

典型时空中的运动效应和宇观红移现象*

陆 启 铿

邹 振 隆

郭 汉 英

(中国科学院数学研究所) (中国科学院北京天文台) (中国科学院原子能研究所)

提 要

本文从相对性原理和局部光速不变性出发,建立了典型时空 $\mathcal{O}_\lambda(1, 4)$ 的模型,讨论了其中的运动效应,计算了光谱线的频移,并在均匀分布的假定下与类星体 $N-Z$ 关系的观测资料进行了比较. 结果表明,河外天体的大红移可能主要不是由多普勒效应引起的,而在相当大程度上是典型时空中的距离效应. 这样,运动群为 $SO(3, 2)$ 的模型 $\mathcal{O}_{\lambda < 0}(1, 4)$ 就可能是宇观时空较好的模写.

一、

爱因斯坦的狭义相对论有两个基本原理,即相对性原理和光速不变原理. 相对性原理认为,对于惯性参考系,物理定律的数学形式是相同的. 光速不变原理认为,相对于任何惯性系,真空中的光速都是 c . 事实上,这两个原理还隐含着时间和空间服从欧几里得几何的假定. 从测量的角度看,这相当于假定在一个参考系中,固定在任何地点的原子钟在任何时刻的频率都是一样的.

相对性原理和光速不变原理是在大量实验的基础上抽象出来的假定. 但是,就宇观大尺度时空而言,这些实验都是在很小的空间范围或短暂的时间进程中进行的,都具有局部的特征. 因此,严格说来,实验所支持的不过是局部成立的狭义相对论而已. 换句话说,如果要描述在宇观大尺度上的物理过程,特别是仅仅与大尺度时空的几何性质有关的运动学效应,那就应当放弃时空测量的欧几里得特征的假定.

如果用 3 维空间和 1 维时间坐标所构成的 4 维时空来描述物理过程,相对性原理便要求 4 维时空是均匀的或齐性的 (homogeneous) 流形,即存在一运动群,对任一时空点,有此运动群的变换使之变为另一给定的时空点;同时,相对性原理要求在 4 维时空中存在惯性坐标系,4 维流形的运动群就是惯性系之间的变换群,在这个群下物理定律是协变的. 我们这里暂不考虑引力,仍然认为相对性原理成立.

为了保证在小的空间范围或短暂的时间间隔内进行测量时得到狭义相对论的结果,而不对大尺度上钟尺的行为做过多的限制,可以仅假定在时空原点附近的小范围内光速不变原理成立,即要求 4 维时空变换群以齐次洛伦兹群为在时空原点的固定子群,而不要通常的平移变换:

* 1973 年 11 月 28 日收到, 1974 年 3 月 18 日收到修改稿.

$$x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + a^i \quad (i = 0-3, a^i \text{ 为常数})$$

为 4 维时空变换群的子群。这就自然放弃了时空服从欧氏几何的假定。

总之,从相对性原理和局部光速不变原理出发建立时空模型,并不会违背现有验证狭义相对论的任何实验。同时,宇观时空特征是欧氏还是非欧的问题,则有可能通过对宇观运动效应的观测和分析而决定取舍。

二、

据微分几何理论, n 维伪齐性 Riemann 流形最大运动群参数数目为 $\frac{n}{2}(n+1)$, 容有最大数目参数运动群的伪齐性 Riemann 流形是常曲率空间。它可以在 $n+1$ 维号差为 (p, q) 的伪欧氏空间中的伪球面上实现, 而且使伪超球不变的群 $SO(p, q)$, $p+q = n+1$ 就是此常曲率空间的运动群。

不难看出, 由于时空的维数是 4, 这里所要建立的时空模型的运动群是以 6 参数的齐次洛伦兹群为固定子群的 10 参数群。这是 4 维时空所容许的最大的运动群。这样的时空是常曲率的, 曲率记为 λ , 则我们可以建立三种时空模型: $\lambda > 0$ 为正曲率时空; $\lambda < 0$ 为负曲率时空; $\lambda = 0$ 为 Minkowski 时空。它们的变换群分别是同构于 $SO(4, 1)$ 和 $SO(3, 2)$ 的 de Sitter 群以及 Poincaré 群。

用典型域的方法^[1]可以证明 (见附录), 常曲率 4 维时空可以由如下式定义的域 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 表示:

$$\sigma \equiv 1 - \lambda \eta_{ij} x^i x^j > 0 \quad (i, j = 0-3), \quad (2.1)$$

其中 $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, 域 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中有度量

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j, \\ g_{ij} &= \frac{\eta_{ij}}{\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma^2} \eta_{ir} \eta_{js} x^r x^s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

在 de Sitter 群的变换:

$$\begin{aligned} x^i &\rightarrow \tilde{x}^i = \sqrt{1 - \lambda \eta_{rs} a^r a^s} \frac{x^i - a^i}{1 - \lambda \eta_{rs} a^r x^s} D_i^j, \\ \eta_{pq} D_i^p D_j^q &= \eta_{ij} + \frac{\lambda \eta_{ir} \eta_{js} a^r a^s}{1 - \lambda \eta_{rs} a^r a^s} \end{aligned} \quad (2.3)$$

下, 域 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 一一映为自身, 同时度量 (2.2) 式保持不变。

不难看出, 变换 (2.3) 式可将坐标为 a^i 的任一点映为 $\tilde{x}^i = 0$ 的点, 即 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 在 de Sitter 变换群下是齐性的, 这正满足相对性原理的要求, 特别, 当 $a^i = 0$ 时, (2.3) 式化为

$$\begin{aligned} x^i &\rightarrow \tilde{x}^i = x^i D_i^j, \\ \eta_{pq} D_i^p D_j^q &= \eta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

此即洛伦兹变换; 而且在时空原点处, 度量 (2.2) 式变为

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.5)$$

这表明在原点附近狭义相对论成立, 这就满足了局部光速不变原理的要求。

值得注意的是, 当 $\lambda = 0$ 时, (2.2) 式是 Minkowski 度规, (2.3) 式为 Poincaré 变换, 狭义相对论在全时空都是正确的.

