

复合场论和层子模型(I)*

何祚麻 黄 涛

(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文将文献[1]中所探讨的复合场论推广到基本场量是旋量场的情形,并由此给出了层子模型理论^[2]中有关介子体系所用到的各种公式.

一、引 言

近几年来,愈来愈多的基本粒子实验的进展表明基本粒子具有内部结构,与此相应并从理论上提出了若干结构模型:如层子模型、夸克模型、份子模型和液滴模型等.这些模型在一定范围内与实验有较好的符合.所有这些模型常要处理复合场的问题,因为它们都假定存在一种基本场 $\Psi(x)$,令 $\Psi(x)$ 满足一定的性质,由此讨论由 $\Psi(x)$ 形成复合粒子的性质,并给出一些理论结果.对于不同的模型, $\Psi(x)$ 具有不同的性质,譬如说,层子模型中的“夸克”方案¹⁾就引进了费米场 $\Psi(x)$,其自旋为 1/2 并是 SU(3) 群的基础表示,即

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

而介子是由一对正、反层子构成的,重子是由三个层子构成的.

众所周知,通常的场论是在相互作用表象里讨论的,这一表象对于处理束缚态问题无能为力,这是因为“绝热近似假说”的物理图象排斥了对束缚态描述的可能性.此后,从 1949—1955 年,人们尝试探索描述两体问题的相对论量子力学,即 Bethe-Salpeter 方程(以下简称为 B-S)及其波函数^[3],进一步 Mandelstam 提出了一种用 B-S 波函数来表达束缚态跃迁矩阵元的方法^[4].这是关于束缚态问题发展的一条线索.关于束缚态问题发展的另一条线索是探索发展复合粒子场论体系.1958 年 Haag-Nishijima-Zimmermann 提出了一种方案^[5],在这个方案里,由基本场所构成的复合场是可以等价地等同于另一定域场量,其 S 矩阵也完全等同于定域场论中 S 矩阵的形式.这一理论体系虽然获得一定成就,但在 1960 年 Redmond 和 Uretsky 曾对 Zimmermann 文章中推导对易关系的方法提出过批评^[6].基于对这两条线索的分析,我们在前一工作中^[1],以基本场是中性标量场为例,建

* 1973 年 4 月 14 日收到.

1) 这里并不一定非限于“夸克”方案,只是为指标简单起见,取为式(1.1),本文所得结果都可适用于其它方案的情形.

立了一个新的复合粒子场论体系. 在这个体系中, 吸收了 Mandelstam 用 B-S 波函数表示矩阵元的特点, 同时也吸收了 H-N-Z 体系中复合场的特点, 并加以扩充. 使得新的体系能描述由某些基本场形成的上百种基本粒子的各种物理现象. 其基本思想在于引入了由 B-S 波函数所定义复合场的渐近条件, 并假定基本场的量子 and 所有的束缚态构成希耳伯特空间的完备集. 此外, 由于这一理论还考虑了由基本场构成的束缚态波函数和散射态波函数具有不同的行为, 因而还在一定程度上克服了 H-N-Z 体系中的某些不足之处, 获得了一些新的结果.

本文将试图以层子模型中的“夸克”方案为对象(基本场为旋量场, 自旋为 $1/2$), 讨论复合粒子场论体系, 特别是给出层子模型计算中所用的束缚态跃迁矩阵元. 由于介子和重子具有不同的特点, 这篇文章只讨论介子, 在另文中再讨论用复合场描述重子的情况. 显然, 本文和另文中讨论的问题不仅适用于“夸克”方案, 而且对其它方案也是适用的.

