

一种新的可能的复合场的量子场论*

何祚庥 黄 涛

(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文引进了双粒子的双重定域场算符和 Bethe-Salpeter 的算子方程来描述复合场的运动和变化,进一步扩展了 H-N-Z 的束缚态场论。

一、引 言

量子场论一直是以点粒子的图象作为物理基础的。许多修改这一图象的尝试,如各种各样非定域场论常常导致理论上的根本困难。实际上,在基本粒子研究领域内常常要碰到许多复合粒子的产生或消灭的现象。例如,现代物理文献中广泛遇到的各种复合粒子的基本粒子模型就不可避免地要处理这一类问题¹⁾。由大加速器直接产生的反氘核、反氦核等也涉及复合粒子的产生和消灭的问题。由高能粒子轰击到原子核上而产生的新原子核、超核等在原则上也属于这一类问题。考虑到基本粒子的 SU₃ 对称性质目前还只能作为群的特性而加到基本粒子体系中去,但又要企图统一解释基本粒子的产生、消灭的规律那末这种双重定域的或多重定域的复合场场论的研究就是必不可免的。看来,这是进一步发展基本粒子理论的重要途径之一。

从理论上说,现有量子场论体系存在一个深刻的矛盾。量子场论是量子力学的推广,量子力学是牛顿力学更高阶段的发展。牛顿力学和量子力学方程都是既能适用于点粒子又能适用于多粒子以及相应的质心运动的体系。但是现有量子场论的体系却只能把基本粒子看作是一个数学的点,并且这种“数学的点”还不能看作是有限大小的物理模型的一种近似。许多企图对基本粒子的有限大小作非定域描述的场论都有许多根本困难。

在这方面研究的一个重要进展是由 Nishijima 开始并由 Haag, Zimmermann 等人所共同给出的束缚态场论^[2]。特别在 Zimmermann 的论文中,以公理化的形式对复合粒子场论做了清晰的总结。在 H-N-Z 束缚态场论中,一个重要的结果是它们可以引进一个“定域”的场算符

$$B(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{T\left(A\left(x + \frac{\xi}{2}\right)A\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right) - \langle 0 | T\left(A\left(x + \frac{\xi}{2}\right)A\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T\left(A\left(x + \frac{\xi}{2}\right)A\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right) | B \rangle} \quad (1.1)$$

* 1973年2月15日收到。

1) 如层子模型^[1]、夸克模型、份子模型等。

来描述复合粒子,并且可以得到和通常定域场论一样的 S 矩阵. 初一看来,这在物理上是难以理解的,但在 H-N-Z 理论中却证明了这一点. 这表明通常的定域场论也能用来描述复合粒子的质心运动.

不足的是, H-N-Z 场论只能适用于复合粒子体系只有一个能级的情形,在数学推导严密性上,如 Redmond 和 Uretsky 的论文^[3]所指出的,还有可批评的地方. 这就引起以下三个问题: 1) 能否建立一个包括多个激发态的复合场场论? 2) 这样一个场论能否仍然保持 H-N-Z 理论中复合粒子场算符的定域性质,从而避免非定域场论的许多困难? 3) 能否避免如 Redmond 和 Uretsky 论文中所指出的推导对易关系,……等一系列困难? 本文企图对以上三个问题进行一个尝试.

这里的基本想法是: 1) 为了能有效地描述复合粒子的各个状态及其运动变化规律,必须引进复合场的运动方程. 由于目前描写多粒子体系的相对论运动方程还只有 Bethe-Salpeter 方程,因而本文将引进双重定域场量所服从的 B-S 算子方程. 2) 为了使复合场能在一定条件下表现出稳定复合粒子的特性,亦即存在相应的“出”场和“入”场,这就需要引进有关复合场的渐近条件. 3) 为了使 S 矩阵中包含有稳定的复合粒子,必须将原有 L-S-Z 场论体系中的希伯特空间加以扩大到包含有稳定的复合粒子的情形. 也就是说,在希伯特空间中将由基本场的“入”场或“出”场和稳定复合粒子场的“入”场或“出”场构成完备的算子集合. 为此,我们将在第二节中给出扩充后的新的复合粒子场论的基本假定以及有关性质的讨论. 为简单起见,我们暂只限于基本场是标量场的情形¹⁾. 第三节将推导出复合粒子场的“入”场和“出”场的对易关系,并由此定义出希伯特空间中一组完备的基. 第四节将引进 S 矩阵并给出相应的约化公式和普遍的 S 矩阵公式. 第五节将利用 S 矩阵的约化公式和 S 矩阵元在质量壳外可以任意外延的特性,用两种不同的办法证明在复合场具有多个激发态的条件下,仍然可以定义出相应的定域场算符来描写复合粒子的质心运动. 由此可以进一步简化所定义的渐近条件、约化公式、 S 矩阵等,得到不同形式的 S 矩阵的表示式,并证明各种不同形式的 S 矩阵之间的等价性. 其中特别表明这里所给出的 S 矩阵和 Mandelstam^[4] 所给出关于束缚态跃迁的 S 矩阵是完全等价的,而这正是许多基本粒子的复合模型所用计算方法的基础^[1]. 第六节将讨论这一理论和其它理论是否自洽的问题,并给出一个可供微扰展开的积分方程. 第七节将就本工作存在的一些问题和获得的若干结果进行分析和总结,并且就这一 S 矩阵的理论如何应用到现代基本粒子理论的一些问题进行探讨. 最后,由于建立这一 S 矩阵理论时要大量应用 B-S 方程波函数,格林函数以及正交归一条件等性质,而流行文献上所给出的有关性质的讨论和推导有一些不一致和不足的地方,因而在附录一中概略地复述一下有关 B-S 方程的理论,给出有关符号、公式的定义和说明. 至于 B-S 方程普遍的正交归一条件可以写成统一形式的证明,是本工作所获得的新结果. 此外,我们在附录二中给出有关极化张量 $f_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ 的定义和有关公式.

1) 对于基本场是旋量场的情况,我们将在以后的文章中讨论.

二、关于复合场场论的几个基本假定

这里用来建立复合场场论的方法基本上是沿用 L-S-Z 量子场论的体系. 由于这里有束缚态并有多能级, 自然要补充一些假定. 但为了叙述完整起见, 我们仍将重覆叙述前人已讨论过的那些基本原理, 但将着重讨论那些新增加的假定.

假定 I 对于总能动量算符 $\mathbf{P}_\mu$ 只存在着一系列非零的正值的质量谱 m 和 $M_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 以及相应的本征态和正定的能量本征值, 并有

$$\langle 0 | A(x) | a \rangle \neq 0 \quad \text{如果有} \quad -\mathbf{P}_\mu^2 | a \rangle = m^2 | a \rangle \quad (2.1a)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \langle 0 | A(x) | b_i^\zeta \rangle &= 0, \\ \langle 0 | B(X, x) | b_i^\zeta \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | N(A(x_1)A(x_2)) | b_i^\zeta \rangle \neq 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{如果有} \quad -\mathbf{P}_\mu^2 | b_i^\zeta \rangle = M_i^2 | b_i^\zeta \rangle, \\ &i = 1, 2, 3, \dots \\ &\zeta = \text{自旋状态} \end{aligned} \quad (2.1b)$$

而对于真空态 $|0\rangle$, 就有

$$\mathbf{P}_\mu |0\rangle = 0. \quad (2.2)$$

式 (1.1) 是 L-S-Z 场论中谱条件的自然的推广. 由算符 $N(A(x_1)A(x_2))$ 的定义 [见式 (A.1), (A.2)], 就有

$$\langle 0 | B(X, x) | 0 \rangle = 0. \quad (2.3)$$

假定 II 存在一个定域的、相对论不变的、不可约的中性标量场 $A(x)$ 和相应于这个场的“入”场 $A^{\text{in}}(x)$, “出”场 $A^{\text{out}}(x)$, 并有下列渐近条件 (在弱收敛意义下):

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} a(\mathbf{p}, T) \rightarrow a^{\text{out}}(\mathbf{p}), \quad \lim_{T \rightarrow \pm\infty} a^*(\mathbf{p}, T) \rightarrow a^{*\text{out}}(\mathbf{p}), \quad (2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}, T) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-ipx) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_0} A(x) d^3x, \\ a^*(\mathbf{p}, T) &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(ipx) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_0} A(x) d^3x, \end{aligned} \quad (2.5)$$

而

$$\begin{aligned} a^{\text{out}}(\mathbf{p}) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-ipx) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_0} A^{\text{out}}(x) d^3x, \\ a^{*\text{out}}(\mathbf{p}) &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(ipx) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_0} A^{\text{out}}(x) d^3x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

[当然, 较精确一些的写法是用波包 $f(x)$ 来代替平面波, 但并没有实质性的不同, 此外,

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial x_0} \text{ 定义为 } A \frac{\vec{\partial}}{\partial x_0} B = \left(A \frac{\partial}{\partial x_0} B - B \frac{\partial}{\partial x_0} A \right).]$$

所谓定域性是说存在下列关系:

$$[A(x), A(y)] = 0 \quad \text{当 } (x - y)^2 > 0 \text{ (即类空)}. \quad (2.7)$$

所谓相对论不变是说对于非齐次洛伦兹群在希伯特空间里存在着么正表示 (或者反么正),

满足

$$\begin{aligned} |\phi\rangle' &= U(L, a)|\phi\rangle, \\ A'(x) &= A(Lx + a) = U^*(L, a)A(x)U(L, a), \\ \langle\phi'|A(x)|\phi'\rangle &= \langle\phi|A'(x)|\phi\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

特殊地说,对于平移变换我们有

$$\begin{aligned} U(a) &= \exp(i\mathbf{P}_\mu a_\mu), \\ \frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} &= -i[\mathbf{P}_\mu, A(x)], \\ A(x+a) &= \exp(-i\mathbf{P}a)A(x)\exp(i\mathbf{P}a). \end{aligned} \quad (2.9)$$

所谓 $A(x)$ 是不可约的,是说任何算符如果能和所有 x 值的 $A(x)$ 相对易将是 C 数;或者说任何物理状态都只能是 $A(x)$ 的多项式作用在真空态的结果;或者说任何一个算子 $B(x)$ 都能用由 $A(x)$ 组成的多项式来表示. 对于 $A(x)$ 是不可约或完备的假定意味着 $A(x)$ 是唯一的基本场,而所有复合场都由基本场构成.

由弱收敛意义下的渐近条件 (2.4)–(2.6) 将很容易得到 Yang-Feldman 方程:

$$A^{\text{in}}(x) = A(x) - \int \Delta_R(x-x')j(x')d^4x', \quad (2.10)$$

$$A^{\text{out}}(x) = A(x) - \int \Delta_A(x-x')j(x')d^4x', \quad (2.11)$$

其中

$$j(x) = (-\square + m^2)A(x), \quad (2.12)$$

而

$$(-\square + m^2)A^{\text{out}}(x) = 0. \quad (2.13)$$

由式 (2.8)–(2.13) 可以做出一系列重要推论. 令 $y = x' - x$, 可将式 (2.10) 改写成

$$A^{\text{in}}(x) = A(x) - \int \theta(-y_0)\Delta(-y)j(y+x)d^4y, \quad (2.14)$$

由场量的平移变换 (2.9), 容易证明有

$$\begin{aligned} j(y+x) &= (-\square_y + m^2)A(y+x) \\ &= \exp(-i\mathbf{P}_\mu x_\mu)(-\square_y + m^2)A(y)\exp(i\mathbf{P}_\mu x_\mu). \end{aligned} \quad (2.15)$$

将式 (2.15) 代入式 (2.14), 再利用式 (2.9), 就有

$$\begin{aligned} A^{\text{in}}(x) &= \exp(-i\mathbf{P}_\mu x_\mu)\{A(0) - \int \theta(-y_0)\Delta(-y)j(y)d^4y\}\exp(i\mathbf{P}_\mu x_\mu) \\ &= \exp(-i\mathbf{P}_\mu x_\mu)A^{\text{in}}(0)\exp(i\mathbf{P}_\mu x_\mu). \end{aligned} \quad (2.16)$$

这就由基本场 $A(x)$ 的相对论平移变换导致“入”场和“出”场 $A^{\text{out}}(x)$ 的相对论平移变换. 式 (2.16) 也等价于下列形式:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^{\text{out}}(x) = -i[\mathbf{P}_\mu, A^{\text{in}}(x)]. \quad (2.17)$$

由式 (2.17) 并式 (2.2) 可推出

$$\langle 0|A^{\text{out}}(x)|0\rangle = 0, \quad (2.18)$$

因为 $m^2\langle 0|A^{\text{out}}(x)|0\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}\langle 0|A^{\text{out}}(x)|0\rangle = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|[\mathbf{P}_\mu, A^{\text{out}}(x)]|0\rangle = 0$. 此外,

由式 (2.16) 可证

$$\langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(x) | j \rangle = \exp(iP_j x) \langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(0) | j \rangle. \quad (2.19)$$

由式 (2.13) 和 (2.19), 就有

$$\begin{aligned} (-\square + m^2) \langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(x) | j \rangle &= (P_j^2 + m^2) \langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(x) | j \rangle \\ &= (-m_j^2 + m^2) \langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(x) | j \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

这样, 就有

$$\langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(x) | j \rangle = 0 \quad \text{当 } m_j^2 \neq m^2. \quad (2.21)$$

但当 $m_j^2 = m^2$ 时, 由渐近条件式 (2.10), (2.11), (2.12) 和 (2.1a) 可证

$$\langle 0 | A^{\text{out}}_{\text{in}}(x) | a \rangle = \langle 0 | A(x) | a \rangle \neq 0. \quad (2.22)$$

由式 (2.6) 和 (2.17) 易证

$$[\mathbf{P}_\mu, a^{\text{in}}(\mathbf{p})] = -p_\mu a^{\text{in}}(\mathbf{p}), [\mathbf{P}_\mu, a^{*\text{in}}(\mathbf{p})] = p_\mu a^{*\text{in}}(\mathbf{p}). \quad (2.23)$$

由式 (2.23), 再加上式 (2.2) 和假定 I 中总能量 $\mathbf{P}_0$ 没有非正值的本征值的条件, 可证

$$\begin{aligned} a^{\text{in}}(\mathbf{p}) | 0 \rangle &= 0, \mathbf{P}_\mu a^{*\text{in}}(\mathbf{p}) | 0 \rangle = p_\mu a^{*\text{in}}(\mathbf{p}) | 0 \rangle, \\ \mathbf{P}_\mu a^{*\text{in}}(\mathbf{p}) a^{*\text{in}}(\mathbf{p}') | 0 \rangle &= (p_\mu + p'_\mu) a^{*\text{in}}(\mathbf{p}) a^{*\text{in}}(\mathbf{p}') | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

由式 (2.24) 可以看出由 $a^{*\text{in}}(\mathbf{p}), \dots$ 算子的一系列组合作用在真空态 $|0\rangle$ 后组成总四动量算符的一系列的本征态. 如果再加上将在第三节中导出的对易关系, 就可以看出由 $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$ 算子一系列乘积确是构成希伯特空间中一组基矢. 对于“出”算符 $a^{\text{out}}(\mathbf{p}), a^{*\text{out}}(\mathbf{p}), \dots$ 也可以得出类似的结果.

所有这些结果都是标准的, 是前人早已得到的结果. 为叙述和下面应用的方便, 这里简单地加以总结一下. 现在我们转而讨论双粒子场的一些问题.

假定 III 存在着双重定域的、相对论不变的复合场

$$B(X, x) = \frac{1}{\sqrt{2!}} N \left(A \left(X + \frac{x}{2} \right) A \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2!}} N(A(x_1) A(x_2))$$

以及相应的“入”场 $B^{\text{in}}(X, x)$, 和“出”场 $B^{\text{out}}(X, x)$, 对于稳定的束缚态粒子存在着渐近条件(弱收敛意义下):

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \pm\infty} b_i^\zeta(\mathbf{P}_i, T) &= b_i^{\zeta^{\text{out}}}(\mathbf{P}_i), \lim_{T \rightarrow \pm\infty} b_i^{\zeta^*}(\mathbf{P}_i, T) = b_i^{\zeta^{*\text{out}}}(\mathbf{P}_i) \\ (i &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.25)$$

而对于不稳定的束缚态, 就有渐近条件

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} b_j^\zeta(\mathbf{P}_j, T) = 0, \lim_{T \rightarrow \pm\infty} b_j^{\zeta^*}(\mathbf{P}_j, T) = 0 \quad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, 3, \dots \\ j \neq i \end{matrix} \right), \quad (2.26)$$

其中

$$\begin{aligned} b_i^\zeta(\mathbf{P}_i, T) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-iP_i x) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} Q B(X, x) d^3 \mathbf{X} d^4 x, \\ b_i^{\zeta^*}(\mathbf{P}_i, T) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int B(X, x) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} Q \exp(iP_i x) \phi_i^\zeta(x, P_i) d^3 \mathbf{X} d^4 x. \\ (i &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.27)$$

而 $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}_i)$, $b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}_i)$ 是与 T 无关并且具有确定值的极限, 亦即实际上式 (2.25) 就是这些“入”算子和“出”算子的定义. 对于场量 $B^{\text{in}}(X, x)$ 我们定义作

$$B^{\text{in}}(X, x) = \sum_{i, \zeta, \mathbf{P}_i} \left(b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}_i) \frac{\exp(i\mathbf{P}_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i) + b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}_i) \frac{\exp(-i\mathbf{P}_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i) \right), \quad (2.28)$$

其中对 i 求和包括一切稳定的束缚态和双粒子散射态, 但不包括不稳定的束缚态.