为了保证相对性原理成立, 除了时空均匀性条件外, 还必须存在惯性系. 在狭义相对论中, 使得度量为 Minkowski 度量的坐标系是惯性系, 我们要着重指出, 当 $\lambda \neq 0$ 时, 使得度量为 (2.2) 式的坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 也是惯性系, 即相对于此坐标系自由质点作匀速直线运动^[2,3]. 为此, 我们考察沿类时测地线的运动:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (2.6)$$

其中 Γ_{jk}^i 是 Christoffel 符号, 根据 (2.2) 式由计算可知:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\lambda}{\sigma} (\delta_{ij} \eta_{kr} x^r + \delta_{kj} \eta_{ir} x^r).$$

从 (2.6) 式可以得到初积分

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dx^i}{ds} = A^i, \quad (2.7)$$

其中 A^i 为积分常数. 对于类时测地线可以证明 $\lambda < 0$ 时或 $\lambda > 0$ 但 $|x^0| < \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ 时, 必有 $A^0 \neq 0$, 可再积分得

$$x^a = \frac{A^a}{A^0} x^0 + x_0^a \quad (a = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

由此得

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = 0 \quad (i \equiv x^0, c = 1). \quad (2.9)$$

这就表明, 沿测地线的运动是匀速直线运动. 因此, 只要认为自由粒子沿类时测地线运动, 典型时空中使度量为 (2.2) 式的坐标系就是惯性系, 相对性原理关于惯性系的要求就能得到满足.

取球坐标 $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$:

$$x^0 = \tau, \quad x^1 = \rho \cos \theta, \quad x^2 = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad x^3 = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad (2.10)$$

则度量 (2.2) 式化为

$$ds^2 = \frac{(1 + \lambda \rho^2) d\tau^2 - 2\lambda \tau \rho d\tau d\rho - (1 - \lambda \tau^2) d\rho^2}{[1 - \lambda(\tau^2 - \rho^2)]^2} - \rho^2 \frac{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}{1 - \lambda(\tau^2 - \rho^2)}. \quad (2.2a)$$

如果作变换

$$r = \frac{\rho}{[1 - \lambda(\tau^2 - \rho^2)]^{1/2}}, \quad t = \int \frac{d\tau}{1 - \lambda \tau^2}, \quad (2.11)$$

可使得度量 (2.2a) 式变为

$$ds^2 = (1 - \lambda r^2) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \lambda r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.12)$$

这就是 de Sitter 度量^[4]. 不难看出, 尽管它在原点附近也回到 Minkowski 度量, 但显然不满足均匀性的要求, 因而不满足相对性原理的要求. 从典型时空的角度来看, 使度量为 (2.12) 式的坐标系是一种非惯性系.

此外,如果作变换

$$x^i = \frac{u^i}{1 + \frac{\lambda}{4} \eta_{ij} u^j u^i}, \quad (2.13)$$

则度量(2.2)式变为

$$ds^2 = \frac{\eta_{ij} du^i du^j}{\left(1 + \frac{\lambda}{4} \eta_{rs} u^r u^s\right)^2}. \quad (2.14)$$

变换(2.13)式是一一对应的,其逆变换为

$$u^i = \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda \eta_{ik} x^k x^i}}{\frac{1}{2} \lambda \eta_{rs} x^r x^s} x^i. \quad (2.15)$$

度量(2.14)式是考虑 $SO(4, 1)$ 或 $SO(3, 2)$ 群下不变的场论所常用的度量^[5-7], 坐标 u^i 称为共形坐标. 尽管这种度规既满足均匀性条件, 又满足局部光速不变原理的要求, 但测地线运动不是匀速直线运动, 因而共形坐标也不是惯性系. 事实上, 只有典型时空 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 才能同时满足相对性原理和局部光速不变原理.

三、

现在考查 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中的固有时, 光的传播和对钟问题.

和狭义相对论一样, 将在一个参考系中静止的原子钟的读数称为该钟的固有时, 它由线元 ds 表示, 利用(2.2)式可以求出固有时和钟在四维时空中的坐标之间的关系:

$$ds = \sqrt{g_{00}} dx^0 = \frac{\sqrt{1 - \lambda \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta}}{1 - \lambda \eta_{rs} x^r x^s} dx^0, \quad (3.1)$$

其中 $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, 积分之得

$$s(x^0, x^\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \text{Arth} \sqrt{\lambda} \frac{x^0}{\sqrt{1 - \lambda \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta}} & \lambda > 0; \\ x^0 & \lambda = 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \text{arctg} \frac{\sqrt{|\lambda|} x^0}{\sqrt{1 - \lambda \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta}} & \lambda < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

特别在空间原点 $x^\alpha = 0$ 处的原子钟固有时 s 与坐标时 x^0 之间的关系为

$$s(x^0, x^\alpha = 0) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \text{Arth} \sqrt{\lambda} x^0 & \lambda > 0; \\ x^0 & \lambda = 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \text{arctg} \sqrt{|\lambda|} x^0 & \lambda < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

这些结果表明, 当 $\lambda \neq 0$ 时, 原子钟的固有时和它在 4 维时空中的位置有关. 换言之, 相对于特定的测量系统, 不同世界点的原子钟的速率是不同的, 要发生频率移动现象.

