

区域熔化点掺杂的数学分析*

杨 雄 凤

提 要

本文对区域熔化点掺杂过程进行了详细的数学分析,得到了点掺杂区熔后杂质沿锭长分布的一系列普遍公式。在本文研究的范围内,利用这些公式,不难写出任意次区熔后锭条上的杂质分布,而不受区熔次数和掺杂点数目之限制。

作为一个特例,具体计算了 $k = 0.35$, 四点掺杂,三次区熔后杂质沿锭长的分布情况。得到:当各掺杂点之位置与掺杂量选取适当时,在总锭长为 21.5 个熔区长度的料锭中,其 16 个熔区长度范围内的杂质浓度相对起伏可小于 $\pm 3.0\%$ 。

一、引 言

区域致匀法已广泛地用来制备掺杂的晶体^[1],但简单的区域致匀法只对分凝系数 $k \ll 1$ 的杂质才能得到满意的结果。随着 k 值的增加,区熔一次后杂质在料锭中沿锭长的浓度梯度越来越大,以致达不到匀平的目的。

Braun 等人^[2]曾提出一个适用于 $k = 0-0.6$ 杂质的区域匀平新方法。但该法需要往返区熔,在某些情况下,例如在某些材料的垂直无坩埚区熔中,实际操作起来可能会出现很大困难。

Tanenbaum^[3]曾提到在垂直无坩埚区熔过程中,可以用点掺杂的办法制备掺杂的半导体棒。但他只是原则上提了一下,未见报导具体的计算与分析。

本文对区熔点掺杂过程进行了详细的数学分析,得到了点掺杂区熔后杂质沿锭长分布的一系列普遍公式。在本文研究的范围内,利用这些公式不难写出任意次区熔后锭条上的杂质分布(除尾部杂质倒流区外),而不受区熔次数和掺杂点数目之限制^[1]。

二、数 学 分 析

如图 1 所示,在第一次区熔开始之前,在一直径均匀的纯锭料上沿其轴向预先安置好 i 个点杂质源。各掺杂点之位置与掺杂量如图所示(其中第一掺杂点之位置只要在第一

* 1973 年 2 月 12 日收到。

1) 实际上,当区熔次数很多,而各掺杂点相互距离又较近,以致 $(\alpha_1 - n) < 1$, 或甚至 $(\alpha_2 - n), (\alpha_3 - n), (\alpha_4 - n), \dots, (\alpha_i - n)$ 都小于 1 时,杂质分布形式要复杂一些。但本文有兴趣的是得到较为均匀的杂质分布,故在选取各掺杂点位置 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ 和区熔次数 n 时,一般都要保证 $(\alpha_1 - n) > 1$ 。本文只讨论 $(\alpha_1 - n) > 1$ 的情形。此外,锭条尾部杂质倒流区内的杂质分布也有所不同,但在本文所研究的问题中,杂质倒流区的长度一般都比总锭长小得多,因此,本文将不讨论尾部倒流区内的杂质分布。

熔区之内即可), 然后以 $\frac{x}{l} = 0$ 为熔区下界面起点进行任意次区熔. 并设第一次区熔时, 熔区上界面一经到达掺杂点位置, 全部欲掺入的杂质就均匀地混入熔区. 显然, 可以将整个锭条分成 i 个小段进行分析, 并把 n 次区熔后第 i 段, 即 $(\alpha_i - n) < \frac{x}{l} < (\alpha_{i+1} - n)$ 范围内的杂质浓度记为 $C_i^n\left(\frac{x}{l}\right)$. 于是, 在第一次区熔过程中, 当 $(\alpha_{i-1} - 1) < \frac{x}{l} < (\alpha_i - 1)$ 时, 就有

$$\frac{d}{dx} \frac{C_i^{i-1}\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} + \frac{k}{l} \frac{C_i^{i-1}\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \frac{k}{l} \frac{C_0^{i-1}\left(\frac{x}{l} + 1\right)}{C_0^1} = 0,$$

所以, 一次区熔后第 $(i-1)$ 段的杂质分布为

$$\frac{C_i^{i-1}\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = R_i^{i-1,0} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right),$$

其中 $R_i^{i-1,0}$ 是一常数, l 为熔区长度.