由式 (2.28) 和 (A.42), 显然有

$$\begin{aligned} b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-i\mathbf{P}_i X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i) \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} Q B^{\text{in}}(X, x) d^3 \mathbf{X} d^4 x, \\ b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int B^{\text{in}}(X, x) \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} Q \exp(i\mathbf{P}_i X) \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i) d^3 \mathbf{X} d^4 x. \end{aligned} \quad (2.29)$$

并有[由于 (A.33a)]

$$(\tilde{\partial} - \tilde{I}) B^{\text{in}}(X, x) = 0. \quad (2.30)$$

所谓双重定域是说存在下列关系:

$$[B(X, x), B(Y, y)] = 0 \quad \text{当 } X \pm x \sim Y \pm y \text{ 类空}. \quad (2.31)$$

所谓相对论不变是说对于 $B(X, x)$ 有

$$\begin{aligned} B'(X, x) &= B(LX + a, Lx) = U^*(L, a) B(X, x) U(L, a), \\ \langle \phi' | B(X, x) | \phi' \rangle &= \langle \phi | B'(X, x) | \phi \rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

对于平移就有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} B(X, x) &= -i[\mathbf{P}_\mu, B(X, x)], \\ B(X + a, x) &= \exp(-i\mathbf{P}a) B(X, x) \exp(i\mathbf{P}a). \end{aligned} \quad (2.33)$$

此外, 由式 (2.12) 很容易得出

$$\tilde{\partial} B(X, x) = \frac{1}{\sqrt{2}!} T \left(j \left(X + \frac{1}{2} x \right) j \left(X - \frac{1}{2} x \right) \right) + \text{其它有 } \delta \text{ 函数的项} \quad (2.34)$$

如果在两边分别减去 $\int I(X - Y; x, y) B(Y, y) d^4 Y d^4 y$ 的项, 就得到

$$\begin{aligned} (\tilde{\partial} - \tilde{I}) B(X, x) &= J(X, x) \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}!} T \left(j \left(X + \frac{x}{2} \right) j \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) + \text{其它有 } \delta \text{ 函数的项} \\ &\quad - \int I(X - Y; x, y) B(Y, y) d^4 Y d^4 y, \end{aligned} \quad (2.35)$$

其中 $\tilde{\partial}$ 和 $\tilde{I}$ 的定义见附录一. 由式 (A.3a), (2.1b) 和 (2.35) 很容易证明

$$\langle 0 | (\tilde{\partial} - \tilde{I}) B(X, x) | b_i \rangle \equiv \langle 0 | J(X, x) | b_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.36)$$

其中 $|b_i\rangle$ 是指一切束缚态和双粒子态. 实际上, 式 (2.35), (2.36) 既可以看作是 $J(X, x)$ 的定义, 也可以看作是选择 $\tilde{I}$ 的一个条件. 对于 $\tilde{I}$ 的选择未必是唯一的, 但它的存在却是没有疑义的. 值得注意的是, 式 (2.31) — (2.33) 并不是一个独立的假定, 这些结果完全可以由基本场的定域性质以及相对论不变性质推导出来. 但式 (2.25) 和式 (2.26) 却完全是一

个新的独立的假定,对于这一假定所包含的内容以及可导出什么结果需要进行一些探讨.

首先从物理上看,稳定的复合粒子在性质上有许多方面类似于所谓“穿衣”的物理粒子.例如它们在时间 $T \rightarrow \pm \infty$ 时都处在稳定状态,不再与其它稳定粒子发生任何相互作用,而只包含它们的“自作用”(包括双粒子间形成束缚态的一部分相互作用).因而由(2.25)式所表示的渐近条件便能给这一图象以恰当的描述.

其次,由于存在着正交归一条件(A.42)和(A.43),由式(2.28),(2.29),我们容易证明

$$[b_i^{\text{out}}(\mathbf{P})]^+ = b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}). \quad (2.37)$$

显然,对于中性粒子应有(2.37)式.

最后,由式(2.25),(2.26)和(2.27)可以很容易导出如下渐近公式:

$$\begin{aligned} b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) &= b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}, T) - \int_{-\infty}^T dT' \frac{\partial}{\partial T'} b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}, T') \\ &= b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}, T) - \int_{-\infty}^T dT' \frac{\partial}{\partial T'} \int d^3\mathbf{X}' d^4x' \frac{\exp(-iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^{\text{in}}(x', p) \frac{\delta}{\delta X_0} Q B(X', x'), \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中 $X_0 \equiv T'$. 注意到 $\frac{\partial^2}{\partial X_0^2} \rightarrow \nabla_{\mathbf{x}}^2 - M_i^2$, 利用分部积分,就有

$$\begin{aligned} b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) &= b_i(\mathbf{P}, T) \\ &\quad - \int_{-\infty}^T d^4X' d^4x' \frac{\exp(-iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^{\text{in}}(x', P) Q(-\square_{x'} + M_i^2) B(X', x'). \end{aligned} \quad (2.39)$$

类似地就有

$$\begin{aligned} b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) &= b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}, T) \\ &\quad + \int_{-\infty}^T d^4X' d^4x' (-\square_{x'} + M_i^2) B(X', x') Q \frac{\exp(iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^{\text{in}}(x', P). \end{aligned} \quad (2.40)$$

对“出”算符就有

$$\begin{aligned} b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}) &= b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}, T) \\ &\quad - \int_T^{\infty} d^4X' d^4x' \frac{\exp(-iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^{\text{out}}(x', P) Q(-\square_{x'} + M_i^2) B(X', x'), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}) &= b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}, T) \\ &\quad + \int_T^{\infty} d^4X' d^4x' (-\square_{x'} + M_i^2) B(X', x') Q \frac{\exp(iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^{\text{out}}(x', P). \end{aligned} \quad (2.42)$$

但如果是不稳定粒子,就有

$$\begin{aligned} 0 &= b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}, T) \\ &\quad - \int_{-\infty}^T d^4X' d^4x' \frac{\exp(-iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^{\text{in}}(x', P) Q(-\square_{x'} + M_i^2) B(X', x'), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} 0 &= b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}, T) \\ &\quad + \int_T^{\infty} d^4X' d^4x' (-\square_{x'} + M_i^2) B(X', x') Q \frac{\exp(iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^{\text{out}}(x', P), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$0 = b_i^f(\mathbf{P}, T) - \int_T^\infty d^4X' d^4x \frac{\exp(-iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^f(x', P) Q(-\square_{X'} + M_i^2) B(X', x'), \quad (2.45)$$

$$0 = b_i^{f*}(\mathbf{P}, T) + \int_T^\infty d^4X' d^4x' (-\square_{X'} + M_i^2) B(X', x') Q \frac{\exp(iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^f(x', P). \quad (2.46)$$

由式 (2.32)–(2.42) 也可以做出一系列重要的推论。由式 (2.3), (2.27), (2.39)–(2.42), 易证

$$\langle 0 | b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}) | 0 \rangle = \langle 0 | b_i^{*\text{out}}(\mathbf{P}) | 0 \rangle = 0. \quad (2.47)$$

由式 (A.3a), (2.1b) 以及 (2.39), (2.42), 易证有

$$\langle 0 | b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) | i \rangle = \langle 0 | b_i^f(\mathbf{P}, T) | i \rangle \approx 0, \quad (2.48)$$

$$\langle i | b_i^{*\text{out}}(\mathbf{P}) | 0 \rangle = \langle i | b_i^{f*}(\mathbf{P}, T) | 0 \rangle \approx 0. \quad (2.49)$$

由式 (2.27) 和 (2.33), 就可以得到

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_\mu, b_i^f(\mathbf{P}, T)] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{X} d^4x \exp(-iPX) \bar{\phi}_i^f(x, P) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} Q[\mathbf{P}_\mu, B(X, x)] \\ &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{X} d^4x \exp(-iPX) \bar{\phi}_i^f(x, P) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} Q \frac{\partial}{\partial X_\mu} B(X, x) \\ &= -p_\mu^i b_i^f(\mathbf{P}, T) + \frac{\partial}{\partial X_0} b_i^f(\mathbf{P}, T) \delta_{\mu,4}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

对于 $b_i^{f*}(\mathbf{P}, T)$, 就有

$$[\mathbf{P}_\mu, b_i^{f*}(\mathbf{P}, T)] = p_\mu^i b_i^{f*}(\mathbf{P}, T) + \frac{\partial}{\partial X_0} b_i^{f*}(\mathbf{P}, T) \delta_{\mu,4}. \quad (2.51)$$

式 (2.50) 和 (2.51) 中, $X_0 \equiv T$. 当式 (2.50), (2.51) 中 $T \rightarrow \pm \infty$, 而其中 $\delta_{\mu,4}$ 项如果又等于零, 则有

$$[\mathbf{P}_\mu, b_i^{\text{out}}(\mathbf{P})] = -p_\mu^i b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}), [\mathbf{P}_\mu, b_i^{*\text{out}}(\mathbf{P})] = p_\mu^i b_i^{*\text{out}}(\mathbf{P}). \quad (2.52)$$

容易证明, 式 (2.50), (2.51) 中 $\delta_{\mu,4}$ 项在 $T \rightarrow \pm \infty$ 时的确等于零。由式 (2.27) 可知:

$$\frac{\partial}{\partial X_0} b_i^f(\mathbf{P}, T) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-iPX) \bar{\phi}_i^f(x, P) \frac{\ddot{\partial}^2}{\partial X_0^2} Q B(X, x) d^3\mathbf{X} d^4x. \quad (2.53)$$

在式 (2.53) 中可以将平面波换成波包 $f^*(X)$, 而当 $T \rightarrow \pm \infty$ 时, 有^[5]

$$\sup_{\mathbf{X}} |f(\mathbf{X}, T)| < C/|T|^{3/2}, \quad (2.54)$$

其中 C 是 $\frac{\mathbf{X}}{T}$ 的函数。在 (2.53) 中, 由于有束缚态波函数的正交归一条件, 因而对相对运动部分 d^4x 的积分只能贡献一个有限值, 至于在对 d^4x 积分后的剩余部分也将贡献一个波包, 这样就有

$$\lim_{T \rightarrow \pm \infty} \frac{\partial}{\partial X_0} b_i^f(\mathbf{P}, T) \approx C' \int d^3\mathbf{X} f(\mathbf{X}, T) \frac{\ddot{\partial}^2}{\partial X_0^2} f'(\mathbf{X}, T) \leq \frac{C}{T^2} \rightarrow 0. \quad (2.55)$$

因此, 当 i 是束缚态时, 确实存在着式 (2.52)。但对于 i 是双粒子散射态时, 由于相对运动部分波函数要趋向于平面波, 很难说一定有式 (2.52)。由式 (2.1), (2.2) 和 (2.52) 易

得

$$P_i^2 \langle 0 | b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}) | j \rangle = \langle 0 | [\mathbf{P}_\mu, [\mathbf{P}_\mu, b_i^{\text{out}}(\mathbf{P})]] | j \rangle = P_i^2 \langle 0 | b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}) | j \rangle. \quad (2.56)$$

而如果 $i \neq j$, 显然就有

$$\langle 0 | b_i^{\text{out}}(\mathbf{P}) | j \rangle = 0. \quad (2.57)$$

此外, 由式 (2.2), (2.52) 同样可证

$$\begin{aligned} b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) | 0 \rangle &= 0, \quad \mathbf{P}_\mu b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}) | 0 \rangle = P_\mu b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}) | 0 \rangle \\ \mathbf{P}_\mu b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}') | 0 \rangle &= (P_\mu + P'_\mu) b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}) b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P}') | 0 \rangle, \dots \end{aligned} \quad (2.58)$$

这表明 $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}), \dots$ 等算子的一系列组合作用在真空态上也是总哈密顿算符的本征态. 如果再加上第三节中导出的对易关系就构成希伯特空间中又一一系列基矢. 当然, 这里的 i 只限于束缚态的情形. 值得注意的是, 在这里导出基矢的过程中是避免利用 Yang-Feldman 方程的, 也就是避免利用 B-S 方程解的完备性条件, 因为这一方程是否具有完备条件目前并不清楚. 如果存在完备条件, 我们便能将场量 $B(X, x)$ 形式上对 B-S 波函数展开, 亦即有

$$\begin{aligned} B(X, x) &= \sum_{i, \zeta, \mathbf{P}} \left(b_i^\zeta(\mathbf{P}, T) \frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x, P_i) + b_i^{\zeta*}(\mathbf{P}, T) \frac{\exp(-iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) \right) \\ &\quad (i = 1, 2, 3, \dots \text{包括束缚态和散射态}). \end{aligned} \quad (2.59)$$

由式 (2.39)–(2.46), (2.59), 很容易得到双粒子场的 Yang-Feldman 方程为

$$\begin{aligned} B^{\text{in}}(X, x) &= B(X, x) - \sum_{i, \zeta, \mathbf{P}_i} \int_{-\infty}^T d^4 X' d^4 x' \\ &\times \left[\frac{\exp(-iP_i X')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x', P_i) Q(-\square_{X'} + M_i^2) B(X', x') \frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i(x, P_i) \right. \\ &\left. - \frac{\exp(-iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) (-\square_{X'} + M_i^2) B(X', x') Q \frac{\exp(iP_i X')}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x', P_i) \right], \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} B^{\text{out}}(X, x) &= B(X, x) - \sum_{i, \zeta, \mathbf{P}_i} \int_T^\infty d^4 X' d^4 x' \\ &\times \left[\frac{\exp(-iP_i X')}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x', P_i) Q(-\square_{X'} + M_i^2) B(X', x') \frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i(x, P_i) \right. \\ &\left. - \frac{\exp(-iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) (-\square_{X'} + M_i^2) B(X', x') Q \frac{\exp(iP_i X')}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x', P_i) \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

但在有了式 (2.24), (2.58) 所表示的态矢量以后, 接下来要解决的一个问题是这些态矢量的完备性的问题, 因而有下列的假定.

假定 IV 在希伯特空间中, 算子 $a^{\text{in}}(\mathbf{p}), a^{*\text{in}}(\mathbf{p}), b_i^{\text{in}}(\mathbf{P}), b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P})$, 其中 i 只包含稳定的束缚态(或相应的“出”算符), 形成完备的不可约集合.

这就是说, 在整个希伯特空间中仅仅由真空态, 稳定的粒子(基本场的量子), 稳定的束缚态以及由这些稳定粒子和稳定束缚态形成的散射态组成一组完备的基矢. 这一假定和量子力学的图象是相适应的. 在量子力学中, 在有相互作用情形下, 单有入射波或出射波不足以形成完备集合, 必须加上相应的束缚态的波函数才形成完备集合. 因此, 对于描写

束缚态的算子 $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$, $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$ (当 i 只包含束缚态时) 必然是和算子 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$ 相互独立的. 在这一假定下, 反映双粒子散射态的算子 $b_k^{\text{in}}(\mathbf{P})$, $b_k^{*\text{in}}(\mathbf{P})$ 就应该可以用 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$ 的算子来展开. 考虑到 B-S 波函数有式 (A.32a), (A.32b) 的积分方程, 显然我们可以假定有相应的算子的积分方程

$$\begin{aligned} B^{\text{in}}(x_1 x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} A^{\text{out}}(x_1) A^{\text{in}}(x_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2 G_0(x_1 x_2; y_1 y_2) I(u_1 u_2; v_1 v_2) B^{\text{in}}(v_1 v_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} A^{\text{out}}(x_1) A^{\text{in}}(x_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2 B^{\text{in}}(u_1 u_2) I(u_1 u_2; v_1 v_2) G_0(v_1 v_2; x_1 x_2). \quad (2.62) \end{aligned}$$

将式 (2.62) 作用在任何双粒子态和真空态之间, 就有式 (A.32a) 和 (A.32b). 作用在其它态上, 由于有式 (2.21), (2.57), 因而是零 [假设式 (2.57) 对散射态也成立]. 但由假定 IV 还引起一个新的自治性的问题, 即假定 IV 和假定 I 中 $A(x)$ 场完备的假定是否自洽? 它们是相互独立的还是可以相互引伸出来?

由算子 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$, $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$, $b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P})$ (i 只包含束缚态) 完备的假定很容易导出基本场 $\{A(x)\}$ 完备的结论. 由算子定义式 (2.5), (2.27), 如果有一算子 R 可以和 $A(x)$ 相对易, 那末就必然可以和 $B(X, x)$ 并和流算符 $(-\square + m^2)A(x)(-\square_x + M_i^2)B(X, x)$ 相对易. 由渐近条件式 (2.10), (2.39), (2.40), 就必然导致可以和 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$, $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$, $b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P})$ 算符相对易. 如果这些“入”场算子组成完备集合, 那末 R 必定是常数乘以单位元素. 如果只有单位元素可以和所有的 $A(x)$ 相对易, 那末 $A(x)$ 必定是完备的集合^[6]. 但是如果将上一证明倒过来做, 却得不出“入”算子是完备的结论. 这说明确需要有一个独立的假定 IV.