不同世界点的光速也有类似的 λ 效应. 由于在时空原点狭义相对论成立, 即对于光

线有

$$ds = 0. \quad (3.4)$$

根据相对性原理, 此方程对任意世界点都成立, 由此可得世界点 x^i 处的光速为

$$c(x) = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta}, \quad (3.5)$$

其中 $v^a = \frac{dx^a}{dx^0}$ 是光沿 x^a 轴的速度分量, 由 (3.4) 式及 (2.2) 式有

$$g_{00} + 2g_{0a}v^a + g_{ab}v^av^b = 0. \quad (3.6)$$

在一些特殊情形, 由此可求出 $c(x)$, 例如:

$$c(x^0, x^a = 0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(x^0)^2}} \quad (3.7)$$

在 $x^0 = 0$ 时, 空间点 $x^a = (a, 0, 0)$ 处沿 x^1 轴传播的光速为

$$c_x(0, a, 0, 0) = \sqrt{1 + \lambda a^2}.$$

至于一般情形, 应考虑光沿零短程线传播:

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{du} = 0, \quad (3.8)$$

其中 u 为仿射参数, 亦可求得初积分:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{dx^i}{du} = k^i, \quad (3.9)$$

k^i 为积分常数, 在光的传播过程中是守恒量, 即

$$\frac{dk^i}{du} = 0. \quad (3.10)$$

不仿将 k^i 定义为 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中光的 4 维动量. 显然这是狭义相对论情形的自然推广. 可以证明, 这样定义的 k^0 和广义相对论在局部落伦兹标架中对光子能量的定义也是一致的^[8](见第五节). 因此, 当 $\lambda < 0$ 时或 $\lambda > 0$, $|x^0| < \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ 时, 有 $k^0 \neq 0$. 由此, 从 (3.9)

式再次积分得

$$x^a = v^a x^0 + x_0^a, \quad (3.11)$$

其中常数 $v^a = \frac{dx^a}{dx^0} = \frac{k^a}{k^0}$ 是光在 x^a 轴的分速度. (3.11) 式表明, 在 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中沿零短

程线也是匀速直线运动. 因此, 认为光沿零短程线运动是和相对性原理的要求一致的.

为了描述物理过程, 必须比较 (在同一惯性系中) 不同地点的测量结果. 为此必须考查典型时空中不同地点的对钟和同时性问题.

给定惯性系 S , 在 $x = 0$ 及 $x = a$ 处有两只结构相同的原子钟及光讯号的接收器和发射器. 设在 $t = t_0$ 时, 由 $x = 0$ 发出讯号, $t = t_1$ 时, $x = a$ 点收到讯号并立即发回讯号, $t = t_2$ 时, $x = 0$ 点收到发回讯号 (见图 1).

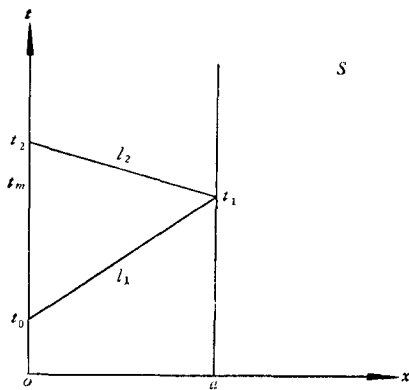


图 1

根据光的传播规律,在光路 l_1 和 l_2 上的方程分别为

$$\begin{aligned} l_1: \quad x &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda t_0^2}} (t-t_0), \quad a = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda t_0^2}} (t_1-t_0); \\ l_2: \quad x &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda t_2^2}} (t_2-t), \quad a = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda t_2^2}} (t_2-t_1). \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda t_0^2} + \sqrt{1-\lambda t_2^2}} (\sqrt{1-\lambda t_2^2} \cdot t_0 + \sqrt{1-\lambda t_0^2} \cdot t_2), \\ a &= \frac{t_2-t_0}{\sqrt{1-\lambda t_0^2} + \sqrt{1-\lambda t_2^2}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

用这个关系及 (3.2) 式就可校准不同地点的原子钟.

和狭义相对论一样,不同地点事件的同时性问题,只对指定的参考系才有意义,而在一个坐标系中不同地点同时发生的事件,自然是指在相同坐标时刻发生的事件.例如在上面例子中,事件 $(t_1, 0)$ 与 (t_1, a) 是同时的.值得指出的是:由于往返光速不同, t_1 并不是 t_0 与 t_2 的中点.

但可证明,对于 $x=0$ 处的原子钟而言,坐标时间间隔 t_1-t_0 和 t_2-t_1 分别对应的固有时间隔是相同的.假定固有时间隔的中点对应的坐标时为 t_m , 即有 $\int_{t_0}^{t_m} ds = \int_{t_m}^{t_2} ds$. 由于在空间原点 $ds = \frac{dt}{1-\lambda t^2}$, 因此积分后可得 $\frac{t_m-t_0}{1-\lambda t_0 t_m} = \frac{t_2-t_m}{1-\lambda t_2 t_m}$. 由此可解出:

$$t_m = \frac{1}{\lambda(t_0+t_2)} [1 + \lambda t_0 t_2 - \sqrt{(1-\lambda t_0^2)(1-\lambda t_2^2)}].$$

由 (3.12) 式将 t_0, t_2 用 t_1 表出,并代入上式即得

$$t_m = t_1, \quad (3.13)$$

此即表明 t_1 对应于 $x=0$ 处原子钟读出的固有时间隔中点,这是和狭义相对论一致的.