当熔区下界面移到 $\frac{x}{l} = (\alpha_i - 1)$ 时, 第 i 个掺杂点的杂质全部进入熔区. 所以, 此

时熔区中的杂质总量突变为

$$\frac{l}{k} C_i^{i-1}(\alpha_i - 1) + \beta_i C_0^1 l,$$

因此, 在第 i 段, 即在 $(\alpha_i - 1) < \frac{x}{l} < (\alpha_{i+1} - 1)$, 有

$$\frac{C_i^i\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = [R_i^{i-1,0} + k e^{k(\alpha_i-1)} \beta_i] \exp\left(-k \frac{x}{l}\right).$$

若

$$\frac{C_i^i\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = R_i^{i,0} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right), \quad (1)$$

则

$$R_i^{1,0} = k \quad (i=1), \quad (2)$$

$$R_i^{i,0} = R_i^{i-1,0} + k e^{k(\alpha_i-1)} \beta_i \quad (i \geq 2). \quad (3)$$

根据 (1), (2) 和 (3) 式, 即可写出第一次区熔后杂质在料锭各小段的分布.

以下讨论 $n \geq 2$ 的情形. 可以证明, 第 $(n-1)$ 次区熔后, 第一段 (即 $i=1$, 亦即 $0 < \frac{x}{l} < [\alpha_2 - (n-1)]$) 的杂质分布可写成如下形式:

$$\frac{C_{n-1}^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \sum_{m=0}^{n-2} R_{n-1}^{1,m} \left(\frac{x}{l}\right)^m \exp\left(-k \frac{x}{l}\right).$$

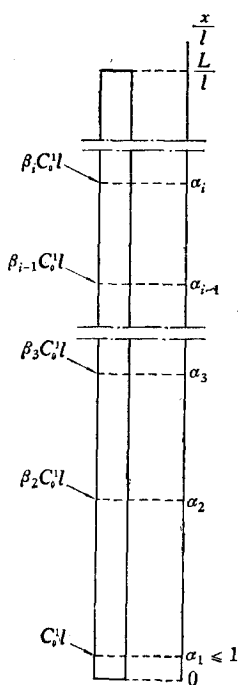


图1 区熔开始前锭条上各掺杂点之位置与掺杂量

因此,第 n 次区熔时,在 $0 < \frac{x}{l} < (\alpha_2 - n)$, 有

$$\frac{d}{dx} \frac{C_n^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} + \frac{k}{l} \frac{C_n^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \frac{k}{l} \frac{C_{n-1}^1\left(\frac{x}{l} + 1\right)}{C_0^1},$$

而第 n 次区熔后,有

$$\begin{aligned} \frac{C_n^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} &= \left\{ \frac{k}{l} \frac{C_{n-1}^1\left(\frac{x}{l} + 1\right)}{C_0^1} \exp\left(k \frac{x}{l}\right) dx + C \right\} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right) \\ &= \left\{ k e^{-k} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{R_{n-1}^{1,m}}{m+1} \left(\frac{x}{l} + 1\right)^{m+1} + C \right\} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right). \end{aligned} \quad (4')$$

由边界条件

$$\frac{C_n^1(0)}{C_0^1} = k \int_0^1 \frac{C_{n-1}^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} d\left(\frac{x}{l}\right)$$

得到

$$C = \sum_{m=0}^{n-2} R_{n-1}^{1,m} \left[\frac{m!}{k^m} - \sum_{s=1}^{m+1} \frac{m! e^{-k}}{k^{s-1}(m+1-s)!} \right] - k e^{-k} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{R_{n-1}^{1,m}}{m+1}.$$

将 C 代入 (4'), 作二项式展开再合并 $\left(\frac{x}{l}\right)$ 的同次项, 则得到

$$\begin{aligned} \frac{C_n^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} &= \left\{ \sum_{m=0}^{n-2} R_{n-1}^{1,m} \left[\frac{m!}{k^m} - \sum_{s=1}^{m+1} \frac{m! e^{-k}}{k^{s-1}(m+1-s)!} \right] \right. \\ &\quad \left. + k e^{-k} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{s=m-1}^{n-2} \frac{s!}{m!(s-m+1)!} R_{n-1}^{1,s} \left(\frac{x}{l}\right)^m \right\} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right). \end{aligned}$$

若

$$\frac{C_n^1\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \sum_{m=0}^{n-1} R_n^{1,m} \left(\frac{x}{l}\right)^m \exp\left(-k \frac{x}{l}\right), \quad (4)$$