从数学上来看, 得到上述结果是不足为奇的. 因为算子 $a(\mathbf{p}, T)$ 比 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$ 的集合要大很多, 因而由 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$ 的完备就必然导致基本场 $A(x)$ 的完备, 但却不能倒过来. 然而由这一证明却可以导致一个重要的结论: 即在我们现在所建立的场论体系中, 究竟由那一些“入”态 (或“出”态) 算子组成完备的不可约的集合, 在一定程度上是存在任意性的. 我们既可以选择 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$ 算子组成完备集合 (即通常的 L-S-Z 场论所作的没有束缚态的假定), 也可以选择 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$, $a^{*\text{in}}(\mathbf{p})$, $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$, $b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P})$ 的算子组成完备集合. 其中 i 可以是一个, 也可以是好多个以至可数的无穷多个稳定复合粒子的集合, 也可以认为只有一个或多个束缚态 $b_i^{\text{in}}(\mathbf{P})$, $b_i^{*\text{in}}(\mathbf{P})$ [即基本场 $A(x)$ 没有相应的“入”态] 组成不可约的完备集合. 所有这些选择都能导出 $A(x)$ 场的完备性, 都和其它三个假定不矛盾. 至于客观世界究竟有那些稳定粒子将由实验来决定. 这仿佛在理论上可以存在许多种几何而客观世界是那一种几何却不能先验地加以决定而要由实践来判定一样. 注意到目前有许多基本粒子理论都认为基本粒子可能由更深入一层的基本场量所组成, 但是实验上却至今还没有能证实有相应的“粒子”的形态, 即使发现有相应的粒子, 但

仍可能有没有稳定粒子形态的基本场量,那末这里“入”场集合的大小存在某些任意的可能性将是值得注意的结果了¹⁾。

以上是我们建立这一新的体系的四个基本假定。下面将从这些假定出发导出可用的一些计算公式,首先是“入”算子和“出”算子的一些对易关系的问题。

三、关于渐近场所满足的对易关系

关于渐近场所满足的对易关系我们将用下列两个办法进行探讨。一个是用推广的 Licht-Tall 定理^[7],这比较简单直接,但有局限性。另一个是沿用 Zimmermann 的方法,但考虑到 Redmond 和 Uretsky 的批评^[3]。这一方法比较普遍,所用假定也较少。特别是这里所给出的办法能够避免 Zimmermann 在处理散射态问题上的困难。现在依次说明如下:

所谓 Licht-Tall 定理是说:

“如果定域场量 $A(x)$ 不可约并且对易子具有平移不变性,就有

$$[A(x), A(y)] = D(x - y) = C \text{ 数.} \quad (3.1)$$

这个定理曾由 Licht-Tall 以极简单的方法加以证明。由 Jacobi 恒等式和平移不变性,可得到

$$\begin{aligned} [D(x - y), A(z)] &= -[[A(y + \lambda), A(z + \lambda)], A(x)] \\ &\quad - [[A(z + \lambda), A(x + \lambda)], A(y)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

由于 λ 是任意的,总可以选择 λ 使 $y + \lambda \sim z + \lambda$, $z + \lambda \sim x + \lambda$ 同时类空,因而式(3.2)的右方就等于零。由 $A(z)$ 的不可约性,便得式(3.1)。

如果人们企图用这一定理来求出对易关系,就要满足三个条件。首先是完备性问题,这是由假设 IV 所规定的。其次是对易子的平移不变性。如果我们把对易关系看作量子化条件,由狭义相对性原理,一切物理规律在不同坐标中具有相同形式。这当然也应适用于量子化条件^[8]。第三是“入”场是否有定域性质。由复合场量 $B(X, x)$ 的双重定域性质,易证在 $X + \frac{x}{2}$, $X - \frac{x}{2}$ 和 $Y + \frac{y}{2}$, $Y - \frac{y}{2}$ 为类空时,有

$$\lim_{x_0, y_0 \rightarrow \pm\infty} [B(X, x), B(Y, y)] = [B^{\text{out}}(X, x), B^{\text{in}}(Y, y)]_{x_0, y_0 = \pm\infty} = 0. \quad (3.3)$$

由对易关系的平移不变性,就立刻有²⁾

$$[B^{\text{in}}(X, x), B^{\text{in}}(Y, y)] = 0 \quad \text{当 } X \pm \frac{x}{2} \sim Y \pm \frac{y}{2} \text{ 类空.} \quad (3.4)$$

如果复合场量满足以上三个条件,就不难应用推广的 Licht-Tall 定理导出对易子是 C 数的结论(只要略为改动一下,因这里算子是双重定域的)。但问题是在假设 IV 中我们只认为 $B^{\text{in}}(X, x)$ 场中有关束缚态的一部分和 $A^{\text{in}}(x)$ 组成完备集合,并没有认为由 $A^{\text{in}}(x)$ 和 $B^{\text{in}}(X, x)$ 组成完备集合,如果在 $B^{\text{in}}(X, x)$ 中扣除了散射态,又很难简单地证明剩余部分(即束缚态部分)具有双重定域性质。因而这一办法实际上只能应用于两种情况,即或

1) 1972 年杨振宁教授前来北京探亲访友,在和杨振宁教授举行的基本粒子理论问题的座谈会上他曾提到存在这一可能性,作者谨致谢意。

2) 式(3.4)的导出是不严格的,因为式(3.3)成立是在弱收敛意义下,从渐近条件式(2.25)给出的。

者认为 $B(X, x)$ 没有渐近场, 或者认为 $A(x)$ 没有渐近场[这时 $B^{\text{in}}(X, x)$ 中就没有散射态部分], 这时就能导出对易关系是 C 数的性质.

进一步由对易子是 C 数可得到

$$\begin{aligned} [B^{\text{in}}(X, x), B^{\text{in}}(Y, y)] &= \langle 0 | [B^{\text{in}}(X, x), B^{\text{in}}(Y, y)] | 0 \rangle \\ &= \sum_i \langle 0 | B^{\text{in}}(X, x) | i \rangle \langle i | B^{\text{in}}(Y, y) | 0 \rangle \\ &\quad - \sum_i \langle 0 | B^{\text{in}}(Y, y) | i \rangle \langle i | B^{\text{in}}(X, x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

由式 (2.28), (2.47), (2.48) 以及式 (2.57) 可知, 只有当 i 是稳定的单个束缚态时才有贡献. 将这些项用波函数代进去, 可得

$$\begin{aligned} [B^{\text{in}}(X, x), B^{\text{in}}(Y, y)] &= D(X, Y; x, y) \\ &= \sum_{i, \zeta, P_i} \left(\frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x, P_i) \frac{\exp(-iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(y, P_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i(y, P_i) \frac{\exp(-iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

如果对式 (3.6) 分别从左边和右边乘上 B-S 波函数和权重算子 $\frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} Q$ 等, 就能导出

$$\begin{aligned} [b_i^{\text{in}}(P_i), b_j'^{* \text{in}}(P_j)] &= 2\omega_i \delta(P_i - P_j) \delta_{\zeta\zeta'} \delta_{ij}, & (i, j \text{ 是所有的} \\ [b_i^{\text{in}}(P_i), b_j'^{* \text{in}}(P_j)] &= [b_i'^{* \text{in}}(P_i), b_j^{\text{in}}(P_j)] = 0. & \text{束缚态}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

类似地, 当然也能导出 $A^{\text{in}}(x)$ 的对易关系, 即有

$$[A^{\text{in}}(x), A^{\text{in}}(y)] = i\Delta(x - y), \quad (3.8)$$

以及产生算符和消灭算符的对易关系

$$\begin{aligned} [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), a^{* \text{in}}(\mathbf{p}')] &= 2\omega \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), a^{* \text{in}}(\mathbf{p}')] &= [a^{* \text{in}}(\mathbf{p}), a^{\text{in}}(\mathbf{p}')] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

至于 $a^{\text{in}}(\mathbf{p})$ 和 $b_i^{\text{in}}(\mathbf{p})$ 之间对易关系, 由于已假设了它们不能并存, 我们留在下面给出.

现在来讨论更为普遍和较为严格的一个方法. 和 Zimmermann 相类似, 我们从下列两个恒等式出发, 即有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2!} \left(\int d^4 X d^4 Y - \int d^4 Y d^4 X \right) \int d^4 x d^4 y f_i^*(X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) Q(-\vec{\square}_X + M_i^2) \\ &\quad \times T \left(A \left(X + \frac{x}{2} \right) A \left(X - \frac{x}{2} \right) A \left(Y + \frac{y}{2} \right) A \left(Y - \frac{y}{2} \right) \right) \\ &\quad \times (-\vec{\square}_Y + M_i^2) Q \phi_i^{\zeta'}(y, P_i) f_i(Y) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

和

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2!} \left(\int d^4 X d^4 Y - \int d^4 Y d^4 X \right) \int d^4 x d^4 y f_i^*(X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) Q(-\vec{\square}_X + M_i^2) \\ &\quad \times T \left(A \left(X + \frac{x}{2} \right) A \left(X - \frac{x}{2} \right) A \left(Y + \frac{y}{2} \right) A \left(Y - \frac{y}{2} \right) A(Z) \right) \\ &\quad \times (-\vec{\square}_Y + M_i^2) Q \phi_i^{\zeta'}(y, P_i) f_i(Y) = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $f(X)$, $f^*(X)$ 是满足克莱茵-戈登方程的波包. 至于这一等式的有效性, 曾由 Zimmermann 从场量 $A(X)$ 的定域性和谱条件加以证明^[2]. 利用分部积分, 并令 $\nabla_Y^2 - M_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial Y_0^2}$, 就能将式 (3.10) 中第一式换成

$$\begin{aligned} \text{第一式} = & -\frac{1}{2} \int d^4 X d^4 Y d^4 x d^4 y \frac{\partial}{\partial Y_0} \left\{ f_i^*(X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) Q(-\vec{\square}_X + M_i^2) \right. \\ & \times T\left(A\left(X + \frac{x}{2}\right) A\left(X - \frac{x}{2}\right) A\left(Y + \frac{y}{2}\right) A\left(Y - \frac{y}{2}\right) \frac{\vec{\partial}}{\partial Y_0}\right) \\ & \times Q\phi_i^\zeta(y, P_i) f_i(Y) + \delta\left(X_0 - \frac{x_0}{2} - Y_0 - \frac{y_0}{2}\right) \\ & \times f_i^*(X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) Q(-\vec{\square}_X + M_i^2) T\left(A\left(X + \frac{x}{2}\right) \right. \\ & \times \left. \left[A\left(X - \frac{x}{2}\right), A\left(Y + \frac{y}{2}\right)\right] A\left(Y - \frac{y}{2}\right)\right) Q\phi_i^{\zeta'}(y, P_i) f_i(Y) \\ & \left. + \text{相应的其它包含 } \delta \text{ 函数的三项} \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

不难看出, 式(3.12)中有 δ 函数的项都等于零. 因为在 $X_0 - \frac{x_0}{2} = Y_0 + \frac{y_0}{2}$ 时, $\left[\left(X - \frac{x}{2}\right) - \left(Y + \frac{y}{2}\right)\right]$ 类空时由定域条件为零, 而当空间部分完全相等时, 又由于它们是同一场量因而也是零. 进一步对 dY_0 积分后, 式 (3.12) 就成为

$$\begin{aligned} \text{第一式} = & -\frac{1}{2} \int d^4 X d^3 Y d^4 x d^4 y \left[f_i^*(X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) Q(-\vec{\square}_X + M_i^2) \right. \\ & \times T\left(A\left(X + \frac{x}{2}\right) A\left(X - \frac{x}{2}\right) A\left(Y + \frac{y}{2}\right) A\left(Y - \frac{y}{2}\right)\right) Q\phi_i^{\zeta'}(y, P_i) f_i(Y) \left. \right] \Big|_{Y_0=-\infty}^{Y_0=+\infty} \end{aligned} \quad (3.13)$$

在式 (3.13) 中的 T 乘积是一个复杂的组合, 但注意到当 $Y_0 \rightarrow \pm \infty$ 时, 在 y_0 是有限的情况下, 总有 $Y_0 \pm \frac{y_0}{2} \geq X_0 \pm \frac{x_0}{2}$, 而当 $y_0 \rightarrow \pm \infty$ 时, 由于函数 $Q\phi_i^{\zeta'}(y, P_i)$ 在 $y \rightarrow \pm \infty$ 时要衰减为零, 在 T 乘积中除了 $Y_0 \pm \frac{y_0}{2} > X_0 \pm \frac{x_0}{2}$ (当 $Y_0 \rightarrow +\infty$) 和 $X_0 \pm \frac{x_0}{2} > Y_0 \pm \frac{y_0}{2}$ (当 $Y_0 \rightarrow -\infty$) 这两项的贡献以外, T 乘积中其它组合的项都是零. 因而在取上述极限过程后, 式 (3.13) 就成为

$$\begin{aligned} \text{第一式} = & -\frac{1}{2} \int d^4 X d^4 x [f_i^*(X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) Q(-\vec{\square}_X + M_i^2)] \\ & \times \left[b_i^{\zeta' \text{out}}(P_i) T\left(A\left(X + \frac{x}{2}\right) A\left(X - \frac{x}{2}\right)\right) \right. \\ & \left. - T\left(A\left(X + \frac{x}{2}\right) A\left(X - \frac{x}{2}\right)\right) b_i^{\zeta' \text{in}}(P_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

进一步再做分部积分, 并令 $\nabla_X^2 - M_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial X_0^2}$, 就得到

$$\begin{aligned} \text{第一式} = & -b_i^{\zeta' \text{out}}(P_i)[b_i^{\zeta \text{out}}(P_i) - b_i^{\zeta \text{in}}(P_i)] \\ & + [b_i^{\zeta \text{out}}(P_i) - b_i^{\zeta \text{in}}(P_i)]b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j). \end{aligned} \quad (3.15)$$

类似地,可得

$$\begin{aligned} \text{第二式} = & -b_i^{\zeta \text{out}}(P_i)[b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j) - b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)] \\ & + [b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j) - b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)]b_i^{\zeta \text{in}}(P_i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

令式(3.15)和(3.16)相等,显然有

$$[b_i^{\zeta \text{out}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j)] = [b_i^{\zeta \text{in}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)], \quad (3.17)$$

而如果从恒等式(3.11)出发,就有

$$[b_i^{\zeta \text{out}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j)]A(Z) = A(Z)[b_i^{\zeta \text{in}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)]. \quad (3.18)$$

将式(3.17)代入式(3.18),就有

$$[[b_i^{\zeta \text{out}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j)], A(Z)] = [[b_i^{\zeta \text{in}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)], A(Z)] = 0. \quad (3.19)$$

由假定 II, $A(Z)$ 是完备的不可约的集合,因而就有

$$[b_i^{\zeta \text{out}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j)] = [b_i^{\zeta \text{in}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)] = C \text{ 数}. \quad (3.20)$$

用类似办法当然也能导出

$$\begin{aligned} [a^{\text{out}}(\mathbf{p}), a^{* \text{out}}(\mathbf{p}')] &= [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), a^{* \text{in}}(\mathbf{p}')] = C \text{ 数}, \\ [a^{\text{out}}(\mathbf{p}), a^{\text{out}}(\mathbf{p}')] &= [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), a^{\text{in}}(\mathbf{p}')] = C \text{ 数}, \\ [a^{* \text{out}}(\mathbf{p}), a^{* \text{out}}(\mathbf{p}')] &= [a^{* \text{in}}(\mathbf{p}), a^{* \text{in}}(\mathbf{p}')] = C \text{ 数}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

和

$$\begin{aligned} [b_i^{\zeta \text{out}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{out}}(P_j)] &= [b_i^{\zeta \text{in}}(P_i), b_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)] = C \text{ 数}, \\ [b_i^{\zeta' \text{out}}(P_i), b_j^{\zeta \text{out}}(P_j)] &= [b_i^{\zeta' \text{in}}(P_i), b_j^{\zeta \text{in}}(P_j)] = C \text{ 数}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

此外还有

$$\begin{aligned} [a^{\text{out}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta \text{out}}(P_i)] &= [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta \text{in}}(P_i)] = C \text{ 数}, \\ [a^{\text{out}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta' \text{out}}(P_i)] &= [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta' \text{in}}(P_i)] = C \text{ 数}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

等等相应的公式。由式(3.20)–(3.22)易导出对易关系(3.7)和(3.9)式。由式(3.23)可得到

$$\begin{aligned} [a^{\text{out}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta \text{out}}(P_i)] &= [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta \text{in}}(P_i)] \\ &= [a^{\text{out}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta' \text{out}}(P_i)] = [a^{\text{in}}(\mathbf{p}), b_i^{\zeta' \text{in}}(P_i)] = \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

但要注意的,式(3.20)–(3.24)中的 i, j 都只是指束缚态。

值得探讨的是,是否这里也存在如 Redmond 和 Uretsky 所指出的 Zimmermann 在推导出对易关系时所有的困难? 概括起来, Redmond 和 Uretsky 的批评有两点: 一是认为不能一般地略去式(3.12)中的 δ 函数项; 二是认为 Zimmermann 由于不加区别地略去这几项, 而导致一个荒谬的结论, 即可以得到

$$[a^{\text{in}}(\mathbf{p}), b_k^{\zeta' \text{in}}(P_k)] = 0, \quad (3.25)$$

其中指标 k 是指散射态。按照式(2.62), 显然算子 $b_k^{\zeta' \text{in}}(P_k)$ 和 $a^{\text{in}}(\mathbf{p}_1)a^{\text{in}}(\mathbf{p}_2)$ 不见得是相互独立的。但由 Zimmermann 的假定和推导, 确要得到如式(3.25)自相矛盾的结果。

分析其原因是由于在 Zimmermann 那里, 内部自由度 x 是作为参量来引进的, T 乘积只对质心编时, 这就很难扩展到散射态而又能得出正确的结论。这里由于引进了 B-S 波函数, 而束缚态和散射态的波函数却具有不同的无限远的渐近行为, 前者 $x \rightarrow \infty$ 时趋向于零, 而后者趋向于平面波。因而, 在推导式 (3.20) 时可将式 (3.13) 中的 T 乘积中许多项略去; 而当 B-S 波函数是散射态时, 就很难去掉这些项而导出式 (3.25), 所以, 我们在推导对易关系式 (3.7), (3.24) 时就能避免上述困难。

附带地说, 如果基本场是旋量场, 那末式 (3.12) 中的 δ 函数项就不能等于零。但在这种情形下仍然可以利用 B-S 波函数趋于零的性质, 表明这些项的实际贡献仍然是零。

下面转而讨论 S 矩阵的表示式。

四、 S 矩阵及其约化公式

在求出产生算符和消灭算符的对易关系以后, 很自然就要讨论 S 矩阵的问题。由基本假定 IV, 基本场的“入”场和稳定束缚态的“入”场组成完备集合, 整个希伯特空间由下列算子

$$a_{in}^{*out}(\mathbf{p}), b_i^{\xi*in}(\mathbf{P}_i), \dots \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

所构成。态矢量

$$|in\rangle = a^{*in}(\mathbf{p}) \dots b_1^{\xi*in}(\mathbf{P}_1) \dots b_2^{\eta*in}(\mathbf{P}_2) \dots b_i^{\xi*in}(\mathbf{P}_i) |0\rangle \frac{1}{\sqrt{n!m!l!\dots}} \quad (4.1)$$

或

$$|out\rangle = a^{*out}(\mathbf{p}) \dots b_1^{\xi*out}(\mathbf{P}_1) \dots b_2^{\eta*out}(\mathbf{P}_2) \dots b_i^{\xi*out}(\mathbf{P}_i) |0\rangle \frac{1}{\sqrt{n!m!l!\dots}} \quad (4.2)$$

将形成一组完备正交的基。 S 矩阵定义为

$$\langle in|S|in\rangle = \langle out|in\rangle, \quad (4.3)$$

并且是么正的。

有了 S 矩阵定义、渐近条件、对易关系, 普遍的 S 矩阵的约化公式和一般表示式将很容易得到。但这里要碰到一个按复合粒子的质心编时还是按基本场的时序编时的问题, 因而要略加讨论。考虑 4 个标量复合粒子的散射 S 矩阵元

$$\begin{aligned} {}^{out}\langle b_3 b_4 | b_1 b_2 \rangle^{in} &= \lim_{X_0 \rightarrow \infty} \int d^3 \mathbf{X}_3 \int d^4 x_3 \frac{\exp(-iP_3 X_3)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}(x_3, P_3) Q \frac{\delta}{\delta X_{3,0}} \\ &\quad \times {}^{out}\langle b_4 | T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right) | b_1 b_2 \rangle^{in} \\ &= I_{34, 12} + \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d^4 X_3 \int d^4 x_3 \frac{\exp(-iP_3 X_3)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}(x_3 P_3) Q (-\vec{\square}_3 + M^2) \\ &\quad \times {}^{out}\langle b_4 | T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right) | b_1 b_2 \rangle^{in}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

进一步再把 b_1 搬进来, 式 (4.4) 中的矩阵元就成为

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} {}^{out}\langle b_4 | T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right) b(\mathbf{P}_1, T) | b_2 \rangle^{in}. \quad (4.5)$$