四、

进一步考查典型时空中有关粒子运动的一些问题.

定义粒子的力学量:

$$p^j = m_0 \frac{1}{\sigma} \frac{dx^j}{ds}, \quad (4.1)$$

$$L^{ij} = x^i p^j - x^j p^i, \quad (4.2)$$

其中 m_0 为只依赖于粒子内禀性质的常数,对于自由粒子,由 (2.7) 式立即得到

$$\frac{dp^j}{ds} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{dL^{ij}}{ds} = 0, \quad (4.4)$$

即 p^j 和 L^{ij} 都是守恒量,而且,在时空原点 $x^i=0$ 处或者当 $\lambda=0$ 时, p^j 和 L^{ij} 分别为狭

义相对论中粒子的 4 维动量和 4 维角动量; m_0 就是静止质量. 因此不妨将 p^i 和 L^{ij} 以及 m_0 定义为 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中粒子的 4 维动量和 4 维角动量以及内禀质量. 可以证明, 在 5 维伪欧氏空间中, 这样定义的 p^i 和 L^{ij} 构成粒子的 5 维角动量^[6].

考虑 4 维动量 p^i 的零分量:

$$p^0 = m_0 \frac{1}{\sigma} \frac{dx^0}{ds} = m_0 \sigma^{-1} (g_{00} + 2g_{0a}v^a + g_{ab}v^a v^b)^{-1/2}, \quad (4.5)$$

对于径向位置为 ρ 的静止粒子,

$$p^0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \lambda \rho^2}}. \quad (4.6)$$

当 $\lambda = 0$ 时, p^0 就是狭义相对论中粒子的静止能量, 它只与静止质量 m_0 有关; 当 $\lambda \neq 0$ 时, 静止粒子的能量不仅与内禀质量有关, 还与位置有关.

注意到对 4 维速度有 $g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1$, 由此可得典型时空中粒子的能量-动量关系为

$$g_{ij} p^i p^j = m_0^2 \sigma^{-2}. \quad (4.7)$$

显然, 这是狭义相对论中能量-动量关系的推广.

最后, 可以假定在典型时空中粒子的受力方程为

$$\frac{dp^i}{ds} = F^i, \quad (4.8)$$

$$\frac{dL^{ij}}{ds} = M^{ij}, \quad (4.9)$$

其中 F^i 与 M^{ij} 分别为作用于粒子上的外力和外矩, 这是狭义相对论中粒子运动方程的自然推广.

五、

我们来计算 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中谱线的频移.

沿用普朗克-爱因斯坦公式, 光子能量和频率关系为

$$k^0 = \frac{1}{\sigma} \frac{dx^0}{du} = h\nu. \quad (5.1)$$

假定测量系统处于自由状态, 取惯性系 S 使该系统固定在空间坐标的原点, 即此系统的世界线 C_1 与 t 轴重合. 考虑一自由点光源在世界点 P_0 处发出频率为 ν_1 的光, 在世界点 P_1 被测量系统收到的情形 (由于 k^0 是守恒量, 故接收频率仍为 ν_1). P_1 的坐标为 $(t_1, 0, 0, 0)$, P_0 的坐标可以不失一般性地取为 $(t_0, x_0, 0, 0)$ (如图 2).

取以光源为空间原点的惯性系 S' (即光源的世界线 C_0 与 S' 系的时间轴 t' 重合), 并使发光时刻为时间原点. 在这样的参考系中测量到的频率为光的内禀频

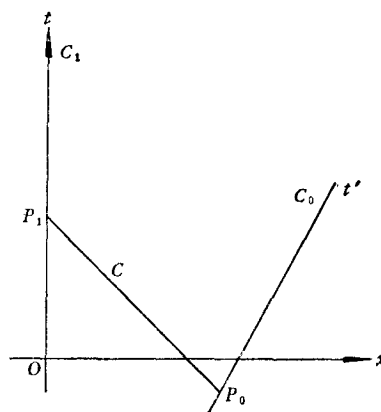


图 2

率, 记为 ν_0 . 由于光源在 S' 系中的 4 维速度 $\frac{dx^{i'}}{ds} = \delta_0^i$, 故光子在 S' 系中的能量为

$$k^{0'} = \left[\frac{1}{\sigma(x')} \frac{dx^{0'}}{du} \right]_{P_0} = \left[\eta_{ij} \frac{dx^{i'}}{du} \frac{dx^{j'}}{ds} \right]_{P_0} = \left[g_{ij}(x') \frac{dx^{i'}}{du} \frac{dx^{j'}}{ds} \right]_{P_0}.$$

该量为向量 $\left\{ \frac{dx^{i'}}{du} \right\}$ 与 $\left\{ \frac{dx^{j'}}{ds} \right\}$ 的标量积, 显然在坐标变换 (2.3) 式下是不变的. 因此, $k^{0'}$ 可用 S 系的坐标表示为

$$k^{0'} = \left[g_{ij}(x) \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{ds} \right]_{P_0}. \quad (5.2)$$