本文分为八个部分, 第一节引言. 第二节 L-S-Z 场论体系的基本思想. 这一节分析了 L-S-Z 体系的基本思想, 并表明在 L-S-Z 体系中引入束缚态的可能性. 第三节引入复合场算符, 并讨论复合场算符的性质. 第四节给出 S 矩阵元. 第五节讨论第四节中给出的 S 矩阵元的其它形式: 一方面表明在特殊情况下是与 Mandelstam 给出的 S 矩阵元等价; 另一方面又给出一种便于做微扰计算的 S 矩阵元表达式. 第六节讨论在 S 矩阵等价意义下定义等效的定域复合场算符的可能性, 并与 Zimmermann 理论相比较. 第七节为讨论. 最后, 由于本工作中要大量地用到 B-S 方程及其波函数的一些性质, 在附录中给出正文中所用到的一些公式, 其中 B-S 波函数的正交归一条件的普遍表达式是我们在完成本文工作的过程中获得的新结果.

二、L-S-Z 场论体系

以层子模型为对象, 基本场就是层子场. 作为“夸克”方案, 层子场的自旋为 $1/2$, 是 $SU(3)$ 群的基础表示 $\Psi(x)$. 假定 $\Psi(x)$ 遵从 L-S-Z 场论体系中的几条基本假定:

1. 相对论不变性

$$U(\Lambda, b)\Psi(x)U^{-1}(\Lambda, b) = S^{-1}(\Lambda)\Psi(\Lambda x + b). \quad (2.1)$$

2. 定域对易关系

$$\begin{aligned} \{\Psi(x), \Psi(y)\} &= 0 & \text{当 } (x-y)^2 > 0, \\ \{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\} &= 0 & \text{当 } (x-y)^2 > 0, \\ \{\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)\} &= 0 & \text{当 } (x-y)^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. 渐近条件

为了便于引入复合场情况下的渐近条件, 这里用一种较为方便的形式列出来. 我们知道, 对于海森堡表象中的场算符 $\Psi(x)$, 其波函数是

$$u_{rp}(x) = \langle 0 | \Psi(x) | \mathbf{p}r \rangle, \quad (2.3)$$

其中 $|\mathbf{p}r\rangle$ 代表单个层子自旋为 r 、动量为 $\mathbf{p}$ 的态。类似地反粒子波函数是

$$v_{r\mathbf{p}}(x) = \langle \bar{\mathbf{p}}r | \Psi(x) | 0 \rangle. \quad (2.3')$$

$u_{r\mathbf{p}}(x)$ 和 $v_{r\mathbf{p}}(x)$ 分别满足一定的正交归一关系:

$$\begin{aligned} \int d^3x \bar{u}_{r\mathbf{p}}(x) \gamma_4 u_{r'\mathbf{p}'}(x) &= \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \\ \int d^3x \bar{v}_{r\mathbf{p}}(x) \gamma_4 v_{r'\mathbf{p}'}(x) &= \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

由此可以定义:

$$\begin{aligned} a_{r\mathbf{p}}(t) &= \int d^3x \bar{u}_{r\mathbf{p}}(x) \gamma_4 \Psi(x), \\ \bar{a}_{r\mathbf{p}}(t) &= \int d^3x \bar{v}_{r\mathbf{p}}(x) \gamma_4 \Psi(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

利用 u 和 v 的完备关系,立刻可以获得

$$\sum_{r\mathbf{p}} [a_{r\mathbf{p}}(t) u_{r\mathbf{p}}(x) + \bar{a}_{r\mathbf{p}}^*(t) v_{r\mathbf{p}}(x)] = \Psi(x). \quad (2.6)$$

在 L-S-Z 场论里,假定渐近条件(弱收敛意义下):