由式(2.27)可知,

$$b(\mathbf{P}_1, T) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d^3 \mathbf{X}_1 d^4 x_1 T \left(A \left(X_1 + \frac{x_1}{2} \right) \right. \\ \left. \times A \left(X_1 - \frac{x_1}{2} \right) \right) Q \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_{1,0}} \phi(x_1, P_1) \frac{\exp(iP_1 X_1)}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (4.6)$$

由式(4.5), (4.6)可以看出, $T_1 \rightarrow -\infty$ 时, $X_{1,0} \pm \frac{x_{1,0}}{2}$ 的值在 $x_{1,0}$ 是有限时都是一 ∞ ; 而当 $x_{1,0}$ 是 $\pm \infty$ 时, 由于 $Q\phi(x_1, P_1)$ 是衰减为零的函数, 因而它们的贡献是零. 于是式(4.5)就可以写成

$$\lim_{x_{1,0} \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d^3 \mathbf{X}_1 d^4 x_1^{\text{out}} \langle b_4 | T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times A \left(X_1 + \frac{x_1}{2} \right) A \left(X_1 - \frac{x_1}{2} \right) \right) | b_2 \rangle^{\text{in}} Q \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_{1,0}} \phi(x_1, P_1) \frac{\exp(iP_1 X_1)}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (4.7)$$

其中 T 乘积是按基本场的坐标编时的. 进一步再乘上 $\int dX_{1,0} \frac{\partial}{\partial X_{1,0}}$, 可将式(4.7)换成

$$- \frac{1}{\sqrt{2!}} \int dX_{1,0} \frac{\partial}{\partial X_{1,0}} \int d^3 \mathbf{X}_1 d^4 x_1^{\text{out}} \langle b_4 | T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times A \left(X_1 + \frac{x_1}{2} \right) A \left(X_1 - \frac{x_1}{2} \right) \right) | b_2 \rangle^{\text{in}} Q \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_{1,0}} \phi(x_1, P_1) \frac{\exp(iP_1 X_1)}{(2\pi)^{3/2}} \right. \\ \left. + \text{out} \langle b_4 | b^{\text{out}}(\mathbf{P}_1) T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right) | b_2 \rangle^{\text{in}}. \quad (4.8)$$

式(4.8)中第二项代入式(4.4)中时是零, 因为这一项中的 $b^{\text{out}}(\mathbf{P}_1)$ 和 $\langle b_4 |$ 相消, 剩余项是 B-S 波函数但满足克莱因-戈登方程. 将式(4.8)代入式(4.4), 就有

$$\text{out} \langle b_3 b_4 | b_1 b_2 \rangle^{\text{in}} = I_{34;12} + \frac{1}{2!} \int d^4 X_3 d^4 x_3 d^4 X_1 d^4 x_1 \frac{\exp(-iP_3 X_3)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}(x_3, P_3) (-\overrightarrow{\square}_3 + M^2) \\ \times \text{out} \langle b_4 | T \left(A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_1 + \frac{x_1}{2} \right) A \left(X_1 - \frac{x_1}{2} \right) \right) | b_2 \rangle^{\text{in}} \\ \times (-\overleftarrow{\square}_1 + M^2) Q \phi(x_1, P_1) \frac{\exp(iP_1 X_1)}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (4.9)$$

进一步再把 b_4, b_2 搬进去, 就成为

$$\text{out} \langle b_3 b_4 | b_1 b_2 \rangle^{\text{in}} = I_{34;12} + \frac{1}{(2!)^2} \int d^4 X_1 d^4 x_1 d^4 X_2 d^4 x_2 d^4 X_3 d^4 x_3 d^4 X_4 d^4 x_4 \frac{\exp[-i(P_3 X_3 + P_4 X_4)]}{(2\pi)^3} \\ \times \bar{\phi}(x_3, P_3) \bar{\phi}(x_4, P_4) Q_3 Q_4 (-\overrightarrow{\square}_3 + M^2) (-\overrightarrow{\square}_4 + M^2) \\ \times \langle 0 | T \left(A \left(X_4 + \frac{x_4}{2} \right) A \left(X_4 - \frac{x_4}{2} \right) A \left(X_3 + \frac{x_3}{2} \right) A \left(X_3 - \frac{x_3}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times A \left(X_1 + \frac{x_1}{2} \right) A \left(X_1 - \frac{x_1}{2} \right) A \left(X_2 + \frac{x_2}{2} \right) A \left(X_2 - \frac{x_2}{2} \right) \right) | 0 \rangle \\ \times (-\overleftarrow{\square}_1 + M^2) (-\overleftarrow{\square}_2 + M^2) Q_1 Q_2 \phi(x_1, P_1) \phi(x_2, P_2) \frac{\exp[i(P_1 X_1 + P_2 X_2)]}{(2\pi)^3}. \quad (4.10)$$

以上是通过一个具体例子, 说明如何通过渐近条件来导出 S 矩阵元. 这里的特点是

T 乘积是按基本场的坐标编时而不是按质心坐标编时的。现在进一步求出 S 矩阵的普遍表示式。为方便起见，引进一些符号。将式 (2.28) 中第二项的 P_i 换成 $-P_i$ ，可进一步写成

$$B_{\text{out}}^{\text{in}}(X, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i, \zeta} \int d^4 P_i \delta(P_i^2 + M_i^2) \exp(iP_i X) \times [\theta(P_{i,0}) \phi_i^\zeta(x, p_i) b_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(\mathbf{P}_i) + \theta(-P_{i,0}) \bar{\phi}_i^\zeta(x_1 - P_i) b_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(-\mathbf{P}_i)], \quad (4.11)$$

注意到 $\phi_i^\zeta(x, P_i) = \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i)$ [见 (A.11)]，因而

$$B_{\text{out}}^{\text{in}}(X, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i, \zeta} \int d^4 P_i \delta(P_i^2 + M_i^2) \exp(iP_i X) \phi_i^\zeta[x, \epsilon(P_0)P_i] B_{\text{out}}^{\text{in}}(P_i), \quad (4.12)$$

其中

$$B_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(P_i) = \theta(P_{i,0}) b_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(\mathbf{P}_i) + \theta(-P_{i,0}) b_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(-\mathbf{P}_i), \quad (4.13)$$

并有

$$B_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(P_i) = \theta(P_{i,0}) b_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(\mathbf{P}_i) + \theta(-P_{i,0}) b_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(-\mathbf{P}_i), \quad (4.14)$$

由式 (4.12) 和 (A.11) 易得出

$$B_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(P_i) = \frac{\epsilon(P_{i,0})}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{X} d^4 x \exp(-iP_i X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, \epsilon(P_{i,0})P_i) \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} Q B_{\text{out}}^{\text{in}}(X, x), \quad (4.15)$$

而

$$B_i^{\zeta \text{out}}{}^{\text{in}}(P_i) = \frac{\epsilon(P_{i,0})}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{X} d^4 x B_{\text{out}}^{\text{in}}(X, x) \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} Q \phi(x, \epsilon(P_{i,0})P_i) \exp(iP_i X). \quad (4.16)$$

类似地对基本场 $A(X)$ 就有

$$\begin{aligned} A_{\text{out}}^{\text{in}}(X) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 k \delta(k^2 + m^2) \exp(ikX) A_{\text{out}}^{\text{in}}(\mathbf{k}) d^4 k, \\ A_{\text{out}}^{\text{in}}(k) &= \frac{i\epsilon(k_0)}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{X} \exp(-ikX) \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} A_{\text{out}}^{\text{in}}(X), \\ A_{\text{out}}^{\text{in}}(k) &= \frac{i\epsilon(k_0)}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{X} A_{\text{out}}^{\text{in}}(X) \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} \exp(ikX), \end{aligned} \quad (4.17)$$

并有

$$\begin{aligned} A^{\text{in}}(k) &= \theta(k_0) a^{\text{in}}(\mathbf{k}) + \theta(-k_0) a^{*\text{in}}(-\mathbf{k}), \\ A^{*\text{in}}(k) &= \theta(k_0) a^{*\text{in}}(\mathbf{k}) + \theta(-k_0) a^{\text{in}}(-\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

此外，由式 (3.7)，(3.9) 可得

$$\begin{aligned} [B_i^{\zeta \text{in}}(P_i), B_j^{\zeta' \text{in}}(P_j)] &= 2\omega_i \delta(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) [\theta(P_{i,0}) \theta(P_{j,0}) \\ &\quad - \theta(-P_{i,0}) \theta(-P_{j,0})] \delta_{ij} \delta_{\zeta \zeta'} \end{aligned} \quad (4.19)$$

和

$$[A^{\text{in}}(k), A^{*\text{in}}(k')] = 2\omega \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') [\theta(k_0) \theta(k'_0) - \theta(-k_0) \theta(-k'_0)]. \quad (4.20)$$

借用这些符号和公式，可以求出 S 算符的普遍表示式。为简化公式起见，这里只给出只有一个简单粒子和一个束缚粒子的 S 矩阵的普遍式子。也就是说，这里假定 $a^{\text{in}}(\mathbf{k})$ ， $a^{*\text{in}}(\mathbf{k})$ ， $b^{\zeta \text{in}}(\mathbf{P})$ ， $b^{\zeta \text{in}}{}^{\text{in}}(\mathbf{P})$ 形成完备集合。这样，就有

$$\begin{aligned}
S = & \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n!m!} \sum_{\zeta_1 \dots \zeta_m} \int d^4 k_1 \dots d^4 k_n d^4 P_1 \dots d^4 P_m C(k_1 \dots k_n; P_1 \zeta_1 \dots P_m \zeta_m) \\
& \times \delta(k_1^2 + m^2) \dots \delta(k_n^2 + m^2) \delta(P_1^2 + M^2) \dots \delta(P_m^2 + M^2) \\
& \times : A^{\text{in}}(k_1) \dots A^{\text{in}}(k_n) B^{\zeta_1^{\text{in}}}(P_1) \dots B^{\zeta_m^{\text{in}}}(P_m), \quad (4.21)
\end{aligned}$$

由式(4.21)和上述对易关系易证明

$$\begin{aligned}
C(k_1 \dots k_n; P_1 \zeta_1, \dots, P_m \zeta_m) = & (i)^{n+m} \varepsilon(k_{1,0}) \varepsilon(k_{2,0}) \dots \varepsilon(k_{n,0}) \varepsilon(P_{1,0}) \varepsilon(P_{2,0}) \dots \varepsilon(P_{m,0}) \\
& \times \langle 0 | [\dots [\dots [S, A^{*\text{in}}(k_1)] \dots A^{*\text{in}}(k_n)] B^{\zeta_1^{*\text{in}}}(P_1)] \dots B^{\zeta_m^{*\text{in}}}(P_m)] | 0 \rangle. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

利用与前面推导 S 矩阵元式(4.10)相类似的办法, 易导出下列约化公式:

$$\begin{aligned}
& [ST(A(X_1) \dots A(X_n), B(Y_1, y_1) \dots B(Y_m, y_m)), A^{*\text{in}}(k)] \\
& = \frac{i\varepsilon(k_0)}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 X_{n+1} \exp(i k X_{n+1}) (-\vec{\square}_{n+1} + m^2) \\
& \quad \times ST(A(X_1) \dots A(X_{n+1}) B(Y_1, y_1) \dots B(Y_m, y_m)) \quad (4.23)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& [ST(A(X_1) \dots A(X_n), B(Y_1, y_1) \dots B(Y_m, y_m)), B^{\zeta^{*\text{in}}}(P_{m+1})] \\
& = \frac{\varepsilon(P_{i,0})}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 Y_{m+1} d^4 y_{m+1} \exp(i P_{m+1} Y_{m+1}) \phi^{\zeta}(y_{m+1}, \varepsilon(P_{m+1,0}) P_{m+1}) Q(-\vec{\square}_{m+1} + M^2) \\
& \quad \times ST(A(X_1) \dots A(X_n) B(Y_1, y_1) \dots B(Y_{m+1}, y_{m+1})). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

注意式(4.23)–(4.24)中的 T 乘积是对 $Y + \frac{y}{2}$, $Y - \frac{y}{2}$ 编时的。将式(4.23), (4.24)代入式(4.22), 可得

$$\begin{aligned}
& C(k_1 \dots k_n, P_1 \zeta_1, \dots, P_m \zeta_m) \\
& = \frac{(-1)^{n+m}}{(2\pi)^{3/2(n+m)}} \int d^4 X_1 \dots d^4 X_n d^4 Y_1 \dots d^4 Y_m d^4 y_1 \dots d^4 y_m \exp \left[i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \\
& \quad \times \prod_j \phi^{\zeta_j}(y_j, \varepsilon(P_{j,0}) P_j) \prod_i (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_j Q_j \prod_j (-\vec{\square}_j + M^2) \\
& \quad \times \langle 0 | T(A(X_1) \dots A(X_n), B(Y_1, y_1) \dots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

如果令式(4.25)中右侧有一部分的 $k_i \rightarrow -k_i$, $P_j \rightarrow -P_j$, 就得

$$\begin{aligned}
& C(k_1 \dots k_n, P_1 \zeta_1 \dots P_m \zeta_m) = \frac{(-1)^{n+m}}{(2\pi)^{3/2(n+m)}} \int d^4 X_1 \dots d^4 X_n d^4 Y_1 \dots d^4 Y_m d^4 y_1 \dots d^4 y_m \\
& \quad \times \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \\
& \quad \times \prod_{j=1}^m \phi^{\zeta_j}(y_j, P_j) \prod_{i=1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_{j=1}^m Q_j \prod_{j=1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \\
& \quad \times \langle 0 | T(A(X_1) \dots A(X_n) B(Y_1, y_1) \dots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \\
& \quad \times \prod_{j=\mu+1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \prod_{j=\mu+1}^m Q_j \prod_{i=\lambda+1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \\
& \quad \times \prod_{j=\mu+1}^m \phi^{\zeta_j}(y_j, P_j) \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{i=\mu+1}^m P_i Y_i \right) \right]. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

如果令 $n = 0$, $m = 4$, 并令 $\phi(y, P_j)$ 是标量粒子波函数, 那末从式 (4.26) 立即得到式 (4.10).

五、关于各种不同形式的 S 矩阵和复合粒子场算子的定域性质

在上一节中得出普遍形式的 S 算符式 (4.21) 和 S 矩阵元式 (4.26). 本节将进一步给出各种相互等价的 S 矩阵的不同形式. 特别是我们将表明前面给出的式 (4.21) 和 (4.26) 要和一种扩展了的束缚态的 Mandelstam 的 S 矩阵完全等价^[4], 这正是许多基本粒子复合模型的基础^[1]. 为此, 先引进下列格林函数:

$$\begin{aligned} R(X_1 \cdots X_n; Y_1 y_1 \cdots Y_m, y_m) &\equiv \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) B(Y_1 y_1) \cdots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2^m} \int d^4 U_1 \cdots d^4 U_m d^4 u_1 \cdots d^4 u_m G(Y_1 - U_1; y_1 u_1) \cdots G(Y_\mu - U_\mu; y_\mu u_\mu) \\ &\quad \times S(X_1 \cdots X_n; U_1 u_1 \cdots U_\mu u_\mu; U_{\mu+1} u_{\mu+1} \cdots U_m u_m) \\ &\quad \times G(U_{\mu+1} - Y_{\mu+1}; u_{\mu+1}, y_{\mu+1}) \cdots G(U_m - Y_m; u_m y_m). \end{aligned} \quad (5.1)$$

不难看出, 式 (5.1) 只是 Mandelstam 在处理一个束缚态跃迁时引进相应的格林函数的一种扩展, 只不过这里包含了若干个束缚态. 可以设法给出式 (5.1) 中格林函数 S 的显式, 这只要在式 (5.1) 左右两端各自作用上一组 B-S 方程的算符 $(\vec{O} - \vec{I})$ 和 $(\vec{O} - \vec{I})$ (关于 O, I 算符的定义见附录一), 由式 (A.23a) 和 (A.23b) 有

$$\begin{aligned} &S(X_1 \cdots X_n; Y_1 y_1 \cdots Y_m y_m) \\ &= \prod_{j=1}^n (\vec{O}_j - \vec{I}_j) \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) B(Y_1 y_1) \cdots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \prod_{j=\mu+1}^m (\vec{O}_j - \vec{I}_j). \end{aligned} \quad (5.2)$$

如果进一步将式 (5.1) 代入式 (4.26), 就有

$$\begin{aligned} &C(k_1 \cdots k_n; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m) \\ &= \frac{(-1)^{n+m}}{2^m (2\pi)^{3/2(n+m)}} \int d^4 X_1 \cdots d^4 X_n d^4 Y_1 \cdots d^4 Y_m d^4 y_1 \cdots d^4 y_m \\ &\quad \times \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n \bar{\phi}^{\zeta_j}(y_j, P_j) \prod_{j=1}^m Q_j \prod_{i=1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_{j=1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \\ &\quad \times \left[\int d^4 U_1 \cdots d^4 U_m d^4 u_1 \cdots d^4 u_m G(Y_1 - U_1; y_1 u_1) \cdots G(Y_\mu - U_\mu; y_\mu u_\mu) \right. \\ &\quad \times S(X_1 \cdots X_n; U_1 u_1 \cdots U_\mu u_\mu) G(U_{\mu+1} - Y_{\mu+1}; u_{\mu+1} y_{\mu+1}) \cdots G(U_m - Y_m; u_m y_m) \left. \right] \\ &\quad \times \prod_{j=\mu+1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_{j=\mu+1}^m Q_j \prod_{j=\mu+1}^m \phi^{\zeta_j}(y_j, P_j) \\ &\quad \times \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{j=\mu+1}^m P_j Y_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

式 (5.3) 显然需要进一步简化. 为此, 利用式 (4.26) 可得到下列辅助式:

$$\begin{aligned}\chi_i^\zeta(x_1 x_2) &= \frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x, P_i) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | i, \zeta \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 Y d^4 y \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)A(y_1)A(y_2)) | 0 \rangle (-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) Q \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(y, P_i) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 Y d^4 y G(X - Y; x, y) (-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) Q \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(y, P_i).\end{aligned}\quad (5.4)$$

对于共轭波函数, 就有

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_i^\zeta(x_1 x_2) &= \frac{\exp(-iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 Y d^4 y \frac{\exp(-iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(y, P_i) Q (-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) G(Y - X; y, x).\end{aligned}\quad (5.5)$$