在 S 系中, 测量系统的世界线 C_1 为 $x^0 = \tau$, $x^1 = x^2 = x^3 = 0$, 故有 $\left(\frac{dx^j}{ds} \right)_{P_1} = \sigma(x) \delta_0^j$. 因此光子的能量为

$$k^0 = \left[\frac{1}{\sigma(x)} \frac{dx^0}{du} \right]_{P_0} = \left[\frac{1}{\sigma(x)} \frac{dx^0}{du} \right]_{P_1} = \left[g_{00} \frac{dx^0}{du} \frac{dx^0}{ds} \right]_{P_1} = \left[g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{ds} \right]_{P_1}, \quad (5.3)$$

这同广义相对论中对光子能量的定义一致^[8]. 因此, 内禀频率 ν_0 和接收频率 ν_1 的比为

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{k^{0'}}{k^0} = \frac{\left[g_{ij}(x) \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{ds} \right]_{P_0}}{\left[g_{ij}(x) \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{ds} \right]_{P_1}} = \frac{(ds)_{P_1}}{(ds)_{P_0}} = \frac{\sqrt{(g_{ij} dx^i dx^j)_{P_1}}}{\sqrt{(g_{ij} dx^i dx^j)_{P_0}}}. \quad (5.4)$$

当然, 在这里根本不必顾及广义相对论的定义, 给出上述结果的目的仅在于从旁考察一下根据典型时空中的守恒量来定义光子能量的合理性.

下面给出谱线频移的具体公式:

过 P_0 与 P_1 的光线 C 是直线, 且在 t, x 面内, 故其参数方程为

$$x^0 = c^0 \tau + t_0, \quad x^1 = c^1 \tau + x_0, \quad x^2 = x^3 = 0.$$

此即在方程 (3.9) 式中引进参数 τ , 使得 $\frac{1}{\sigma} \frac{d\tau}{du} = 1$. 要求当 $\tau = 0$ 时, $x^i = (t_0, x_0, 0, 0)$;

$\tau = 1$ 时, $x^i = (t_1, 0, 0, 0)$; 便有

$$c^0 = t_1 - t_0, \quad c^1 = -x_0.$$

于是

$$\left(\frac{dx^0}{du} \right)_{P_1} = \left(\frac{dx^0}{d\tau} \frac{d\tau}{du} \right)_{P_1} = c^0 (1 - \lambda \eta_{pq} x^p x^q)_{P_1} = (t_1 - t_0) (1 - \lambda t_1^2),$$

$$\left(\frac{dx^1}{du} \right)_{P_1} = \left(\frac{dx^1}{d\tau} \frac{d\tau}{du} \right)_{P_1} = c^1 (1 - \lambda \eta_{pq} x^p x^q)_{P_1} = -x_0 (1 - \lambda t_1^2),$$

$$\left(\frac{dx^0}{du} \right)_{P_0} = (t_1 - t_0) [1 - \lambda (t_0^2 - x_0^2)],$$

$$\left(\frac{dx^1}{du} \right)_{P_0} = -x_0 [1 - \lambda (t_0^2 - x_0^2)].$$

由 (3.7) 式可得

$$t_1 - t_0 = x_0 \sqrt{1 - \lambda t_1^2}. \quad (5.5)$$

因此

$$k^0 = \left[\frac{1}{\sigma(x)} \frac{dx^0}{du} \right]_{P_1} = x_0 \sqrt{1 - \lambda t_1^2}. \quad (5.6)$$

另一方面, 在 S 系中, 光源世界线 C_0 的参数方程为

$$x^0 = A^0 \tau + t_0, \quad x^1 = A^1 \tau + x_0, \quad x^2 = A^2 \tau, \quad x^3 = A^3 \tau.$$

利用极坐标中度规的表达式 (2.2a) 可以求出

$$A^0 = \{ (1 + \lambda x_0^2) - 2\lambda x_0 t_0 v_\rho - (1 - \lambda t_0^2) v_\rho^2 - x_0^2 [1 - \lambda(t_0^2 - x_0^2)] (v_\theta^2 + \sin^2 \theta v_\phi^2) \}^{-1/2}, \quad (5.7)$$

其中

$$v_\rho = \left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{P_0}, \quad v_\theta = \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{P_0}, \quad v_\phi = \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{P_0} \quad (i = x^0),$$

所以

$$k^{0'} = \left(g_{ii} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^i}{dS} \right)_{P_0} = \frac{x_0 (\sqrt{1 - \lambda t_1^2} + \lambda x_0 t_1) (1 + \sqrt{1 - \lambda t_1^2} v_\rho)}{\{ 1 + \lambda x_0^2 - 2\lambda x_0 t_0 v_\rho - (1 - \lambda t_0^2) v_\rho^2 - x_0^2 [1 - \lambda(t_0^2 - x_0^2)] (v_\theta^2 + \sin^2 \theta v_\phi^2) \}^{1/2}}. \quad (5.8)$$

将 (5.5)–(5.8) 式代入 (5.4) 式, 整理得

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{(\sqrt{1 - \lambda t_1^2} + \lambda x_0 t_1) (1 + v_\rho \sqrt{1 - \lambda t_1^2})}{\sqrt{1 - \lambda t_1^2} \cdot \sqrt{1 + \lambda x_0^2 - 2\lambda x_0 (t_1 - x_0 \sqrt{1 - \lambda t_1^2}) v_\rho - [(\sqrt{1 - \lambda t_1^2} + \lambda x_0 t_1)^2 - \lambda x_0^2] v_\rho^2 - x_0^2 (\sqrt{1 - \lambda t_1^2} + \lambda x_0 t_1)^2 (v_\theta^2 + \sin^2 \theta v_\phi^2)}}. \quad (5.9)$$