则

$$R_n^{1,0} = \sum_{m=0}^{n-2} R_{n-1}^{1,m} \left[\frac{m!}{k^m} - \sum_{s=1}^{m+1} \frac{m! e^{-k}}{k^{s-1}(m+1-s)!} \right] \quad (m=0), \quad (5)$$

$$R_n^{1,m} = k e^{-k} \sum_{s=m-1}^{n-2} \frac{s!}{m!(s-m+1)!} R_{n-1}^{1,s} \quad (m \geq 1). \quad (6)$$

这样,由 $(n-1)$ 次区熔后第一段的分布,利用 (4), (5) 和 (6) 式,可立即写出 n 次区熔后第一段的杂质分布.

对于 $i \geq 2$ 的各段,可以较第一段更方便地推出杂质分布. 此时, $(n-1)$ 次区熔后,第 i 段的杂质分布可写成为

$(\alpha_i - \{n-1\}) < \frac{x}{l} < (\alpha_{i+1} - \{n-1\})$ 时,

$$\frac{C_{n-1}^i\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \sum_{m=0}^{n-2} R_{n-1}^{i,m} \left[\frac{x}{l} - (\alpha_i - \{n-1\}) \right]^m \exp\left(-k \frac{x}{l}\right).$$

于是,第 n 次区熔后,有

$(\alpha_i - n) < \frac{x}{l} < (\alpha_{i+1} - n)$ 时,

$$\frac{C_n^i\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \left\{ k e^{-k} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{R_{n-1}^{i,m}}{m+1} \left[\frac{x}{l} - (\alpha_i - n) \right]^{m+1} + C \right\} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right).$$

对于 $n \geq 2$ 的情形,相邻两段的杂质分布在交界处须连续. 所以,边界条件为

$$\frac{C_n^i(\alpha_i - n)}{C_0^1} = \frac{C_{n-1}^{i-1}(\alpha_i - n)}{C_0^1}.$$

由此

$$C = \sum_{m=0}^{n-1} R_n^{1,m} (\alpha_2 - n)^m \quad (i=2 \text{ 时}),$$

$$C = \sum_{m=0}^{n-1} R_n^{i-1,m} (\alpha_i - \alpha_{i-1})^m \quad (i \geq 3 \text{ 时}),$$

因而

$$\frac{C_n^i\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \left\{ C + k e^{-k} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{R_{n-1}^{i,m-1}}{m} \left[\frac{x}{l} - (\alpha_i - n) \right]^m \right\} \exp\left(-k \frac{x}{l}\right).$$

若

$$\frac{C_n^i\left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = \sum_{m=0}^{n-1} R_n^{i,m} \left[\frac{x}{l} - (\alpha_i - n) \right]^m \exp\left(-k \frac{x}{l}\right), \quad (7)$$

则

$$R_n^{2,0} = \sum_{m=0}^{n-1} R_n^{1,m} (\alpha_2 - n)^m \quad (m=0, i=2 \text{ 时}), \quad (8)$$

$$R_n^{i,0} = \sum_{m=0}^{n-1} R_n^{i-1,m} (\alpha_i - \alpha_{i-1})^m \quad (m=0, i \geq 3 \text{ 时}), \quad (9)$$

$$R_n^{i,m} = \frac{k e^{-k}}{m} R_{n-1}^{i,m-1} \quad (m \geq 1, i \geq 2 \text{ 时}). \quad (10)$$

根据(7),(8),(9)和(10)式,不难从 $(n-1)$ 次区熔后第 i 段 ($i \geq 2$) 的分布写出第 n 次区熔后第 i 段的表示式.

这样,在本文所研究的范围 $(\alpha_2 - n) > 1$ 之内,利用(1)–(10)式,不难写出任意次区熔后锭条上(除尾部杂质倒流区外)的杂质浓度分布(由 i 个小段构成),而不受区熔次数和掺杂点数目之限制.

三、举 例

1. 一点掺杂

若只在第一熔区进行一点掺杂, 掺入的杂质质量为 $C_0 l$, 则在 $k = 0.35$ 和 $k = 0.80$ 两种特殊情况下, 不同次数区熔后的杂质浓度分布分别如图 2 和图 3 所示.