将式 (5.4), (5.5) 和 (5.3) 进行比较, 可得

$$\begin{aligned}C(k_1 \cdots k_n; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m) &= \frac{(-1)^{n_i m}}{(2\pi)^{3/2(n+m)}} \int d^4 X_1 \cdots d^4 X_n d^4 Y_1 \cdots d^4 Y_m d^4 y_1 \cdots d^4 y_m \\ &\times \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \prod_{j=1}^m \bar{\phi}_i^{\zeta_j}(y_j, P_j) \prod_{i=1}^n (-\overrightarrow{\square}_i + m^2) \\ &\times S(X_1 \cdots X_n; Y_1 y_1 \cdots Y_m y_m) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\overleftarrow{\square}_i + m^2) \prod_{j=\mu+1}^m \phi_i^{\zeta_j}(y_j, P_j) \\ &\times \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{i=\mu+1}^m P_i Y_i \right) \right].\end{aligned}\quad (5.6)$$

式 (5.6) 即是扩展了的包含多个束缚态的 Mandelstam 的 S 矩阵, 其中格林函数 S 将由式 (5.1) 给出. 如果进一步将式 (5.2) 代入式 (5.6), 就得到

$$\begin{aligned}C(k_1 \cdots k_n; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m) &= \frac{(-1)^{n_i m}}{(2\pi)^{3/2(n+m)}} \int d^4 X_1 \cdots d^4 X_n d^4 Y_1 \cdots d^4 Y_m d^4 y_1 \cdots d^4 y_m \\ &\times \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \prod_{j=1}^m \bar{\phi}_i^{\zeta_j}(y_j, P_j) \prod_{i=1}^n (-\overrightarrow{\square}_i + m^2) \\ &\times \prod_{j=1}^m (\bar{\partial}_j - \tilde{I}_j) \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) B(Y_1, y_1) \cdots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \\ &\times \prod_{j=\mu+1}^m (\bar{\partial}_j - \tilde{I}_j) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\overleftarrow{\square}_i + m^2) \prod_{j=\mu+1}^m \phi_i^{\zeta_j}(y_j, P_j) \\ &\times \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{i=\mu+1}^m P_i Y_i \right) \right].\end{aligned}\quad (5.7)$$

这里还能导出另外两种形式的 S 矩阵. 为此, 先引进一个辅助式. 在式 (A.26) 的两边作用克莱因-戈登算符 $(-\overrightarrow{\square}_x + M_i^2)$, 乘上相应于束缚态 i 在质壳上的平面波 $\exp(-iP_i X)$ (即有 $P_i^2 + M_i^2 = 0$) 并对 $d^4 X$ 积分, 就有

$$\begin{aligned}
& \int d^4X \exp(-iP_i X) (-\overrightarrow{\square}_X + M_i^2) G(X - Y; x, y) \\
& = -2i \exp(-iP_i Y) \sum_{\zeta} \phi_i^{\zeta}(x, P_i) \bar{\phi}_i^{\zeta}(y, P_i).
\end{aligned} \quad (5.8)$$

如果从左边作用上 $(-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2)$, 乘上 $\exp(iP_i Y)$ 并对 d^4Y 积分, 就有

$$\begin{aligned}
& \int d^4Y G(X - Y; x, y) (-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) \exp(iP_i Y) \\
& = -2i \exp(iP_i X) \sum_{\zeta} \phi_i^{\zeta}(x, P_i) \bar{\phi}_i^{\zeta}(y, P_i).
\end{aligned} \quad (5.9)$$

注意在导出式(5.8), (5.9)时, 由于 P_i 是在质量壳上, 在对 d^4X 积分后得到函数 $\delta^4(P_i - P)$, 因而在式(A.26)中就只有极点项有贡献, 其余非极点项的贡献是零. 进一步再在式(5.1)的两端乘上和各个基本场和复合粒子态相应的克莱因-戈登算符的乘积和平面波的乘积并对四度时空积分, 式(5.1)就成为

$$\begin{aligned}
& \int d^4X_1 \cdots d^4X_n d^4Y_1 \cdots d^4Y_m \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^{\lambda} k_i X_i + \sum_{j=1}^{\mu} P_j Y_j \right) \right] \prod_{i=1}^{\lambda} (-\overrightarrow{\square}_i + m^2) \\
& \times \prod_{j=1}^{\mu} (-\overrightarrow{\square}_j + M^2) \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) B(Y_1, y_1) \cdots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \\
& \times \prod_{j=\mu+1}^m (-\overleftarrow{\square}_j + M^2) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\overleftarrow{\square}_i + m^2) \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{j=\mu+1}^m P_j Y_j \right) \right] \\
& = \frac{1}{2^m} \int d^4X_1 \cdots d^4X_n d^4Y_1 \cdots d^4Y_m \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^{\lambda} k_i X_i + \sum_{j=1}^{\mu} P_j Y_j \right) \right] \prod_{i=1}^{\lambda} (-\overrightarrow{\square}_i + m^2) \\
& \times \prod_{j=1}^{\mu} (-\overrightarrow{\square}_j + M^2) \int d^4U_1 \cdots d^4U_m d^4u_1 \cdots d^4u_m \\
& \times G(Y_1 - U_1; y_1 u_1) \cdots G(Y_{\mu} - U_{\mu}; y_{\mu} u_{\mu}) S(X_1 \cdots X_n; U_1 u_1 \cdots U_m u_m) \\
& \times G(U_{\mu+1} - Y_{\mu+1}; u_{\mu+1}, y_{\mu+1}) \cdots G(U_m - Y_m; u_m y_m) \\
& \times \prod_{j=\mu+1}^m (-\overleftarrow{\square}_j + M^2) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\overleftarrow{\square}_i + m^2) \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{j=\mu+1}^m P_j Y_j \right) \right].
\end{aligned} \quad (5.10)$$

将式(5.8), (5.9)代入式(5.10)的右端, 并利用式(5.6), 就有

$$\begin{aligned}
& \sum_{\zeta_1 \cdots \zeta_m} \prod_{j=1}^{\mu} \bar{\phi}_i^{\zeta_j}(y_j, P_j) C(k_1 \cdots k_n; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m) \prod_{j=\mu+1}^m \bar{\phi}_i^{\zeta_j}(y_j, P_j) \\
& = \frac{(-)^{m+n}}{(2\pi)^{3/2(m+n)}} \int d^4X_1 \cdots d^4X_n d^4Y_1 \cdots d^4Y_m \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^{\lambda} k_i X_i + \sum_{j=1}^{\mu} P_j Y_j \right) \right] \\
& \times \prod_{i=1}^{\lambda} (-\overrightarrow{\square}_i + m^2) \prod_{j=1}^{\mu} (-\overrightarrow{\square}_j + M^2) \\
& \times \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) B(Y_1, y_1) \cdots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \\
& \times \prod_{j=\mu+1}^m (-\overleftarrow{\square}_j + M^2) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\overleftarrow{\square}_i + m^2) \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{j=\mu+1}^m P_j Y_j \right) \right].
\end{aligned} \quad (5.11)$$

注意到式(5.11)左端波函数 $\phi(y, P)$ 和 $C(k_1 \cdots k_m; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m)$ 在空间变数上是相互分离的, 因而如果在式(5.1)的两端乘上一组满足下列正交条件

$$\int d^4 y_i \bar{\phi}^{\zeta'_i}(y_i, P_i) \phi^{\zeta_i}(y_i, P_i) = \int d^4 y_i \bar{\phi}^{\zeta_i}(y_i, P_i) \phi^{\zeta'_i}(y_i, P_i) = \delta_{\zeta_i \zeta'_i} \quad (5.12)$$

的正交函数 $\phi^{\zeta'_i}(y_i, P_i)$ 和 $\bar{\phi}^{\zeta'_i}(y_i, P_i)$, 并对 $d^4 y_1 \cdots d^4 y_m$ 积分, 可得

$$\begin{aligned} C(k_1 \cdots k_n; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m) &= \frac{(-1)^{n+m}}{(2\pi)^{3/2(n+m)}} \int d^4 X_1 \cdots d^4 X_n d^4 Y_1 \cdots d^4 Y_m d^4 y_1 \cdots d^4 y_m \\ &\times \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \prod_{j=1}^m \bar{\phi}^{\zeta_j}(y_j, P_j) \prod_{i=1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \\ &\times \prod_{j=1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) B(Y_1, y_1) \cdots B(Y_m, y_m)) | 0 \rangle \\ &\times \prod_{j=\mu+1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_{i=\mu+1}^m \phi^{\zeta_i}(y_i, P_i) \\ &\times \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{j=\mu+1}^m P_j Y_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

于是就得到和式(4.26)相等价的 S 矩阵的又一形式. 如果令(5.12)式中的 ϕ 函数等同于 B-S 方程的正交归一波函数, 即令(5.12) $\equiv$ (A.38), 式(5.13)和(4.26)就完全相同. 但式(5.13)的一个重要特点就是函数 ϕ 可以是任意满足条件式(5.12)的任何函数, 这就比式(4.26)广泛得多了. 考虑到波函数 $\phi^\zeta(y, P)$ 的普遍形式是

$$\phi^\zeta(y, P) = \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n} \phi(y^2, yP, P^2) y_{\mu_1} \cdots y_{\mu_n} \cdot f_{\mu_1 \cdots \mu_n}^\zeta, \quad (5.14)$$

其中 $f_{\mu_1 \cdots \mu_n}^\zeta$ 是极化张量, 它的定义见附录二, 因而对于正交函数 $\bar{\phi}^{\zeta'}(y, P)$ 可以特殊地选择为

$$\bar{\phi}^{\zeta'}(y, P) = \phi^{\zeta'}(y, P) = \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n} \delta^4(y) \cdot y_{\mu_1} \cdots y_{\mu_n} \cdot f_{\mu_1 \cdots \mu_n}^\zeta / |y|^n \phi(0, P^2). \quad (5.15)$$

将式(5.15)代入式(5.13), 引入一个新的场算符

$$\varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n}^i(y) = \lim_{y \rightarrow 0} B(Y, y) y_{\mu_1} \cdots y_{\mu_n} / |y|^n \phi_i(0, P^2), \quad (5.16)$$

可得

$$\begin{aligned} C(k_1 \cdots k_n; P_1 \zeta_1 \cdots P_m \zeta_m) &= \frac{(-1)^{n+m}}{(2\pi)^{3/2(n+m)}} \sum_{\mu_1 \cdots \mu_n} \int d^4 X_1 \cdots d^4 X_n d^4 Y_1 \cdots d^4 Y_m \\ &\times \exp \left[-i \left(\sum_{i=1}^n k_i X_i + \sum_{j=1}^m P_j Y_j \right) \right] \prod_{j=1}^m f_{\mu_1 \cdots \mu_n}^{\zeta_j} \prod_{i=1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_{j=1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \\ &\times \langle 0 | T(A(X_1) \cdots A(X_n) \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(Y_1) \cdots \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(Y_m)) | 0 \rangle \\ &\times \prod_{j=\mu+1}^m (-\vec{\square}_j + M^2) \prod_{i=\lambda+1}^n (-\vec{\square}_i + m^2) \prod_{j=\mu+1}^m f_{\mu_1 \cdots \mu_n}^{\zeta_j} \\ &\times \exp \left[i \left(\sum_{i=\lambda+1}^n k_i X_i + \sum_{j=\mu+1}^m P_j Y_j \right) \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

这便是相互等价的 S 矩阵的又一形式。由式 (2.7) 和假定 III, 易证

$$[\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X), \varphi_{\nu_1 \dots \nu_n}^j(Y)] = 0 \quad \text{当 } X \sim Y \text{ 类空.} \quad (5.18)$$

也就是 $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X)$ 是定域场量。总之, 我们一共有式 (4.26), (5.6), (5.7), (5.13) 和 (5.17) 五种相互等价的 S 矩阵不同形式。特别是其中能明显地表现出基本粒子结构的 S 矩阵 (4.26), (5.6), (5.7) 竟然和通常的定域场论的 S 矩阵相等价, 这是这一理论的特殊结果。这仿佛是定域场论既能描述通常点粒子的运动, 又能描述复合粒子的质心运动; 正如牛顿力学的运动方程式, 既能描述质点运动, 又能描述复合粒子的质心运动一样。

其实, 类似的关系, 在 H-N-Z 只适用一个能级的束缚态场论中, 已经得到。如果令式 (5.16) 中的自旋变量为零, 就直接得到式 (1.1)。但这里的结果表明, 复合场的定域性质可以推广到含有多个能级的情形, 但又能和 B-S 方程理论联系起来。乍一看来, 这一结果似乎是难以理解的。因为在 H-N-Z 那里只包含一个能级, 只要能够有变数分离的性质就可以定义一个定域场量, 而在这里, 却非要通过积分来将内部的相对自由度积掉。例如, 对于 $B(X, x)$, 如果有

$$\begin{aligned} B(X, x) = \sum_{i, \zeta} \int \frac{d^3 P_i}{2\omega_i} [b_i^\zeta(P_i, T) \exp(iP_i X) \phi_i^\zeta(x, P_i) \\ + b_i^{\zeta*}(P_i, T) \exp(-iP_i X) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P_i)] = \sum_i B_i(X, x), \end{aligned} \quad (5.19)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 就有

$$\begin{aligned} B(X, 0) = \sum_{i, \zeta} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(0, P_i^2) \int \frac{d^3 P_i}{2\omega_i} [b_i^\zeta(P_i, T) \exp(iP_i X) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta \\ + b_i^{\zeta*}(P_i, T) \exp(-iP_i X) \bar{f}_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta] = \sum_i \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(0, P_i^2) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X). \end{aligned} \quad (5.20)$$

可是尽管式 (5.20) 中 $B(X, 0)$ 是定域场量, 却不能由此就认为 $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X)$ 也是定域场量。因为如果 $B(X, x)$ 是双重定域场量, 即有

$$\left[\sum_i B_i(X, x), \sum_j B_j(Y, y) \right] = 0 \quad \text{当 } X \pm \frac{1}{2}x \sim Y \pm \frac{y}{2} \text{ 类空.} \quad (5.21)$$

但如果取一套正交归一共轭波函数和权重函数乘上去却要对整个空间积分, 但式 (5.21) 却只当 $X \pm \frac{x}{2} \sim Y \pm \frac{y}{2}$ 是类空时才可对易, 因而就得不到其中某个分量如 $B_i(X, x)$ 也具有双重定域性质。实际上, 由式 (5.16) 所给出的定域场量 $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(Y)$ 只能在 S 矩阵相等价的意义上才有一定的物理内容, 不能理解为算子的某种普遍性质。

对于上述结果还可以从另一角度来理解。L-S-Z 场论有一个著名的性质, 即 S 矩阵在质量壳上是完全确定而在质量壳外却是可以任意外延的。由于物理上只要求 S 矩阵在质量壳上有确定的数值, 所以从 L-S-Z 的场论来看, 可以有无穷多个插入场和流算符相应于同一 S 矩阵。或者说, S 矩阵可以对应于无穷多个哈密顿函数。这里也有类似的情况。由式 (4.21) 显然可对函数 $C(k_1 \dots k_n; P_1 \zeta_1 \dots P_m \zeta_m)$ 加上任意的函数 C' , 只要 C' 在质量壳上的数值是零, 就不会改变 S 矩阵的性质。但是, 由式 (4.25) 和 (4.26) 所给出的 $C(k_1 \dots k_n; P_1 \zeta_1 \dots P_m \zeta_m)$ 函数, 包括质量壳外, 却是确定的。这就使我们有可能重新定义插入场算符来改变式 (4.21) 中的函数 $C(k_1 \dots k_n; P_1 \zeta_1 \dots P_m \zeta_m)$, 但仍保持这些函数值在

质量壳上不变. 为此, 我们先来讨论双粒子场流算符在保持质量壳上数值不变的条件下可能具有什么形式.

由式 (A.23) 和 (2.35) 可得到

$$B(X, x) = \frac{1}{2} \int d^4 Y d^4 y G(X - Y; x, y) J(Y, y). \quad (5.22)$$

式 (5.22) 中还有一自由项, 但由于在以后的计算中实际上没有贡献因而略去. 将克莱因-戈登算符作用于式 (5.22), 并将式 (A.25) 代入, 可得

$$\begin{aligned} (-\square + M_i^2) B(X, x) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 Y d^4 y \sum_{i, \zeta} \int d^4 P_i (P_i^2 + M_i^2) \\ &\times \left\{ \exp[iP_i(X - Y)] \frac{\phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i)}{2\omega_i(P_{i,0} - \omega_i + i\epsilon)} \right. \\ &+ \exp[-iP_i(X - Y)] \frac{\phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i)}{2\omega_i(P_{i,0} - \omega_i + i\epsilon)} \\ &\left. + \text{其它极点以外的项} \right\} J(Y, y), \end{aligned} \quad (5.23)$$

将式 (5.23) 乘上 $\exp(-iPX)$ 并对 $d^4 X$ 积分, 可得

$$\begin{aligned} J(P, x) &= \int d^4 X \exp(-iPX) (\square + M_i^2) B(X, x) \\ &= i(P^2 + M_i^2) \int d^4 Y d^4 y \left\{ \exp(-iPY) \frac{\phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}, \omega) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}, \omega)}{2\omega(P_0 - \omega + i\epsilon)} + \text{其它} \right\} J(Y, y), \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中 $\omega = \omega_i = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M_i^2}$. 在质量壳上, $P_0^2 - \omega^2 = 0$, 因而式 (5.24) 中所有非极点项是零, 于是

$$\begin{aligned} J(P, x) |_{P_0 \rightarrow \omega_i} &= -i \int d^4 Y d^4 y \exp[-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Y} - \omega_i Y_0)] \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}, \omega) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}, \omega) J(Y, y). \end{aligned} \quad (5.25)$$

考虑到质量壳外的流算符可以任意外延, 这里选择的一种外延方法是令指数上的 $\omega_i \rightarrow P_0$, 这样, 就有

$$J(P, x) = -i \int d^4 Y d^4 y \exp(-iPY) \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}, \omega) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}, \omega) J(Y, y), \quad (5.26)$$

将式 (5.26) 中的 $P \rightarrow P_i$, 乘上 $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp(iP_i X)$ 再对 $d^4 P_i$ 积分, 就有

$$\begin{aligned} (-\square + M_i^2) B(X, x) &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \sum_{\zeta} \int d^4 Y d^4 y d^4 P_i \exp[iP_i(X - Y)] \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y). \end{aligned} \quad (5.27)$$

如果对式 (5.23) 乘上 $\exp(iPX)$ 并对 $d^4 X$ 积分, 再取质量壳条件并进行延拓, 就有

$$\begin{aligned} (\square + M_i^2) B(X, x) &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \sum_{\zeta} \int d^4 Y d^4 y d^4 P_i \exp[-iP_i(X - Y)] \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y). \end{aligned} \quad (5.28)$$

将式 (5.27) 和 (5.28) 进行比较, 显然 (5.27) $\neq$ (5.28). 这是因为前者是对出射粒子取质量壳条件, 后者是对入射粒子取质量壳条件. 将式 (5.27) 代入式 (2.39), (2.41), 式 (5.28) 代入式 (2.40), (2.42), 注意到式 (5.27), (5.28) 中 $P_{i,0}$ 是变数, 并可用 $\frac{1}{2\pi} \int dP_{i,0} \exp[iP_{i,0}(X_0 - Y_0)] = \delta(X_0 - Y_0)$, 因而就有

$$\begin{aligned} b_i^\zeta(\mathbf{P}_i, T) - b_i^{\zeta \text{ in}}(\mathbf{P}_i) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4Y d^4y \theta(T - Y_0) \exp(-iP_i Y) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} b_i^{\zeta*}(\mathbf{P}_i, T) - b_i^{\zeta* \text{ in}}(\mathbf{P}_i) \\ = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4Y d^4y \theta(T - Y_0) \exp(iP_i Y) \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} b_i^\zeta(\mathbf{P}_i, T) - b_i^{\zeta \text{ out}}(\mathbf{P}_i) \\ = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4Y d^4y \theta(Y_0 - T) \exp(-iP_i Y) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y), \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} b_i^{\zeta*}(\mathbf{P}_i, T) - b_i^{\zeta* \text{ out}}(\mathbf{P}_i) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4Y d^4y \theta(Y_0 - T) \exp(iP_i Y) \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y). \end{aligned} \quad (5.32)$$

注意在式 (5.29)–(5.32) 中, $P_{i0} \equiv \omega_i$.