在实际测量时, 用以同遥远光源比较的光谱是在测量时刻 t_1 对测量系统近旁的光源拍摄的. 按照相对性原理, 只有当 $t_1 = 0$ 时, 比较光谱的频率才等于内禀频率 ν_0 . 因此, 实际测量到的频移应为

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{1 + v_\rho}{\{ 1 + \lambda x_0^2 + 2\lambda x_0^2 v_\rho - (1 - \lambda x_0^2) v_\rho^2 - x_0^2 (v_\theta^2 + \sin^2 \theta v_\phi^2) \}^{1/2}}. \quad (5.10)$$

如果光源相对于测量系统静止, 则

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda x_0^2}}. \quad (5.11)$$

这是由于常数 λ 引起的距离效应, 光子的固有频率和内禀频率一般并不相同. 当 $\lambda > 0$ 时, 此效应表现为蓝移; 当 $\lambda < 0$ 时, 则为红移.

特别当 $\lambda = 0$ 时, (5.10) 式化为通常狭义相对论中的多普勒频移公式:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}}{\sqrt{1 - v^2}},$$

其中, $\mathbf{e}$ 为 S 系中光线传播方向的单位矢量, $\mathbf{v}$ 为光源相对于测量系统的速度矢量.

六、

我们在第一节中曾指出, 宇观时空的非欧特征有可能通过宇观大尺度上的运动效应表现出来. 宇观红移现象很可能就是这种效应之一. 这里, 我们通过类星体红移的分析来考查用典型时空描述宇观现象是否合理.

考虑仅仅由常数 λ 引起的距离效应, 此时, 红移量 Z 仅由 (5.11) 式决定.

$$Z = \frac{v_0}{v_1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \rho^2}} - 1, \quad (6.1)$$

其中 ρ 是径向距离。当 $|\lambda| \rho^2 \ll 1$ 时, 上式化为

$$Z \approx \frac{1}{2} |\lambda| \rho^2, \quad (6.2)$$

即在不太大的空间范围内, 红移同距离平方成正比。

考查红移计数关系, 假定类星体的空间分布是均匀的, 则红移量小于某一 Z 值的类星体数目 N 为

$$N(<Z) = n_0 \frac{4\pi}{3} \rho^3,$$

其中 $\frac{4\pi}{3} \rho^3$ 是半径为 ρ 的光球的坐标体积, n_0 是单位体积内类星体的数目, 利用 (6.1) 式可得

$$N(<Z) = \frac{4\pi}{3} n_0 |\lambda|^{-3/2} [Z(Z+2)]^{3/2} (Z+1)^{-3}, \quad (6.3)$$

取相对值有

$$\frac{N(<Z)}{N(<Z_0)} = \frac{(Z_0+1)^3}{(Z+1)^3} \frac{[Z(Z+2)]^{3/2}}{[Z_0(Z_0+2)]^{3/2}}, \quad (6.4)$$

此式描述仅由 λ 引起的距离红移的 N - Z 关系。

以红移范围 $0 < Z < 2$ 的类星体为例, 在 N - Z 图上画出由 (6.4) 式决定的曲线, 结

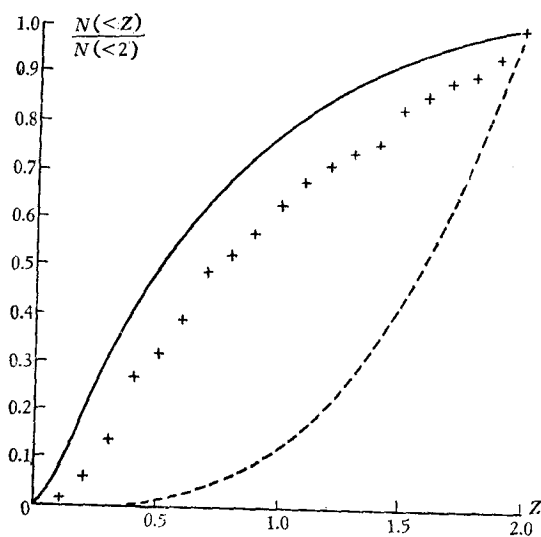


图3 红移 $0 < Z < 2$ 的类星体的 N - Z 关系
“+”是按 Deveny 等人^[9]所给类星体表中的
资料点出的(共取 174 个样品);实线代表 (6.4) 式
预期的结果;虚线代表 Hubble 理论的结果

星等关系是

$$m = M + 5 \log_{10} \rho, \quad (6.5)$$

果表明距离红移的理论曲线和观测资料在定性特征上较为一致(见图3)。

为了对比起见, 图中画出了在均匀分布假定下的 Hubble 理论曲线。显然, Hubble 曲线与观测资料在定性特征上都完全不符。

本世纪二十年代发现河外星系谱线的红移现象后, Hubble 整理了当时为数不多的观测资料, 提出这种红移同距离成正比的经验规律。随后有人把这种红移解释为多普勒效应, 认为是对所谓宇宙膨胀模型提供了观测上的支持。虽然这种看法至今仍很盛行, 但从各方面对它的批评也始终没有停止过。