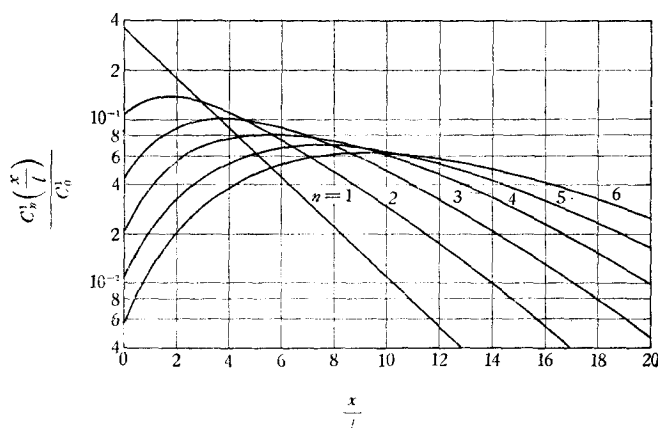


图 2 $k = 0.35$, 一点掺杂, 不同次数区熔后的杂质浓度分布

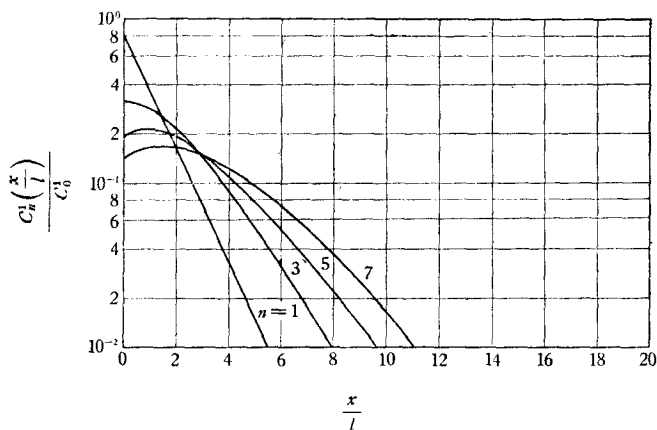


图 3 $k = 0.80$, 一点掺杂, 不同次数区熔后的杂质浓度分布

由图 2 和图 3 可以看到, 经过一定次数区熔后, 杂质分布曲线中都出现较为平坦的一段. 例如, $k = 0.35$ 时, 三次区熔后, $2.5 < \frac{x}{l} < 5.0$ 范围内的杂质分布较为均匀. 又如, $k = 0.80$ 时, 七次区熔后, $0.5 < \frac{x}{l} < 2.5$ 范围内的杂质分布也较为均匀. 此外还可看到, 随着分凝系数 k 的增大, 平坦部分变短, 而出现平坦部分所需的区熔次数增多.

正是由于杂质分布曲线中可以出现较为平坦的一段, 才使得有可能在料锭上进行多点掺杂, 从而在很长的锭长内获得较为均匀的杂质分布.

作为一个特例, 以下只讨论 $k = 0.35$ 的情况. 显然, k 取其它数值时的情况也可用

同样的办法进行讨论.

2. 两点掺杂

当在 $\frac{x}{l} = \alpha_1 \leq 1.0$ 和 $\frac{x}{l} = \alpha_2$ 处进行两点掺杂, 两点掺入的杂质质量都为 $C_0 l$ 时, 对于 $k = 0.35$ 情形, 不同次数区熔后杂质沿锭长的分布如图 4 中曲线 $a-f$ 所示.