如果我们在式 (5.29), (5.31) 和式 (5.30), (5.32) 两边分别乘上 $\frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta$ 以及 $\frac{\exp(-iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta$, 两式相加再对 $\frac{d^3 \mathbf{P}_i}{2\omega_i}$ 积分和对 ζ 求和, 就有

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) - \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i \text{ in}}(X) \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\zeta \int d^4Y d^4y \frac{d^3 \mathbf{P}_i}{2\omega_i} [\theta(X_0 - Y_0) \exp[iP_i(X - Y)] \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta \\ + \theta(Y_0 - X_0) \exp[-iP_i(X - Y)] \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta] J(Y, y), \end{aligned} \quad (5.33)$$

其中 $f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta$ 是极化张量, 其定义见附录二. 将式 (5.33) 中的 θ 函数换成极点, 就有

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) - \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i \text{ in}}(X) \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\zeta \int d^4Y d^4y d^4P_i \left[\frac{\exp[iP_i(X - Y)] \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta}{2\omega_i(P_{i0} - \omega_i + i\epsilon)} \right. \\ \left. + \frac{\exp[-iP_i(X - Y)] \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta}{2\omega_i(P_{i0} - \omega_i + i\epsilon)} \right] J(Y, y). \end{aligned} \quad (5.34)$$

如果进一步将微分算子 $(-\square + M_i^2)$ 作用上去, 仍然如前一样, 取质量壳条件再外延到 $P_{i0} \approx \omega_i$, 对于出射粒子就有

$$\begin{aligned} J_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) = (-\square + M_i^2) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) \\ = \frac{-i}{(2\pi)^4} \sum_\zeta \int d^4Y d^4y d^4P \exp[iP(X - Y)] f_{\mu_1 \dots \mu_n}^\zeta \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, y); \end{aligned} \quad (5.35)$$

对于入射粒子则为

$$\begin{aligned} J_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) &= (-\square + M_i^2) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \sum_c \int d^4Y d^4\gamma d^4P \exp[-iP(X-Y)] f_{\mu_1 \dots \mu_n}^c \phi_i^\zeta(\gamma, \mathbf{P}_i, \omega_i) J(Y, \gamma). \end{aligned} \quad (5.36)$$

由式(5.35), (5.36), 可得到

$$\begin{aligned} (-\square + M_i^2) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\text{out}}(X) &= 0, \\ \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\text{out}}(X) &= \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) - \int \Delta_A(X-X') J_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X') dX'. \end{aligned} \quad (5.37)$$

由式(5.35), (5.36)可以看出, 场量 $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X)$ 和流 $J_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X)$ 是迹等于零的对称张量, 由于 P_μ 不在质量壳上, 因而一般地没有

$$P_\mu \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) = P_\mu J_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) = 0. \quad (5.38)$$

值得进一步探讨的是这里新定义的场量算符 $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X)$ 的性质. 首先比较式(2.39)—(2.42) 和式(5.29)—(5.32) 这两组渐近条件的不同点在于前者包含格林函数中所有的项, 而后者却只包含和复合粒子相对应的极点项, 其中多余的项是由“质量壳条件”所去掉的. 实际上, 这里相当于重新定义 $b_i^\zeta(\mathbf{P}, T)$ 和 $b_i^{\zeta*}(\mathbf{P}, T)$, 也就是在式(2.39)—(2.42) 左右两边各自减去了相等的一些项. 其次, 从导出式(5.29), (5.32) 的过程来看, 这里所要的只是极点上留数的值, 至于如何得到这个留数却是不重要的. 从表面上看, 这里极点项留数的导出是由于应用了正交归一条件, 即用了 $\frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) Q$ 和波函数 $\frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i)$ 的乘积为 1 的条件而得到的. 但实际上任何一个能和 $\frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i)$ 相归一的函数都能得到在质量壳上相同的留数. 因此, 这一函数的选取可以具有很大的任意性, 正如式(5.12) 中对 ϕ 函数的选取可以有很大的任意性一样. 特殊地说, 如果令 $\bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) Q \rightarrow i\delta^4(x) \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} f_{\mu_1 \dots \mu_n} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} / |x|^n \bar{\phi}^i(0, P_i^2)$, 就可以得到同样的留数. 这时, 就等价于重新定义一个新的插入场算符 $b_i^{\zeta'}(\mathbf{P}, T)$, 即有

$$\begin{aligned} b_i^{\zeta'}(\mathbf{P}, T) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \int d^3X d^4x \exp(-iPX) \delta^4(x) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^c x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \\ &\quad \times \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} B(X, x) / |x|^n \bar{\phi}^i(0, P_i^2) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \int d^3X \exp(-iPX) \\ &\quad \times \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B(X, x) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n}}{\bar{\phi}^i(0, P_i^2) |x|^n} \right] f_{\mu_1 \dots \mu_n}^c. \end{aligned} \quad (5.39)$$

对于共轭算符就要令 $Q \phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \rightarrow i\delta^4(x) \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^c x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} / |x|^n \bar{\phi}^i(0, P_i^2)$, 因而有

$$b_i^{\zeta*'}(\mathbf{P}, T) = \frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \int d^3X \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B(X, x) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n}}{\bar{\phi}^i(0, P_i^2) |x|^n} \right] \frac{\tilde{\partial}}{\partial X_0} \exp(iPX) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^c. \quad (5.40)$$

由于 $\phi^i(0, P_i) \equiv \bar{\phi}^i(0, P_i^2)$, 并为了避免零点的奇异性起见, 通常选自类空方向趋向于零. 因而就有

$$\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (\text{自类空方向})}} B(X, x) x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} / |x|^n \bar{\phi}^i(0, P_i^2). \quad (5.41)$$

这和式 (5.16) 完全相同。这样, 我们便从另一角度, 即插入场可以有一定的任意性的角度而重新定义了一个等价的、但具有定域性质的场量式 (5.41)。将式 (5.39), (5.40) 代替式 (2.27), 并重复一系列推导 S 矩阵式 (4.26) 的过程, 就能得到式 (5.17)。利用渐近条件式 (5.29)–(5.32), 重覆应用推导式 (4.4)–(4.10) 和 (4.23), (4.24) 的方法, 就能导出 S 矩阵式 (5.6) 和 (5.7)。这样, 我们又从另一角度得到了由式 (4.26), (5.6), (5.7), (5.13) 以及 (5.17) 所表示的五种相互等价的 S 矩阵的不同形式。下面我们将应用这一理论来讨论一些具体问题。

六、关于复合场量子场论的一些应用

在上面所给出的复合场场论主要是综合了两方面的理论, 一是用来处理束缚态问题的相对论方程, 即 B-S 方程; 另一是 L-S-Z 的量子场论和它们的扩充, H-N-Z 的束缚态场论。因而将目前的场论应用到某些更为特殊的情形时, 就能导出由其它理论所获得的结果。下面将通过一些具体实例来讨论这一理论的自洽性, 并将讨论它的应用的前景。

1. 关于波函数

$$\chi_i^\zeta(x_1 x_2) = \frac{\exp(iP_i X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(x_i P_i) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1) A(x_2)) | i, \zeta \rangle, \quad (6.1)$$

应用式 (4.26), 把粒子 i 搬进来, 可得

$$\begin{aligned} \chi_i^\zeta(x_1 x_2) &= \frac{1}{2} \int d^4 Y d^4 y \langle 0 | T(A(x_1) A(x_2) A(y_1) A(y_2)) | 0 \rangle \\ &\quad \times (-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) Q \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(y, P_i), \end{aligned} \quad (6.2)$$

应用式 (5.17), 令

$$Q \phi_i^\zeta(y, P_i) \rightarrow i\delta^4(y) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} f_{\mu_1, \dots, \mu_n}^\zeta x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_n} / |x|^n \bar{\phi}^i(0, P_i^2),$$

就有

$$\begin{aligned} \chi_i^\zeta(x_1 x_2) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} \int d^4 Y \langle 0 | T(A(x_1) A(x_2) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^i(Y)) | 0 \rangle \\ &\quad \times (-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) f_{\mu_1, \dots, \mu_n}^\zeta \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

这就是通常的 B-S 波函数和顶角函数相联系的式子。应用式 (5.7), 将式 (6.2) 中 $(-\overleftarrow{\square}_Y + M_i^2) Q \rightarrow (\bar{O} - \bar{I})$, 就有

$$\begin{aligned} \chi_i^\zeta(x_1 x_2) &= \frac{1}{2} \int d^4 Y d^4 y \langle 0 | T(A(x_1) A(x_2) A(y_1) A(y_2)) | 0 \rangle \\ &\quad \times (\bar{O} - \bar{I}) \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(y, P_i), \end{aligned} \quad (6.4)$$

由式 (A.23b), 显然有

$$\chi_i^\zeta(x_1 x_2) \equiv \frac{\exp(iP_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_i^\zeta(y, P_i). \quad (6.5)$$

比较式 (6.3) 和 (6.4), 就有

$$\begin{aligned} i \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} \int d^4 Y J_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(Y) f_{\mu_1 \dots \mu_n}^c \frac{\exp(i P_i Y)}{(2\pi)^{3/2}} \\ = \int d^4 Y d^4 y J(Y, y) \phi_i^c(y, P_i) \frac{\exp(i P_i Y)}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

将式 (5.36) 代入式 (6.6), 容易验证左右两边完全相等. 这意味着式 (5.36) 是式 (6.6) 成立的一个充分条件. 或者说这是 B-S 方程和 L-S-Z 定域场论能同时成立的一个充分条件. 实际上, 我们正是由式 (5.36) 和 (6.6) 而“猜”到可能存在这样一种复合场的量子场论体系的.

2. 关于散射

关于基本场和复合场之间的散射问题既可以用通常的 L-S-Z 体系来表示, 也可以通过 B-S 波函数来表示. 这一等价性也应反映在现有的 S 矩阵理论. 设基本场间散射矩阵

$$\begin{aligned} \text{out} \langle a_3 a_4 | a_1 a_2 \rangle^{\text{in}} &= I_{34, 12} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 x_3 d^4 x_4 \exp[-i(p_3 x_3 + p_4 x_4)] \\ &\times (-\square_3 + m^2)(-\square_4 + m^2) \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T[A(x_3)A(x_4)] | a_1 a_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.7)$$

由式 (2.35), (2.36) 就有

$$\begin{aligned} \text{out} \langle a_3 a_4 | a_1 a_2 \rangle^{\text{in}} &= I_{34, 12} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 x_3 d^4 x_4 d^4 y_1 d^4 y_2 \exp[-i(p_3 x_3 + p_4 x_4)] \\ &\times I(x_3 x_4, y_1 y_2) \Phi(y_1 y_2) = I_{34, 12} + \int d^4 X d^4 x d^4 Y d^4 y \frac{\exp[-i(P'X + qx)]}{(2\pi)^3} \\ &\times I(X - Y; x, y) \frac{\exp(iPY)}{(2\pi)^{3/2}} \phi(y, P). \end{aligned} \quad (6.8)$$

这就是通常用 B-S 波函数所表示的 S 矩阵^[9]. 由于

$$\int d^3 \mathbf{X}' \frac{\exp(-iPX')}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\delta}{\delta X'_0} \Delta(X' - X) = -\frac{i \exp(-iPX)}{(2\pi)^{3/2}}$$

和

$$\langle 0 | B(X, x) | a_1 a_2 \rangle = \langle 0 | B^{\text{in}}(X, x) | a_1 a_2 \rangle \quad (6.9)$$

[这要假设式 (2.59) 和 (2.48) 成立], 以及式 (2.72), 可得

$$\begin{aligned} \text{out} \langle a_3 a_4 | a_1 a_2 \rangle^{\text{in}} &= I_{34, 12} - \int d^3 \mathbf{x}_3 d^3 \mathbf{x}_4 \frac{\exp[-i(p_3 x_3 + p_4 x_4)]}{(2\pi)^3} \\ &\times \frac{\delta}{\delta x_{3,0}} \frac{\delta}{\delta x_{4,0}} \left[\Phi(x_3 x_4) - \frac{\exp[-i(p_1 x_3 + p_2 x_4)] + \exp[i(p_1 x_4 + p_2 x_3)]}{\sqrt{2} (2\pi)^3} \right], \end{aligned} \quad (6.10)$$

于是就得到通常用 B-S 波函数来表示 S 矩阵的又一形式^[10].

对于基本场和复合场的散射也可以给出类似的式子, 但这时要用到多体 B-S 方程.

3. 关于色散关系

色散关系的理论在现代高能散射的实验中已有较精密的实验验证. 某些实验已经表明基本长度 $l \lesssim 10^{-15}$ 厘米. 这已远小于核子半径. 如果基本粒子是复合场的量子, 那末

复合场场论应满足色散关系, 否则就和实验不符. 色散关系的证明是以 R 乘积为基础的, 这里用的是 T 乘积. 但正如我们在第五节中所表明的, 在保持 S 矩阵在质量壳不变的情况下, 可以定义一个定域的插入场算符来表示复合粒子, 并且具有和通常定域场论相一致的渐近条件. 因而可以借助于这个新的插入场算符来定义 R 乘积并导出色散关系. 因而这一理论又概括了通常定域场论的积极结果.

从这一观点出发, 近代一些原子核工作者将色散关系理论移植到原子核理论中, 乍一看来, 似乎和定域场论的假定相差太远. 但正如这里的理论所表明的, 这一移植是有一定的理论根据的.

4. 关于积分方程

在 L-S-Z 定域场论中, 可以利用 T 乘积和 R 乘积的某些恒等式而导出积分方程. 利用这些积分方程, 可以得到按耦合常数展开的微扰级数. 这里也可得到类似的积分方程. 例如, 在 T 乘积间有恒等式

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-i)^n (-1)^k}{k!(n-k)!} T^+(x_1 \cdots x_k) T(x_{k+1} \cdots x_n) = 0, \quad (6.11)$$

其中 T^+ 是反编时算符. 如果对式 (6.11) 取真空平均值, 并在 T^+ 和 T 之间塞进一系列的中间态, 再将这些中间态用约化公式将它们搬进来, 就可以得到一系列相耦合的积分方程. 为简化算式起见, 我们假定只有一个束缚态存在并且自旋为零, 就可以求出

$$\begin{aligned} 0 = & \tau(x_1 \cdots x_n) + \tau^+(x_1 \cdots x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!k!(n-k)!2^{2l}} \int d^4 u_1 \cdots d^4 u_{2l} \\ & \times \int d^4 v_1 \cdots d^4 v_{2l} \tau(x_1 \cdots x_k; u_1 \cdots u_{2l}) (\bar{O} - \bar{I})_1 \cdots (\bar{O} - \bar{I})_l \Phi(u_1 u_2) \cdots \\ & \times \Phi(u_{2l-1}, u_{2l}) \Phi^+(v_{2l-1}, v_{2l}) \cdots \Phi^+(v_1 v_2) (\bar{O} - \bar{I})_l^+ \cdots \\ & \times (\bar{O} - \bar{I})_1^+ \tau^+(x_{k+1} \cdots x_n; v_1 \cdots v_{2l}), \end{aligned} \quad (6.12)$$

其中 $\tau(x_1 \cdots x_n) = (-i)^n \langle 0 | T(A(x_1) \cdots A(x_n)) | 0 \rangle$, 而 τ^+ 是 τ 函数的厄米共轭. 对于这些积分方程的微扰解的问题, 我们将另行讨论.

七、几点 结 论

前面建立了一个新的复合场场论的体系, 这一体系在本质上是 H-N-Z 束缚态场论进一步的推广. 总结起来, 这里所获得的结果有以下三点:

1. 我们推广了 H-N-Z 的束缚态场论, 使它能应用于许多复合粒子的情形, 但却又保留了 H-N-Z S 矩阵理论的核心, 即可以引进一个定域算子来描述束缚态.