首先是观测方面对 Hubble 的经验规律一直有争论。一个天体的距离

m 为天体的视星等, M 为绝对星等, ρ 为距离(以 10 秒差距为单位). 由于遥远天体的距离难于直接测量, 故 M 亦不得而知, 通常是假定某一类型的天体具有相同的绝对星等. 例如 Sandage^[10] 假定星系团中最亮的椭圆星系绝对星等相同, 再设红移 Z 和距离 ρ 的关系为

$$cZ = H\rho^n, \quad (6.6)$$

其中 H 为 Hubble 常数, 代入 (6.5) 式得

$$m = \frac{5}{n} \log_{10} Z + \text{常数}, \quad (6.7)$$

与观测资料比较, Sandage 得到 $n \sim 1$, 但有人认为他假定的标准不可靠, 不足为信. 而 Hawkins^[11] 根据 Humason 等人发表的 430 个亮于 14^m 的星系资料, 分析得到 $n \simeq 2$, 即红移-距离关系接近平方律. 最近 de Vaucouleurs^[12] 对 100 多个距离小于 5 千万秒差距的近星系群资料作统计分析, 也得到支持平方律的结果.

理论方面, 有人对线性律作非多普勒效应解释, 也有人从各种不同前提出发导出平方律. 例如 Hawkins^[13] 的带负压项的均匀球对称静态模型, Wertz^[14,12] 的大爆炸阶层模型等等.

自六十年代发现类星体以来, 它的巨大红移引起了广泛注意. 由于局域假说遇到很多困难, 不少人认为这种红移至少有相当大部分来源于大尺度的宇观效应. 因为类星体的绝对星等相差悬殊, 按 $m-Z$ 关系来处理观测资料弥散很大, 而研究红移计数却可以绕开这个困难. 但是 Hubble 规律同实验却完全不符. 为了弥补 Hubble 理论同观测的这一严重偏离, 有人假定类星体的空间密度 n 与红移 Z 有关, 即

$$n(Z) = n_0(1 + Z)^m,$$

为了符合观测结果, 必须有 $5 < m < 6$ ^[15], 但是为什么要这样取, 并没有充分的理由.

这里, 我们仅从典型时空中的距离红移出发, 不但导出了红移 Z 与距离 ρ 的平方律, 而且定性地解释了类星体红移的 $N-Z$ 关系. 固然后者与观测结果还有百分之十左右的系统偏离, 但这有可能通过考虑其他物理因素加以补偿. 故, 用 $\lambda < 0$ 的典型时空来描述宇观范围的现象, 与其他模型相比可能是较为合理的.

应该指出, 这里没有考虑物质分布和运动状态对时空性质的影响, 即没有考虑引力. 由于存在着 $\lambda < 0$, $\lambda > 0$ 以及 $\lambda = 0$ 三种可能的运动学, 每一种运动学都有相应的惯性系和惯性定律, 因此即使从引力和惯性力等效的观点来看, 相应于不同惯性系就应有不同的等效概念. 广义相对论的等效原理仅仅是在洛仑兹惯性意义上的等效. 如果 $\lambda < 0$ 的典型时空是较合理的宇观时空模型的话, 那就应当建立在 $\lambda < 0$ 的典型时空惯性系意义上等效的引力理论.

毛主席指出: **在生产斗争和科学实验范围内, 人类总是不断发展的, 自然界也总是不断发展的, 永远不会停止在一个水平上. 因此, 人类总得不断地总结经验, 有所发现, 有所发明, 有所创造, 有所前进.** 物理学和天文学的发展正是这样. 任何一个正确的理论都只是对物质世界在一定条件下的近似模写, 人们总会在更大范围或更深层次内发现一些新现象和新规律, 把现有理论的局限性揭示出来. 典型时空模型也仅仅是在相对性原理和局部光速不变原理成立的条件下, 对宇观范围内时空特征的近似模写, 是否正确还有待

进一步经受实践的检验. 同时, 常数 λ 也应有某种物质背景, 这都有待进一步的研究去解决.

附 录

这里扼要地介绍一下本文有关的典型域的方法.

在研究复的典型域上的调和函数论^[1]时, 曾经发现这个方法也可以应用到实的典型域, 例如实典型域 $\mathfrak{S}(m, n)$:

$$I - XX' > 0,$$

其中 I 是 $m \times m$ 么方阵, X 是 $m \times n$ 实矩阵, X' 表矩阵 X 的置换. 一实对称方阵 $A > 0$ 表 A 是正定的. 这域在 $SO(m, n)$ 群下是齐性的, 物理上称为均匀的. 此外, 可以在 $\mathfrak{S}(m, n)$ 内定义一不变的的正定的黎曼度量. 但是, 理论物理中所用的度量是非正定的, 然而只需略为改变一下, 典型域的方法便可以应用到物理上了.