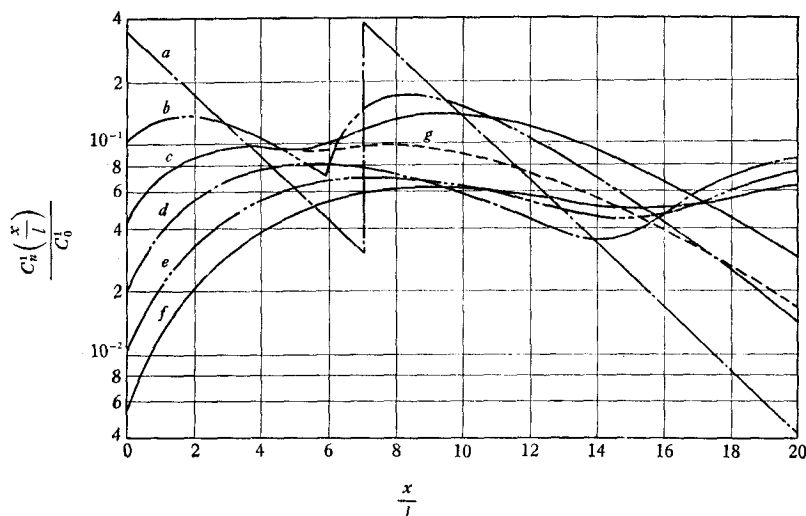


图 4 $k = 0.35$, 两点掺杂, 不同次数区熔后的杂质浓度分布

a 表示 $\alpha_1 = 8.0, \beta_1 = 1.00$, 一次区熔后; e 表示 $\alpha_2 = 17.0, \beta_2 = 1.00$, 五次区熔后;
 b 表示 $\alpha_1 = 8.0, \beta_1 = 1.00$, 二次区熔后; f 表示 $\alpha_2 = 17.0, \beta_2 = 1.00$, 六次区熔后;
 c 表示 $\alpha_1 = 8.0, \beta_1 = 1.00$, 三次区熔后; g 表示 $\alpha_2 = 8.0, \beta_2 = 0.47$, 三次区熔后
 d 表示 $\alpha_1 = 17.0, \beta_1 = 1.00$, 四次区熔后;

由上述各曲线可以看到, 在两段分布的交界处, 杂质浓度的变化随着区熔次数的增加而越来越平滑. 例如, 一次区熔后, 交界处杂质浓度本身就不连续; 二次区熔后, 交界处杂质浓度已成连续, 但其对锭长的一阶导数不连续; 三次区熔后交界处杂质浓度的变化就平滑了; 而四次以上区熔后的变化更平滑. 考虑到一次区熔及二次区熔后杂质浓度在交界处的连续性不好, 而四次以上区熔后锭条头部很长范围内的浓度又太低, 因此, 对于 $k = 0.35$ 情形, 可采用三次区熔来进行多点掺杂. 以下具体分析三次区熔时多点掺杂的杂质分布.

3. 最佳 β 值

由图 4 曲线 c 可以看到, 当选取 $\alpha_1 \leq 1.0, \alpha_2 = 8.0$, 掺杂量为 $C_0 l, \beta_2 C_0 l = C_0 l$ 时, 三次区熔后杂质沿锭长的分布比只在第一熔区进行一点掺杂 (三次区熔) 时要均匀一些; 但此时第二段的杂质浓度显著地高于第一段, 杂质浓度的起伏仍然很大. 这是由于第二掺杂点的掺杂量过多, 即 β_2 太大所引起的. 显然, 总可以找到某一个 β_2 值, 使得杂质浓度的起伏减为最小.

由图 4 还可看到, 在每一段杂质浓度分布中, 一般都存在一个浓度极大值 (只要 α_i 及 β_i 值不太小. 当 α_i 及 β_i 太小时, 可能不存在浓度极值. 但本文只对前一种情况感兴趣, 因此以下只讨论 α_i 及 β_i 值不太小的情形).

第一段的浓度极值只随区熔次数变化, 当区熔次数 n 固定为 3 时, 此极值为一常数. 只要令

$$\frac{\partial}{\partial \left(\frac{x}{l}\right)} \frac{C_3^1 \left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} = 0$$

就可立即求出. 对于 $k = 0.35$ 情形,

$$\left. \frac{C_3^1 \left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} \right|_{\max} = 9.87 \times 10^{-2}.$$

其余各段杂质分布的浓度极值, 可用完全相同的方法求出. 但由于 $i \geq 2$ 时各段浓度极值表式中都含有 α_i 和 β_i , 所以浓度极值要随 α_i 和 β_i 变化. 当所有的 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{i-1}$, α_i 和 $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{i-2}, \beta_{i-1}$ 都已经取定为某些适当的数值后, 则第 i 段的浓度极值只是 β_i 的函数. 为方便起见, 以下简单地定义:

$$\left. \frac{C_3^i \left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} \right|_{\max} = \left. \frac{C_3^i \left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} \right|_{\max}$$

时的 β_i 为最佳 β_i 值, 记为 β_i^{opt} . 其具体数值可用图解方法求得.