2. 由于引进了双粒子场量的 B-S 方程, 这就能够将定域性场论和 B-S 方程的理论统一起来, 得到若干个实质上是相互等价的 S 矩阵形式, 特别是其中概括了 B-S 方程中处理束缚态跃迁的理论, 并使我们推广应用到产生和消灭许多束缚态粒子的情形. 这样, 就能得到一个新的 S 矩阵理论, 它既能包括一系列定域场论的结果, 又能导出各种基本粒子的复合场模型, 如层子模型、夸克模型等. 作为二者的结合, 还能把流代数的结果

也概括在内,使得有可能应用这一新的 S 矩阵理论来进一步探讨基本粒子理论的各种问题。

3. 还得到了这样一个结果,即由基本场的“入”场和复合场的“入”场的完备性可以导出基本场的完备性,但不能倒过来。这意味着对“入”场完备集合大小的假设上,可以有一定的任意性。特殊地说,可以认为基本场不一定都表现为“入”场形态,而只表现为复合粒子的“入”场形态,但仍能得到自相封闭的 S 矩阵的体系。这就为塑造新的基本粒子模型提供了新的可能性。

此外,我们还解决了 H-N-Z 束缚态场论中一些技术上的困难。

总之,现代基本粒子理论迫切需要有新的飞跃,首先是各种各样处在尝试阶段的种种观点。本文试图给出这种可能的观点之一。今后将把这一场论改写成为更适用于具体模型的形式,并用来探讨各种具体问题。

作者们感谢戴元本、阮图南同志经常参加讨论,感谢朱洪元教授,冼鼎昌同志以及北京基本粒子讨论班的诸位同志们提出许多有益的批评。

附 录 一

关于 B-S 波函数以及 B-S 方程的若干性质

关于 B-S 方程的研究是从 1950 年开始的^[10]。由于这一方程是和量子场论相自治的、严格的、相对论的多体方程,因而在处理束缚态问题上, B-S 方程一直受到极大的注意。多年来在 B-S 方程方面有许多工作,在 Nakanishi 所写的一篇总结性论文上有很好的总结^[11]。但正如许多研究者所指出的那样, B-S 方程波函数的物理意义一直还不太清楚;至于它们的反常解就更不清楚了;它们的正交归一条件多年来一直还在探讨;至于 B-S 方程的解的完备性问题还几乎没有着手研究过,这一问题由于可能存在“零模”和“负模”解当然就更为复杂。所有这些问题构成了在引进 B-S 方程来作为复合场量所满足的运动方程时的许多困难。但由于这一方程的若干性质毕竟已有很多人研究过,许多问题已初步澄清,因而仍然不失为可供研究出发点的一个相对论方程。关于 B-S 方程中最麻烦的“零模”或“负模”解的问题,我们将暂先假设基本场间的相互作用较微弱,以致于这些反常解将不存在(如氢原子,正负电子原子等,有些标量粒子 B-S 方程严格解表明,在相互作用常数 $\frac{g^2}{4\pi} < \pi$ 时,反常解就不存在^[12]),或者认为“负模”态不表现为稳定的复合粒子。在以后研究中再来讨论由于包含了“零模”和“负模”解因而要引入“不定度规”到复合粒子场论的问题。为了便于建立复合场场论,这里我们将重覆叙述一下 B-S 方程波函数、格林函数所满足的方程和各种性质,以及波函数的正交归一条件等。叙述的结果极大部分都是前人已得到的,只是为了便于应用,并由于前人某些工作中有一些不够精确的地方,因而这里适当地总结一下,就便澄清了其中某些问题。关于 B-S 方程波函数正交归一条件,可以普遍地写成统一形式却是这里工作的结果。由于本文只研究基本场是标量场的情形,这里也只讨论标量粒子的 B-S 方程。

1. 关于 B-S 波函数的定义及各种表示形式

B-S 方程波函数通常是由场算符的 T 乘积作用在双粒子态来定义的。为了保证使这一 T 乘积的双粒子场算符的真空平均值等于零, 我们引进一个 N 乘积来扣除它们在真空态上的“收缩”。假定基本场是中性标量场 $A(x)$, 定义

$$N(A(x_1)A(x_2)) = T(A(x_1)A(x_2)) - \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | 0 \rangle, \quad (\text{A.1})$$

因而有

$$\langle 0 | N(A(x_1)A(x_2)) | 0 \rangle = 0. \quad (\text{A.2})$$

对于 B-S 波函数显然有

$$\begin{aligned} \Phi_b(x_1 x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | N(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle \\ &= \frac{\exp(iPX)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_b(x, P), \end{aligned} \quad (\text{A.3a})$$

$$\phi_b(x, P) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T\left(A\left(\frac{x}{2}\right)A\left(-\frac{x}{2}\right)\right) | b \rangle. \quad (\text{A.3b})$$

式 (A.3) 中引入 $\frac{1}{\sqrt{2!}}$ 是由于玻色统计, $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x = x_1 - x_2$, P 是态 $|b\rangle$ 的总四动量。B-S 方程的共轭波函数是

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_b(x_1 x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle b | T(A(x_1)A(x_2)) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle b | N(A(x_1)A(x_2)) | 0 \rangle \\ &= \frac{\exp(-iPX)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}_b(x, P), \end{aligned} \quad (\text{A.4a})$$

$$\bar{\phi}_b(x, P) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2!}} \langle b | T\left(A\left(\frac{-x}{2}\right)A\left(\frac{x}{2}\right)\right) | 0 \rangle. \quad (\text{A.4b})$$

由于这里的 T 乘积和 N 乘积作用到粒子态上的效果是相等的, 在以后的讨论中仍然将沿用 T 乘积, 只在发生问题的地方才改用 N 乘积。如果将 B-S 波函数变换到动量空间, 就有

$$\begin{aligned} (2\pi)^{5/2} \delta(p_1 + p_2 - P) \Phi_b\left(\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\right) \\ = \int d^4 x_1 d^4 x_2 \exp[-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)] \Phi_b(x_1 x_2), \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

$$\phi_b(q, P) = \int d^4 x \exp(-iqx) \phi_b(x, P), \quad (\text{A.5b})$$

以及

$$\begin{aligned} (2\pi)^{5/2} \delta(p_1 + p_2 - P) \bar{\Phi}_b\left(\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\right) \\ = \int d^4 x_1 d^4 x_2 \exp[i(p_1 x_1 + p_2 x_2)] \bar{\Phi}_b(x_1 x_2), \end{aligned} \quad (\text{A.6a})$$

$$\bar{\phi}_b(q, P) = \int d^4 x \exp(iqx) \bar{\phi}_b(x, P). \quad (\text{A.6b})$$

显然, 式 (1.5), (1.6) 中有 $P = p_1 + p_2$, $q = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$, 并且有式 $\int d^4 x_1 d^4 x_2 = \int d^4 X d^4 x$.

对于由式 (A.2)–(A.6) 所定义的 B-S 波函数有一个值得注意的重要特性, 即

$$\bar{\phi}(x_1 x_2) \doteq \Phi^+(x_1 x_2). \quad (\text{A.7})$$

这一点将导致所定义的复合粒子场量是否具有自相厄米性的一些麻烦.

2. 关于 B-S 波函数的一些基本性质

容易证明, 在电荷共轭变换下, B-S 波函数有如下性质:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iP_b X) \phi_b(x, P_b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | \bar{b} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iP_{\bar{b}} X) \phi_{\bar{b}}(-x, P_{\bar{b}}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

但这里式 (A.8) 并没有什么实际意义, 因为已假设了 $A(x)$ 是中性标量粒子, 没有正粒子和反粒子的区别. 在时空弱反演变换下, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iP_b X) \phi_b(x, P_b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \eta_w |\xi_w|^2 \langle b | T(A(-x_2)A(-x_1)) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(iP_b X) \bar{\phi}(x, P_b), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$A(x)$ 是玻色场, 满足玻色统计, 因而有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle &= \frac{\exp(iP_b X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_b(x, P_b) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle = \frac{\exp(iP_b X)}{(2\pi)^{3/2}} \phi_b(-x, P_b). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

把式 (A.9), (A.10) 结合起来, 显然有

$$\phi(x, P) = \bar{\phi}(x, P) = \phi(-x, P) = \bar{\phi}(-x, P). \quad (\text{A.11})$$

如果我们进一步认为 $\phi(x, P)$ 是 $x^2, (xP)^2, P^2$ 的函数, 就有^[13]

$$\phi(x, P) = \phi(x, -P). \quad (\text{A.12})$$

但这一结论实际上是不正确的, 因为单从协变性的考虑并不能排除波函数 $\phi(x, P)$ 中存在 $\epsilon(x_0)\theta(-x^2)(xP)$ 的项. 这意味着 x 由类空变到类时的光锥上存在着跳跃, 这正是 B-S 波函数所具有的特性之一. 容易看出, B-S 波函数的厄米共轭是

$$\begin{aligned} \left[\frac{\exp(iPX)}{(2\pi)^{3/2}} \phi(x, P) \right]^+ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | T(A(x_1)A(x_2)) | b \rangle^+ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle b | \tilde{T}(A(x_1)A(x_2)) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

其中 $\tilde{T}$ 是反编时乘积. 在共轭波函数 (A.4) 式和波函数的厄米共轭 (A.13) 式之间相差的数值是

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-iPX)}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\phi}(x, P) - \left[\frac{\exp(iPX)}{(2\pi)^{3/2}} \phi(x, P) \right]^+ \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon(t_1 - t_2) \langle b | [A(x_1), A(x_2)]_- | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

由式 (A.14) 可以看出, 当 $x = x_1 - x_2$ 是类空时, 它们之间的差别是零; 只是当 x 是类时

时才有由式 (A.14) 表示出的差别。如果 $\phi(x, P)$ 是 x 的解析函数, 并在 x 的光锥上有一小段连续的话, 就将导致式 (A.14) 的右端处处是零。 $\phi(x, P)$ 中存在 $\epsilon(x_0)\theta(-x^2)(xP)$ 的项正好解释了式 (A.14) 的差额。因此, 在一般情形下, 将不会有式 (A.12), 当然不会排除在特殊情形下存有这种可能。

由式 (A.14) 所给出的两种波函数的差别, 在定义复合粒子场算符时要引起一些麻烦。所幸的是, 由 B-S 波函数的谱条件, 还可以推导出动量表象中波函数和共轭波函数之间的另一关系^[14],

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{q}, q_0, P) &= -\phi^+(-\mathbf{q}, -q_0^*, P), \\ \bar{\phi}^+(-\mathbf{q}, -q_0, P) &= -\phi(\mathbf{q}, q_0^*, P).\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

式 (A.15) 中 q_0^* 意味着共轭波函数的厄米共轭后数值并不等于原来的波函数 $\phi(\mathbf{q}, q_0 + i\epsilon, P)$, 而是等于波函数 $\phi(\mathbf{q}, q_0 + i\epsilon, P)$ 在经过解析延拓后到达 $\phi(\mathbf{q}, q_0 - i\epsilon, P)$ 点的数值并改变一个符号(见图 1 中的位置)。



图 1

把式 (A.11) 和 (A.15) 联系起来[将式 (A.11) 变到动量空间], 就可以得到

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{q}, q_0^*, P) &= -\bar{\phi}^+(-\mathbf{q}, -q_0, P) \\ &= -\phi^+(-\mathbf{q}, -q_0, P) = -\phi^+(\mathbf{q}, q_0, P).\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

由式 (A.16) 可以看出, 对于 B-S 波函数 $\phi(q, P)$ 的虚部在由 $q_0 + i\epsilon \rightarrow q_0 - i\epsilon$ 时连续, 而相应的实部却存在着跳跃, 否则, 如 $\phi(q, P)$ 是纯虚数函数就不存在如图 1 所示的割线, 因而由式 (A.14) 不能得出 $\phi(q, P)$ 是纯虚函数(加上 i 就是实函数)的结论^[15]。

3. 关于 B-S 方程以及相应的格林函数的一些性质

B-S 方程的格林函数通常定义成 4 个场算符的 T 乘积。这里由于只有一个中性的标量场, 因而就要定义成

$$G(x_1 x_2; y_1 y_2) = \langle 0 | T(N(A_1(x_1)A(x_2))N(A(y_1)A(y_2))) | 0 \rangle. \quad (\text{A.17})$$

这就可以去掉其中没有物理意义的、由始态或末态两个粒子的纯收缩的图。显然, $G(x_1 x_2; y_1 y_2)$ 将满足下列积分方程:

$$\begin{aligned}G(x_1 x_2; y_1 y_2) &= G_0(x_1 x_2; y_1 y_2) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2 G_0(x_1 x_2; u_1 u_2) I(u_1 u_2; v_1 v_2) G(v_1 v_2; y_1 y_2),\end{aligned}\quad (\text{A.18a})$$

和

$$\begin{aligned}G(x_1 x_2; y_1 y_2) &= G_0(x_1 x_2; y_1 y_2) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2 G(x_1 x_2; u_1 u_2) I(u_1 u_2; v_1 v_2) G_0(v_1 v_2; y_1 y_2),\end{aligned}\quad (\text{A.18b})$$

其中

$$\begin{aligned}G_0(x_1 x_2; y_1 y_2) &= \langle 0 | T(A(x_1)A(y_1)) | 0 \rangle \langle 0 | T(A(x_2)A(y_2)) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | T(A(x_1)A(y_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(A(x_2)A(y_1)) | 0 \rangle.\end{aligned}\quad (\text{A.19})$$

式 (A.18a) 和 (A.18b) 是完全等价但形式不同的两个方程。由这两个方程的等价性并考虑到标量场满足玻色统计, 可导出

$$I(u_1 u_2; v_1 v_2) = I(v_1 v_2; u_1 u_2) \quad (\text{A.20})$$

和

$$\begin{aligned} I(U - V; u, v) &= I(U - V; -u, v) = I(U - V; u, -v) \\ &= I(U - V; -u, -v) = I(V - U; v, u) = I(V - U; -v, u) \\ &= I(V - U; v, -u) = I(V - U; -v, -u), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

其中 $V = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, $v = v_1 - v_2$, $U = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, $u = u_1 - u_2$. 如果对式 (A.18a) 和 (A.18b) 两边分别作用算子 $\vec{O} = (-\vec{\square}_{x_1} + m^2)(-\vec{\square}_{x_2} + m^2)$ 和 $\vec{O} = (-\vec{\square}_{y_1} + m^2)(-\vec{\square}_{y_2} + m^2)$, 并由于有

$$\begin{aligned} (-\vec{\square}_x + m^2) \langle 0 | T(A(x)A(y)) | 0 \rangle \\ = \langle 0 | T(A(x)A(y)) | 0 \rangle (-\vec{\square}_y + m^2) = \delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

即可得下列两个微分形式的格林函数方程:

$$\begin{aligned} (\vec{O}_x - \vec{I}_x) G(x_1 x_2; y_1 y_2) \\ = \delta^4(x_1 - y_1) \delta^4(x_2 - y_2) + \delta^4(x_1 - y_2) \delta^4(x_2 - y_1), \end{aligned} \quad (\text{A.23a})$$

和

$$\begin{aligned} G(x_1 x_2; y_1 y_2) (\vec{O}_y - \vec{I}_y) \\ = \delta^4(x_1 - y_1) \delta^4(x_2 - y_2) + \delta^4(x_1 - y_2) \delta^4(x_2 - y_1). \end{aligned} \quad (\text{A.23b})$$

式 (A.23a) 和 (A.23b) 中 $\vec{I}_x$ 和 $\vec{I}_y$ 分别是两个向右作用和向左作用的积分算子。不难看出, 由于有式 (A.20), (A.21), 式 (A.23a) 和 (A.23b) 是形式不同但完全等价的两个积分方程。

$G(x_1 x_2; y_1 y_2)$ 有一个重要性质: 如果在 T 乘积中塞入一系列束缚态和双粒子态, 就可以把格林函数写成动量空间中一系列极点的迭加。例如, 在对 $G(x_1 x_2; y_1 y_2)$ 塞入一系列中间态 $|i\rangle\langle i|$ (其中包括散射态) 以后, 就有

$$\begin{aligned} G(x_1 x_2; y_1 y_2) &= G(X - Y; x, y) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{i, \zeta} \int \frac{d^3 P_i}{2\omega_i} [\phi_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) \exp[iP_i(X - Y)] \theta(X_0 - Y_0) \\ &\quad + \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \exp[-iP_i(X - Y)] \theta(Y_0 - X_0)] \\ &\quad + \frac{2}{(2\pi)^3} \int dM_i^2 \sum_{\zeta} \int \frac{d^3 P_i}{2\omega_i} [\bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) \exp[iP_i(X - Y)] \theta(X_0 - Y_0) \\ &\quad + \phi_i^\zeta(y, \mathbf{P}_i, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \exp[-iP_i(X - Y)] \theta(Y_0 - X_0)] \\ &\quad + \text{其它可能的项}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

式 (A.24) 中 $\omega_i = +\sqrt{\mathbf{P}_i^2 + M_i^2}$, $P_{i0} = \omega_i$, 即在质量壳上, i 表示各种分立态和连续态, ζ 表示每一 i 态上的自旋指标。进一步再利用 $\theta(Z)$ 的恒等式,

$$\begin{aligned} \theta(X_0 - Y_0) &= -(2\pi i)^{-1} \int dq \frac{\exp[-iq(X_0 - Y_0)]}{q + i\epsilon}, \\ \theta(Y_0 - X_0) &= -(2\pi i)^{-1} \int dq \frac{\exp[-iq(Y_0 - X_0)]}{q + i\epsilon}, \end{aligned}$$

并令 $P_0 = q + \omega_i$, 因而

$$\begin{aligned} G(X - Y; x, y) = & \frac{2i}{(2\pi)^4} \sum_{i, \zeta} \int d^4P \left[\frac{\exp[iP(X - Y)] \phi_i^\zeta(x, P, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(y, P, \omega_i)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} \right. \\ & + \frac{\exp[-iP(X - Y)] \phi_i^\zeta(y, P, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P, \omega_i)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} \Big] \\ & + \frac{2i}{(2\pi)^4} \int dM_i^2 \sum_{\zeta} \int d^4P \left[\frac{\exp[iP(X - Y)] \phi_i^\zeta(x, P, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(y, P, \omega_i)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} \right. \\ & + \frac{\exp[-iP(X - Y)] \phi_i^\zeta(y, P, \omega_i) \bar{\phi}_i^\zeta(x, P, \omega_i)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} \Big] + \text{其它项}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

如果只对 $G(X - Y; x, y)$ 中某一极点上留数有兴趣, 那末还可以将 (A.25) 式中的分子上的 ω_i 换成 P_0 , 再令第二项的 $P \rightarrow -P$, 就可以将式 (A.25) 换成

$$\begin{aligned} G(X - Y; x, y) = & \frac{2i}{(2\pi)^4} \sum_{\zeta} \int d^4P \exp[iP(X - Y)] \left[\frac{\phi_i^\zeta(x, P) \bar{\phi}_i^\zeta(y, P)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} \right. \\ & - \left. \frac{\phi_i^\zeta(y, -P) \bar{\phi}_i^\zeta(x, -P)}{2\omega_i(P_0 + \omega_i - i\epsilon)} \right] + \text{其它项} + \text{由 } \omega_i \text{ 换成 } P_0 \text{ 后的修正项}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

如果再有式 (A.12), 就可以将上式换成

$$\begin{aligned} G(X - Y; x, y) = & \frac{2i}{(2\pi)^4} \sum_{\zeta} \int d^4P \exp[iP(X - Y)] \frac{\phi_i^\zeta(x, P) \bar{\phi}_i^\zeta(y, P)}{P^2 + m_i^2 - i\epsilon} \\ & + \text{其它项} + \text{由 } \omega_i \text{ 换成 } P_0 \text{ 后的修正项}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

这就是讨论 B-S 方程格林函数的许多文章中所给出的双极点合并后的协变形式^[11, 13]. 但由于式 (1.12) 不是普遍适用的, 因而在以后只用式 (A.24) — (A.26), 而不用式 (A.27)¹⁾.

