是上升函数, 在 $\pi < \xi < 2\pi$ 是下降函数, 又由于 $\sin 2\varphi_0$ 的周期性, 所以(49)式右边的值和 $\sin 2\varphi_0$ 是同号的。

参 考 文 献

- [1] 黄宏嘉, 物理学报, **18** (1962), 27; 中国科学, **11** (1962), 16.
- [2] Marcuvitz, N. and Schwinger, J., *JAP*, **22** (1951), 806.
- [3] 顾福年, 物理学报, **19** (1963), 617.
- [4] Кадев, Г., *Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и технике электросвязи*, Москва, (1957).
- [5] Morse, P. M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics Part II*.
- [6] Wait, J. R., *Electromagnetic radiation from cylindrical structures*.
- [7] Ахизер, А. И. и Любарский, Г. Я., *ЖТФ*, **24** (1954), 1697.
- [8] Pasher, H., *Archiv E. U.*, **13** (1959), 76.
- [9] Courant and Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1.
- [10] Goubau, G., *Elektromagnetische Wellenleiter und Hohlräume*, Kap. 1.
- [11] Краснушкин, П. Е. и Хохлов, Р. В., *ЖТФ*, **19** (1949), 931.
- [12] Collin, R. E., *Field Theory of Guided Waves*, Appendix A6.

ON EIGENVALUES OF COUPLED WAVEGUIDES

KU FU-NIEN

(*Kiangsi University*)

ABSTRACT

This paper proposes some new ideas on the theory of coupled waveguides which was formerly discussed in literature [1]. A new suggestion on inter-boundary condition, and a new method of treatment have been offered. Two forms of coupled slots, shallow and deep, are considered. The electric field in the mouth of slot is estimated by approximate methods, then the electromagnetic field both in coupled rectangular and circular waveguides with their tensor Green functions is derived. It has been pointed out in this paper that the results of application of boundary condition, the characteristic equation, can be accounted for as the equality of admittance of two *LC* circuits. There are some discussions on the relations between propagation constants of coupled waveguides and those of individual waveguides. As concluding remarks, some simple applications of the theory are mentioned.