例如, 对于 $k = 0.35$ 情形, 当取定

$$\alpha_1 \leq 1.0, \quad \alpha_2 = 8.0$$

后, $\left. \frac{C_3^2 \left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} \right|_{\max} \sim \beta_2$ 之关系如图 5 曲线 b 所示. 由图得到

$$\beta_2^{\text{opt}} = 0.47.$$

当两个掺杂点的位置分别为 $\alpha_1 \leq 1.0$, $\alpha_2 = 8.0$; 掺杂量分别为 $C_0^1 l$, $0.47 C_0^1 l$ 时, 三次

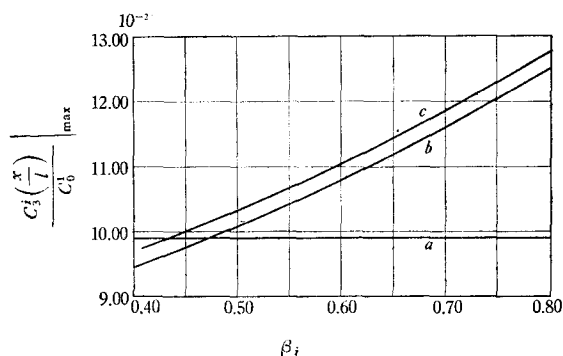


图 5 $k = 0.35$, 三次区熔后, 各段浓度最大值 $\left. \frac{C_3^i \left(\frac{x}{l}\right)}{C_0^1} \right|_{\max}$ 与 β_i 之关系

a 表示 $i = 1$; b 表示 $i = 2, \alpha_2 = 8.0$;

c 表示 $\begin{cases} i = 3, \alpha_2 = 8.0, \beta_2 = 0.47, \alpha_3 = 12.5; \\ i = 4, \alpha_2 = 8.0, \beta_2 = 0.47, \\ \alpha_3 = 12.5, \beta_3 = 0.43, \\ \alpha_4 = 17.0 \end{cases}$

区熔后杂质浓度的分布如图 4 曲线 g 所示。可以看到, 此时杂质浓度分布的均匀性比 $\beta_2 = 1.00$ 时(图 4 曲线 c) 大有改善。

4. 多点掺杂

当取定 $\alpha_1 \leq 1.0$, $\alpha_2 = 8.0$, $\alpha_3 = 12.5$; $\beta_2 = 0.47$ 后, $\frac{C_3^3(\frac{x}{l})}{C_0^1} \Big|_{\max} \sim \beta_3$ 的关系如图 5 曲线 c 所示。由图得到

$$\beta_3^{\text{opt.}} = 0.43.$$

进一步, 当取定 $\alpha_1 \leq 1.0$, $\alpha_2 = 8.0$, $\alpha_3 = 12.5$, $\alpha_4 = 17.0$; $\beta_2 = 0.47$, $\beta_3 = 0.43$ 后, $\frac{C_3^4(\frac{x}{l})}{C_0^1} \Big|_{\max} \sim \beta_4$ 的关系仍如图 5 曲线 c 所示。由图得到

$$\beta_4^{\text{opt.}} = 0.43.$$

照此方法, 可以求出给定情况下所有 $\beta_i^{\text{opt.}}$ 的具体数值。

若在第一次区熔开始之前, 取定四个掺杂点的参数为 $\alpha_1 \leq 1.0$, $\alpha_2 = 8.0$, $\alpha_3 = 12.5$, $\alpha_4 = 17.0$; $\beta_2 = 0.47$, $\beta_3 = 0.43$, $\beta_4 = 0.43$, 则三次区熔后, 锭条中的杂质浓度分布如图 6 曲线 a 所示。