如果引进下列定义:

$$I(X - Y; x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4P \exp[iP(X - Y)] I(P; x, y), \quad (\text{A.28})$$

$$G(X - Y; x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4P \exp[iP(X - Y)] G(P; x, y), \quad (\text{A.29})$$

可得动量空间中的积分方程

$$G(P; x, y) = G_0(P; x, y) + \int d^4u d^4v G_0(P; x, u) I(P; u, v) G(P; v, y), \quad (\text{A.30a})$$

$$G(P; x, y) = G_0(P; x, y) + \int d^4u d^4v G(P; x, u) I(P; u, v) G_0(P; v, y) \quad (\text{A.30b})$$

和

$$G(P; x, y) = 2i \sum_{\zeta} \frac{\phi_i^\zeta(x, P) \bar{\phi}_i^\zeta(y, P)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} + \text{在极点是正规的项}. \quad (\text{A.31})$$

将式 (A.31) 代入式 (A.29), 再代入式 (A.18a), 又令两边极点上的留数相等, 就得到

1) 乍一看来, 似乎式 (A.24) — (A.26) 的推导仍不严格. 因为从编时算符定义要保证 $A(x_1)A(x_2)$ 在 $A(y_1)A(y_2)$ 前面, 应有 $X_0 - \frac{|x_0|}{2} > Y_0 + \frac{|y_0|}{2}$ 而不是 $X_0 > Y_0$. 但计算表明, 这一改正并不影响极点的数值^[16]. 此外, 由于 $A(x_1)A(x_2)A(y_1)A(y_2)$ 场量是全同粒子, 因而可能有别的组合, 如 $A(x_1)A(y_1)$, 或 $A(x_1)A(y_2) \cdots$ 对极点项有贡献. 但如取定 X, Y 的质心系, 可以证明这些项不贡献极点.

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\exp[i(p_1 x_1 + p_2 x_2)] + \exp[i(p_1 x_2 + p_2 x_1)]}{(2\pi)^3} \right) \theta(-p^2 - 4m^2) \\ & + \frac{1}{2} \int d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2 G_0(x_1 x_2; u_1 u_2) I(u_1 u_2; v_1 v_2) \Phi(v_1, v_2),\end{aligned}\quad (\text{A.32a})$$

将式 (A.31) 代入式 (A.29), 再代入式 (A.18b), 并令两边极点上的留数相等, 就得到

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(y_1, y_2) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\exp[-i(p_1 y_1 + p_2 y_2)] + \exp[-i(p_1 y_2 + p_2 y_1)]}{(2\pi)^3} \right) \theta(-p^2 - 4m^2) \\ & + \frac{1}{2} \int d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2 \bar{\Phi}(u_1 u_2) I(u_1 u_2; v_1 v_2) G_0(v_1 v_2; y_1 y_2).\end{aligned}\quad (\text{A.32b})$$

如果对式 (A.32a), (A.32b) 分别从左右将算子 O 作用上去, 可得

$$(\bar{O} - \bar{I})\Phi(x_1 x_2) = 0, \quad (\text{A.33a})$$

$$\bar{\Phi}(y_1 y_2)(\bar{O} - \bar{I}) = 0. \quad (\text{A.33b})$$

如果将式 (A.31) 代入式 (A.30a) 和 (A.30b), 并分别从左面和右面将动量空间中的算子 O 作用上去, 就有

$$\begin{aligned}O\left(P, \frac{\partial}{\partial x}\right) G(P; x, y) - \int I(P; x, y') G(P; y', y) d^4 y' \\ = \delta^4(x - y) + \delta^4(x + y),\end{aligned}\quad (\text{A.34a})$$

$$\begin{aligned}G(P; x, y) O\left(P, \frac{\partial}{\partial y}\right) - \int G(P; x, y') I(P; y', y) d^4 y' \\ = \delta^4(x - y) + \delta^4(x + y),\end{aligned}\quad (\text{A.34b})$$

$$O\left(P, \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi(x, P) - \int I(P; x, y) \phi(y, P) d^4 y = 0, \quad (\text{A.35a})$$

$$\bar{\phi}(y, P) O\left(P, \frac{\partial}{\partial y}\right) - \int \bar{\phi}(x, P) I(P; x, y) d^4 x = 0. \quad (\text{A.35b})$$

由于积分核 I 有式 (A.20), (A.21) 的对称性, 故式 (A.30), (A.32), (A.33), (A.34), (A.35) 中 (a), (b) 两式是完全等价的。正是由于 B-S 方程和相应的共轭方程存在这种等价性, 这就使我们有可能直接把波函数的方程推广成为双粒子场算子的方程。

4. 关于 B-S 方程波函数的正交归一条件

有许多作者分别用不同方法导出许多不同形式、但实际上是相互等价的 B-S 波函数归一化条件^[6]。遗憾的是在很多推导中都用了式 (A.27)。现在我们给出一种不用 (A.27) 式的方法^[17], 并将它推广到运动坐标中去。

将式 (A.31) 代入式 (A.34a), 可得

$$\begin{aligned}(\bar{O} - \bar{I}) \left[2i \sum_{\zeta} \frac{\phi_{\zeta}^{\dagger}(x, \mathbf{P}, \omega_i) \bar{\phi}_{\zeta}^{\dagger}(y, \mathbf{P}, \omega_i)}{2\omega_i(P_0 - \omega_i + i\epsilon)} + \text{其它在极点是正规的项} \right] \\ = \delta^4(x - y) + \delta^4(x + y).\end{aligned}\quad (\text{A.36})$$

如果从左边对式 (A.36) 乘上 $\bar{\phi}_{\zeta}^{\dagger}(x, \mathbf{P}, \omega_i)$ 并对 $d^4 x$ 积分, 令 $P_0 \rightarrow \omega_i$, 再注意到算符 $O\left(P, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ 可以由向右微分变成向左微分, 因而由 (A.35b) 式, 其它的项都等于零, 但在

极点上 $\frac{0}{0}$ 不定式。进一步用罗比塔法则可求出

$$i \int d^4x \bar{\phi}_i^{\zeta'}(x, \mathbf{P}, \omega_i) \frac{1}{2\omega_i} \left[\frac{\partial}{\partial P_0} (O - I) \right]_{P_0=\omega_i} \sum_{\zeta} \phi_i^{\zeta}(x, \mathbf{P}, \omega_i) \bar{\phi}_i^{\zeta}(y, \mathbf{P}, \omega_i) = \bar{\phi}_i^{\zeta}(y, \mathbf{P}, \omega_i). \quad (\text{A.37})$$

为使这个等式成立,显然有

$$\frac{i}{2\omega_i} \int d^4x \bar{\phi}_i^{\zeta'}(x, \mathbf{P}, \omega_i) \left[\frac{\partial}{\partial P_0} (O - I) \right]_{P_0=\omega_i} \phi_i^{\zeta}(x, \mathbf{P}, \omega_i) = \delta_{\zeta\zeta'}, \quad (\text{A.38})$$

如果再把质心运动加上,就有

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{X} d^4x \exp(-i\mathbf{P}'_i \mathbf{X}) \bar{\phi}_i^{\zeta'}(x, \mathbf{P}'_i, \omega'_i) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} \frac{1}{2\omega_i} \left[\frac{\partial}{\partial P_0} (O - I) \right]_{P_0=\omega_i} \times \exp(i\mathbf{P}_i \mathbf{X}) \phi_i^{\zeta}(x, \mathbf{P}, \omega_i) = 2\omega_i \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta_{\zeta\zeta'}. \quad (\text{A.39})$$

对于散射态,由在格林函数表示式 (A.25) 中,对态的求和换成对态 $\int dM_i^2$ 积分,因而对于散射态来说,归一化条件仍有 (A.39) 式的形式,所不同的是将归一条件换成为归一到 $\delta(M_i'^2 - M_i^2)$, ($P^2 = -M_i^2$, $P'^2 = -M_i'^2$), 亦即有

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{X} d^4x \exp(-i\mathbf{P}'_i \mathbf{X}) \bar{\phi}_i^{\zeta'}(x, \mathbf{P}'_i, \omega'_i) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} \frac{1}{2\omega_i} \left[\frac{\partial}{\partial P_0} (O - I) \right]_{P_0=\omega_i} \times \exp(i\mathbf{P}_i \mathbf{X}) \phi_i^{\zeta}(x, \mathbf{P}, \omega_i) = 2\omega_i \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta_{\zeta\zeta'} \delta(M_i'^2 - M_i^2). \quad (\text{A.40})$$

由式 (A.39) 和 (A.40) 所给出的条件只限于始末态质量相等的情形。如果始末态粒子的质量不一样,就还需要进一步推广。将式 (A.35a) 中波函数标上态 i , 从左边乘上 $\bar{\phi}_i(x, P')$ 并对 d^4x 积分, 将式 (A.35b) 中波函数标上态 j , 将其中 y 换成 x , P 换成 P' , 从右边乘上 $\phi(x, P')$ 并对 d^4x 积分, 再将两者相减, 在 $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ 的条件下 (这是由质心部分的正交归一条件来保证的), 便得到

$$(P_{j,0}'^2 - P_{i,0}^2) \int d^4x \bar{\phi}_j^{\zeta'}(x, P'_j) \left(\frac{\ddot{O} - \ddot{I}}{P_{j,0}'^2 - P_{i,0}^2} \right) \phi_i^{\zeta}(x, P) = 0. \quad (\text{A.41})$$

其中 $\longleftrightarrow$ 表明向右边作用的算子减去向左边作用的算子。大家知道, 算符 O 是 P_0 的多项式, I 也可以写成 P_0 的无限多项式, 因而总能从算符 $(\ddot{O} - \ddot{I})$ 中分离出公共因子 $(P_{j,0}'^2 - P_{i,0}^2)$ 来, 而分离出公因子后的剩余项就写成 $(\ddot{O} - \ddot{I}) / (P_{j,0}'^2 - P_{i,0}^2) = Q$ 。在 $\mathbf{P}'_j = \mathbf{P}_i$ 的条件下, 总有 $P_{j,0}'^2 \asymp P_{i,0}^2$, 因而式 (A.41) 中的积分就等于零; 而当始末态质量相等时, 式 (A.41) 就自动变成式 (A.39) 和 (A.40)。因而不难将各个双粒子态的正交归一条件统一地写成一个形式:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{X} d^4x \exp(-i\mathbf{P}'_j \mathbf{X}) \bar{\phi}_j^{\zeta'}(x, \mathbf{P}'_j, \omega'_j) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} Q \exp(i\mathbf{P}_i \mathbf{X}) \phi_i^{\zeta}(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) = 2\omega_i \delta(\mathbf{P}'_j - \mathbf{P}_i) \delta_{\zeta'\zeta} \begin{cases} \delta_{ij}; \\ \delta(M_j^2 - M_i^2). \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

对于式 (A.42) 两边分别取厄米共轭, 就有

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{X} d^4x \exp(-i\mathbf{P}_i \mathbf{X}) \phi_i^{\zeta+}(x, \mathbf{P}_i, \omega_i) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} Q^+ \exp(i\mathbf{P}'_j \mathbf{X}) \bar{\phi}_j^{\zeta'+}(x, \mathbf{P}'_j, \omega'_j) = 2\omega_i \delta(\mathbf{P}'_j - \mathbf{P}_i) \delta_{\zeta'\zeta} \begin{cases} \delta_{ij}; \\ \delta(M_j^2 - M_i^2). \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

由式(1.16),显然有

$$Q = Q^+. \quad (\text{A.44})$$

式(A.43),(A.44)对于今后将 B-S 方程的波函数方程推广到算子是重要的。由于式(A.43), (A.44),才保证了双粒子场算子对 B-S 方程波函数展开后所得展开系数的自相厄米性。此外,为了使双粒子场算子能对 B-S 波函数展开,还必须有完备性条件。遗憾的是,目前对 B-S 方程的完备性条件几乎还没有这方面的研究。因而我们就只好从物理上假定 B-S 方程的解,其中包括束缚态和散射态,在函数空间中存在着完备关系,也就是假设双粒子场算符可以对 B-S 波函数展开。由于这一假定毕竟是没有证明的,因而在本文建立复合场理论体系时,我们仍要避免使用完备关系的假定。此外,我们还将假定 B-S 方程中“负模解”不存在或“负模解”不表现为稳定粒子,从而避免了许多复杂情形。

附 录 二

关于极化张量 $f_{\mu_1 \dots \mu_n}^i$ 的定义和有关公式

由于复合粒子在静止时要有相应的自旋分量,在运动时又是相对论不变的,也就是说,它们将满足高自旋场量的一些性质,亦即是自由的高自旋场量 $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X)$ 将满足

$$\begin{aligned} (\square + M^2)\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial X_{\mu_s}} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) &= 0 \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{\mu_i, \mu_s} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(X) \delta_{\mu_i, \mu_s} &= 0 \quad i, s = 1, 2, \dots, n, \\ \varphi_{\mu_1 \dots \mu_i \mu_j \dots \mu_n}^i(X) &= \varphi_{\mu_1 \dots \mu_j \mu_i \dots \mu_n}^i(X) \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

为了能将自旋分量从上述带有很多限制条件的对称张量分离出来,就要引进一系列极化张量 $f_{\mu_1 \dots \mu_n}^i$, 这些张量将具有下列性质:

$$\begin{aligned} f_{\mu_1 \dots \mu_i \mu_j \dots \mu_n}^i &= f_{\mu_1 \dots \mu_j \mu_i \dots \mu_n}^i, \\ \sum_{\mu_i, \mu_s} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^i \delta_{\mu_i, \mu_s} &= 0, \\ P_{\mu_s} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^i &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

此外有

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^i f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i'} = \delta_{ii'}, \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{\zeta} f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\zeta} f_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\zeta} = P_{\mu_1 \dots \mu_n; \nu_1 \dots \nu_n}, \quad (\text{B.4})$$

即投影张量。对于投影张量有性质

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} P_{\mu_1 \dots \mu_n; \alpha_1 \dots \alpha_n} P_{\alpha_1 \dots \alpha_n; \nu_1 \dots \nu_n} &= P_{\mu_1 \dots \mu_n; \nu_1 \dots \nu_n}, \\ \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} P_{\mu_1 \dots \mu_n; \mu_1 \dots \mu_n} &= 2s + 1, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

s 是自旋。这一极化张量可由下列方法做成,引进极化矢量 f_μ , 有

$$\sum_{\mu} f_{\mu}^{\lambda} f_{\mu}^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, P_{\mu} f_{\mu}^{\lambda} = 0, \quad (B.6)$$

$$\sum_{\lambda} f_{\mu}^{\lambda} f_{\nu}^{\lambda} = \delta_{\mu\nu} + \frac{P_{\mu} P_{\nu}}{M^2},$$

其中 $\mu = 1, 2, 3, 4$; $\lambda = 1, 2, 3$. 如果令极化张量

$$f_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\lambda} = \text{sym}(f_{\mu_1}^{\lambda} f_{\mu_2}^{\lambda} \dots f_{\mu_n}^{\lambda}) - \text{Tr}(f_{\mu_1}^{\lambda} f_{\mu_2}^{\lambda} \dots f_{\mu_n}^{\lambda}), \quad (B.7)$$

其中 sym 指对指标 λ 全对称化, Tr 是说对于指标 λ 是去迹的。由式 (B.7) 所构成的极化张量将具有所要求的性质 (B.2) 和式 (B.3)。显然, 式 (B.7) 将满足对称条件以及洛伦兹条件, 又由于有

$$\sum_{\mu} f_{\mu}^{\lambda} f_{\mu}^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (B.6)$$

的条件, 因而对指标 μ 也是去迹的。以二秩张量为例, 我们有

$$f_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} (f_{\mu}^{\lambda} f_{\nu}^{\lambda'} + f_{\nu}^{\lambda} f_{\mu}^{\lambda'}) - \frac{1}{3} \sum_{\sigma} f_{\mu}^{\sigma} f_{\nu}^{\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (B.8)$$

这一张量显然是对称的、去迹的, 并满足洛伦兹条件。

参 考 文 献

- [1] 北京基本粒子组, 1966 年北京科学讨论会论文。
- [2] K. Nishijima, *Phys. Rev.*, **111** (1958), 995; W. Zimmermann, *Nuovo. Cim.*, **10** (1958), 597; R. Haag, *Phys. Rev.*, **112** (1958), 669.
- [3] P. T. Redmond, J. L. Uretsky, *Ann. Phys.*, **9** (1960), 106.
- [4] S. Mandelstam, *Proc. Roy. Soc.*, **A233** (1955), 248.
- [5] V. M. A. Wightman, *Theoretical Physics*, Inter. Atomic Energy Agency, Vienna (1963), p. 44.
- [6] Borchers, 见哈格林, 色散关系导论, 科学出版社 (1965 年), 第 22 页。
- [7] A. M. Licht, J. Tall, *Nuovo. Cim.*, **21** (1961), 346.
- [8] 阮图南, 何祚庥, 物理学报 (待发表)。
- [9] C. Schwartz, C. Zemach, *Phys. Rev.*, **141** (1966), 1454.
- [10] E. E. Salpeter, H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 1232; M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 350; J. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **37** (1951), 455; H. Kita, *Prog. Theor. Phys.*, **7** (1952), 217.
- [11] N. Nakanishi, *Supp. Prog. Theor. Phys.*, **43** (1969), 1.
- [12] *ibid.*, *Phys. Rev.*, **138B** (1965), 1182.
- [13] T. Kitazoe, T. Teshima, *Nuovo Cim.*, **57A** (1968), 497.
- [14] M. Ciafaloni, P. Menotti, *Phys. Rev.*, **B140** (1965), 929.
- [15] 北京大学理论物理研究室基本粒子组, 中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北京大学学报 (自然科学), **12** (1966), 209.
- [16] D. Lurié, A. J. Macfarlane, Y. Takahashi, *Phys. Rev.*, **140B** (1969), 1091.
- [17] J. Arafune, *Prog. Theor. Phys.*, **40** (1968), 620; C. H. Llewellyn, Smith, *Nuovo. Cim.*, **60A** (1969), 348.

A NEW POSSIBLE COMPOSITE QUANTIZED FIELD THEORY

HO TSO-HSIU HUANG TAO

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

A new composite quantized field theory is formulated. A bilocal field operator equation of Bethe-Salpeter type with sources is introduced as the equation of motion of composite fields. The bound state field theory of Haag-Nishijima-Zimmermann and the Mandelstam's transition formula of bound state can be shown to be contained in the present theory, some difficulties of their theory being avoided.