$$\begin{aligned} \langle \alpha | a_{r\mathbf{p}}(t) | \beta \rangle &\rightarrow \langle \alpha | a_{r\mathbf{p}}^{\text{in}} | \beta \rangle \quad \text{当 } t \rightarrow \mp\infty, \\ \langle \alpha | \bar{a}_{r\mathbf{p}}(t) | \beta \rangle &\rightarrow \langle \alpha | \bar{a}_{r\mathbf{p}}^{\text{in}} | \beta \rangle \quad \text{当 } t \rightarrow \mp\infty; \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 是归一化的态矢, $a_{r\mathbf{p}}^{\text{in}}(\mathbf{p})$ 和 $\bar{a}_{r\mathbf{p}}^{\text{in}}(\mathbf{p})$ 都是稳定的与时间无关的算符。这相当于假定基本场存在有稳定的激发量子。由渐近条件式(2.7),给出等式:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial t'} a_{r\mathbf{p}}(t') &= a_{r\mathbf{p}}(t) - a_{r\mathbf{p}}^{\text{in}}(\mathbf{p}), \\ \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial t'} \bar{a}_{r\mathbf{p}}^*(t') &= \bar{a}_{r\mathbf{p}}^*(t) - \bar{a}_{r\mathbf{p}}^{\text{in}}(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

在等式(2.8)两边分别乘以 $u_{r\mathbf{p}}(x)$ 和 $v_{r\mathbf{p}}(x)$ 对 $r, \mathbf{p}$ 求和,利用 u 和 v 的完备关系,立刻可以获得 Yang-Feldman 方程:

$$\Psi(x) = \phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) + \int d^4x' S_R(x-x') J(x'), \quad (2.9)$$

其中 $J(x)$ 和 $\phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x)$ 分别由下列二式定义:

$$J(x) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M \right) \Psi(x), \quad (2.10)$$

$$\phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) = \sum_{r\mathbf{p}} [a_{r\mathbf{p}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) u_{r\mathbf{p}}(x) + \bar{a}_{r\mathbf{p}}^{\text{in}}(\mathbf{p}) v_{r\mathbf{p}}(x)]. \quad (2.11)$$

由式(2.11)立即可知, $\phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x)$ 满足自由场运动方程

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M \right) \phi_{\text{out}}^{\text{in}}(x) = 0. \quad (2.12)$$

综上所述,渐近条件的引入可以分为几步进行,第一步是找出波函数 u, v 和场算符 $\Psi(x)$, 由此定义 a 和 $\bar{a}^*$, 继而再假定渐近条件式(2.7)存在,利用完备关系很容易获得式(2.6)及(2.9—2.12)。这些步骤很容易地推广到复合场情况。这将在下一节讨论。

4. 完备性

假定 $\{\Psi(x)\}$ 构成完备的算子集合. 此假定意味着希耳伯空间中的任何算符(包括复合粒子场算符)应由集合 $\{\Psi(x)\}$ 构成. 由渐近条件定义的集合 $\{\psi_{in}(x)\}$ 或 $\{\psi_{out}(x)\}$ 只能构成希耳伯空间基本场的量子态, 但不一定构成完备集合. Borchers^[7] 证明了由 $\{\psi_{in}(x)\}$ 或 $\{\psi_{out}(x)\}$ 完备可导出 $\{\Psi(x)\}$ 完备, 但不能反过来, 因为 $\{\Psi(x)\}$ 集合要比 $\{\psi_{in}(x)\}$ 或 $\{\psi_{out}(x)\}$ 集合大得多. 因此假定 $\{\Psi(x)\}$ 集合完备, 这就为在这个体系里建立描写束缚态提供了可能性.

5. 谱条件

- 1) 存在一个相对论不变的真空态 $|0\rangle$

$$P_\mu |0\rangle = 0.$$

- 2) P_0 的本征值大于或等于零.

- 3) P^2 的本征值小于或等于零. 对于真空态 $P^2 = 0$, 对于单层子态 $P^2 = -M^2$.

从以上这五条假定, 特别是从后三条假定可见, 在 L-S-Z 场论体系里已经提供了描述束缚态的可能性, 只需考虑到目前由层子构成的基本粒子的实验事实, 对复合粒子场附加必要的假定即可. 这在下一节将详细讨论.