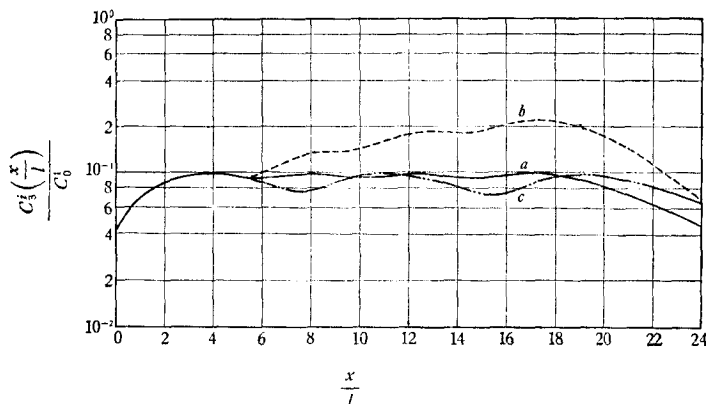


图 6 $k = 0.35$, 多点掺杂, 三次区熔后的杂质浓度分布
 a 表示 $\alpha_2 = 8.0$, $\beta_2 = 0.47$; $\alpha_3 = 12.5$, $\beta_3 = 0.43$; $\alpha_4 = 17.0$, $\beta_4 = 0.43$;
 b 表示 $\alpha_2 = 8.0$, $\alpha_3 = 12.5$, $\alpha_4 = 17.0$; $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.00$;
 c 表示 $\alpha_2 = 10.0$, $\beta_2 = 0.71$; $\alpha_3 = 18.0$, $\beta_3 = 0.73$

由图 6 可以看到, 若总锭长为 21.5 个熔区长度, 采用上述取定值进行四点掺杂, 则三次区熔后, 至少在 $2.5 < \frac{x}{l} < 18.5$, 即 16 个熔区长度范围内, 可以得到相当均匀的杂质浓度分布。此时

$$\frac{C_3^i(\frac{x}{l})}{C_0^1} \Big|_{\max} \leq 9.87 \times 10^{-2}, \quad \frac{C_3^i(\frac{x}{l})}{C_0^1} \Big|_{\min} \geq 9.30 \times 10^{-2},$$

所以, 浓度相对起伏 $\approx \pm 2.9\%$ 。

只要进一步增加掺杂点的数目, 浓度均匀部分就可以继续加长。分析的方法完全相

同,不再赘述。

图 6 中,还绘出了 $\alpha_1 \leq 1.0$, $\alpha_2 = 8.0$, $\alpha_3 = 12.5$, $\alpha_4 = 17.0$; $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.00$ 时,三次区熔后杂质浓度的分布(即曲线 b)。其均匀性大为变坏。可见,当选定了 α_i 后, β_i 之选取对浓度均匀性有很大影响。当然,本文所定义的最佳 β_i 值,并不一定是浓度起伏最小时的 β_i ,因为我们只考虑了浓度的最大值,而没有同时考虑浓度的最小值。然而这种考虑消除了分析中的很多麻烦,而实际上也完全没有必要去考虑严格的数学上的最佳 β_i 值。

如果所容许的浓度起伏可以大一些,则在掺杂点数目较少的情况下就可满足要求。图 6 曲线 c 示出了一个三点掺杂,三次区熔的结果。此时,若总锭长为 25 个熔区长度,则在 22 个熔区长度范围内,浓度的相对起伏 $\approx \pm 14.1\%$ 。

可见,牺牲均匀性,导致掺杂点数目的减少和均匀部分长度的增加。

四、结 论

从本文所举例子可以看到,对于 $k = 0.35$ 的情形,采用点掺杂法可以得到相当均匀的杂质分布。实际上,对于其它的很多 k 值,利用此法同样能得到满意的结果,只是 n , α_i , β_i 的具体数值不同而已。这些数值的选取方法与 $k = 0.35$ 情况下完全相同。

采用点掺杂法虽然能得到相当均匀的杂质分布,但在理论上得不到绝对均匀的杂质分布,这是点掺杂法的一个缺点。

参 考 文 献

- [1] W. G. Pfann, Zone Melting (1958), Chap. 7.
- [2] I. Braun, E. Y. Wang, *Solid State Electronics*, 3(1961), 79.
- [3] M. Tanenbaum, *Semiconductors*, edited by N. B. Hannay (1959), 123.

MATHEMATICAL ANALYSIS FOR POINT-DOPING IN ZONE MELTING

YANG HSIUNG-FENG

ABSTRACT

The mathematical analysis for point-doping in zone melting has been given in detail. A series of general formulae of impurity concentration distribution along the ingot after point-doping zone melting has been derived. In this paper, within the range of our investigation, it is not at difficult, by means of these formulae, to obtain the impurity concentration distribution in an ingot after any number of passages of zone melting, without being restricted by the number of passages of zone melting and the number of doping points.

As an example, the impurity concentration distribution after three passages of zone melting for the case of $k = 0.35$ and four doping points is specifically calculated. It is shown that, if the position and doping amount of each doping point are suitable, for an ingot of 21.5 melting zone lengths, the relative fluctuation of impurity concentration in 16 lengths may be less than $\pm 3.0\%$.