现在定义域 $\mathcal{D}_\lambda(m, n)$ 为

$$I - \lambda X J X' > 0,$$

其中 $J = \text{diag}[1, -1, -1, \dots, -1]$ 是 n 阶对角方阵, 对角线上元素为 $1, -1, -1, \dots, -1$, λ 为实常数. 命 A, B, C, D 分别为 $m \times m, n \times m, m \times n, n \times n$ 矩阵, 适合

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\lambda J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -\lambda J \end{pmatrix},$$

此即要求

$$AA' - \lambda CJC' = I, \quad AB' = \lambda CJD', \quad BB' - \lambda DJD' = -\lambda J. \quad (1)$$

由典型域熟知的方法知, 条件(1)式等价于

$$\lambda A'A - B'JB = \lambda I, \quad \lambda A'C = B'JD, \quad \lambda C'C - D'JD = -J. \quad (1a)$$

而变换

$$Y = (A + XB)^{-1}(C + XD) \quad (2)$$

把 $\mathcal{D}_\lambda(m, n)$ 一一地映为自己; 此外, $\mathcal{D}_\lambda(m, n)$ 中存在度量

$$ds^2 = \text{tr}[(I - \lambda X J X')^{-1} dX (J - \lambda X' X)^{-1} dX']. \quad (3)$$

它在变换(2)式下是不变的, 这个度量就是非正定的了, 它的号差(signature)是 m 个正号, $m \times (n-1)$ 个负号, 若命 $X_0 = -CD^{-1}$, 则由(1a)式易见 $X_0 \in \mathcal{D}_\lambda(m, n)$, 并且变换(2)式能写为

$$Y = A^{-1}(I - \lambda X J X'_0)^{-1}(X - X_0)D, \quad (2a)$$

其中 A, D 适合

$$AA' = (I - \lambda X_0 J X'_0)^{-1}, \quad DJD' = (J - \lambda X'_0 X)^{-1}. \quad (1b)$$

变换(2a)式说 $\mathcal{D}_\lambda(m, n)$ 的任一点 X_0 可以映为 $Y = 0$, 即 $\mathcal{D}_\lambda(m, n)$ 在变换(2)式所形成的群下是齐性的. $\mathcal{D}_\lambda(m, n)$ 的维数是 mn , 运动群(2)式的参数数目是

$$\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1).$$

物理的时空是四维, 所以要求 $mn = 4$, 不妨假定 $m \leq n$, 于是有两种可能, 即 $m = n$

$= 2$ 与 $m = 1, n = 4$. 此外, 物理要求度量的号差为 $[1, -1, -1, -1]$, 因此只有 $m = 1, n = 4$. 此时 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 的运动群参数的数目是 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$, 这是最大的参数数目, 因之必然是常曲率的.

在 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 中 $X = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, 因此 $\mathcal{D}_\lambda(1, 4)$ 即

$$1 - \lambda \eta_{ij} x^i x^j > 0,$$

其中 $\eta_{ij} (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 是方阵 J 的矩阵元. 此时度量 (3) 式化为

$$ds^2 = \frac{dX(J - \lambda X'X)^{-1}dX'}{1 - \lambda XJX'} = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (4)$$

其中

$$g_{ik} = \frac{\eta_{ik}}{1 - \lambda \eta_{pq} x^p x^q} + \frac{\lambda \eta_{ir} \eta_{ks} x^r x^s}{(1 - \lambda \eta_{pq} x^p x^q)^2}; \quad (5)$$

而变换 (2a) 式化为

$$y^i = \sqrt{1 - \lambda \eta_{pq} a^p a^q} \frac{(x^i - a^i) D_j^i}{1 - \lambda \eta_{rs} a^r a^s}, \quad (6)$$

其中我们命 $X_0 = (a^0, a^1, a^2, a^3)$, 而 D_j^i 是常数, 它适合

$$\eta_{pq} D_i^p D_j^q = \eta_{ij} + \frac{\lambda \eta_{ir} \eta_{js} a^r a^s}{1 - \lambda \eta_{pq} a^p a^q}. \quad (7)$$

参 考 文 献

- [1] 华罗庚, 陆启铿, *Scientia Sinica*, **8** (1959), 1031.
- [2] 朗道, 栗弗西兹, 场论, 高等教育出版社 (1959), 1.
- [3] 柏格曼, 相对论引论, 人民教育出版社 (1961), 3; 10.
- [4] C. Møller, *Theory of Relativity* (1955).
- [5] F. Gürsey and T. D. Lee, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **49** (1963), 179.
- [6] F. Gürsey, In «Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics» (1964), 365.
- [7] S. L. Adler, *Phys. Rev.*, **D6** (1972), 3445.
- [8] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (1960), 324.
- [9] J. B. Deveny, *P. A. S. P.*, **83** (1971), 611.
- [10] A. Sandage, *Q. J. Astro. Soc.*, **13** (1972), 282.
- [11] G. S. Hawkins, *Nature*, **194** (1962), 563.
- [12] G. De Vaucouleurs, In «External Galaxies and QSO» (1972), 353.
- [13] G. S. Hawkins, *Nuovo Cimento*, **23** (1962), 227.
- [14] J. R. Wertz, *Ap. J.*, **164** (1970), 227.
- [15] M. J. Rees, In «External Galaxies and QSO» (1972), 407.

THE KINEMATIC EFFECT IN THE CLASSICAL DOMAINS AND THE RED SHIFT PHENOMENA OF EXTRAGALACTIC OBJECTS

K. H. LOOK C. L. TSOU H. Y. KUO

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

Starting from the principle of relativity and the local constancy of the light velocity, in this paper we establish a space-time model with the classical domain $\mathcal{D}_1(1, 4)$. We discuss the kinematic effect in it and calculate the frequency shift of the spectral line, and also under the assumption of uniform distribution we compare our result with the observational data of the quasar N - Z relation. Our result shows that the large red shift in the extragalactic objects perhaps is not caused mainly by the Doppler effect, but to a large extent is a distance effect in the $\lambda < 0$ of the classical domain. Thus the classical domain $\mathcal{D}_{\lambda < 0}(1, 4)$ [its group of motion being $SO(3, 2)$] is possibly a better model for large-scale space-time.