由这五条基本假定, 在不考虑束缚态的情况下, 就可以建立起理论的完全描述. 这在 Zimmermann 文章^[5]中已经用中性标量场为例给出了所需要的理论公式. 但是 Redmond 和 Uretsky^[6] 却曾对 Zimmermann 的工作提出一个批评, 就是在推导 in-场或 out-场的对易关系中丢掉了等时对易关系项. 这里, 我们加一个评注: 在文章[1]中, 已在中性标量场情况下提出了解决这一问题的方法; 而在本文讨论的基本场是旋量场的情况下, 这个问题是不存在的. 这是由于 Dirac 方程是一阶偏微分方程, 不出现那种等时对易关系项. 因而可最终地获得下述对易关系:

$$\begin{aligned} \{a_{r\mathbf{p}}^{in}, a_{r'\mathbf{p}'}^{*in}\} &= \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \\ \{a_{r\mathbf{p}}^{in}, a_{r'\mathbf{p}'}^{*out}\} &= \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

而其它对易关系为零. 如再加上对易关系:

$$\begin{aligned} [P_\mu, a_{r\mathbf{p}}^{in}] &= -p_\mu a_{r\mathbf{p}}^{in}, \\ [P_\mu, a_{r\mathbf{p}}^{*in}] &= p_\mu a_{r\mathbf{p}}^{*in}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

就可以构成希耳伯空间中的层子系统(不包含束缚态)的完备基.

三、复合场算符及其性质

为了描写层子的束缚态, 必须引入复合场算符, 进而从第二节中假定的层子场性质讨论复合场性质, 特别是在后三条假定(渐近条件, 完备性, 谱条件)中, 给出束缚态的具体描述. 本文只考虑两体情况.

对于层子和反层子系统来讲,两体相对论波函数^[3]定义为¹⁾

$$\mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) | \mathbf{k}\zeta \rangle, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}_q(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) | q \rangle, \quad (3.2)$$

其中 $|\mathbf{k}\zeta\rangle$ 是海森堡表象中的介子束缚态 (ζ 指标对于赝标介子特指某一粒子, 对于有自旋的介子还标记自旋指标. 为了方便起见, 以下讨论都只考虑赝标介子情况), $|q\rangle$ 是散射态. 它们都是总能动量 P_μ 的本征态, 即有

$$\begin{aligned} P_\mu |\mathbf{k}_\mu \zeta\rangle &= k_\mu |\mathbf{k}_\mu \zeta\rangle, \\ P_\mu |qi\rangle &= q_\mu |qi\rangle, \\ k_\mu k_\mu &= -\mu_\zeta^2 \quad \zeta = 1, 2, \dots, \\ q_\mu q_\mu &= -2M^2 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

这就补充了第二节中给出的谱条件假定. 其共轭波函数定义为

$$\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) = \langle \mathbf{k}\zeta | T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)) | 0 \rangle, \quad (3.4)$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{qi}(x_2, x_1) = \langle qi | T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)) | 0 \rangle. \quad (3.5)$$

由波函数的定义, 与基本场 (2.3) 式相比较, 很自然地设想定义复合场算符:

$$B(x_1, x_2) = T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)). \quad (3.6)$$

显然有

$$\langle 0 | B(x_1, x_2) | \mathbf{k}\zeta \rangle = \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_1, x_2). \quad (3.1')$$

但这样定义的 $B(x_1, x_2)$ 的真空平均值并不为零, 这与通常场论中的场算符的真空平均值为零的特点不一致的. 重新定义复合场算符

$$B(x_1, x_2) = T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) - \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) | 0 \rangle. \quad (3.7)$$

显然式 (3.1') 仍然成立, 但其真空平均值为零,

$$\langle 0 | B(x_1, x_2) | 0 \rangle = 0. \quad (3.8)$$

这样, 修改后的定义式 (3.7) 与修改前的定义式 (3.6) 只相差一个常数 $\langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) | 0 \rangle$, 对于场算符的性质无大的影响, 因此为了方便起见, 本文讨论中仍从定义式 (3.6) 出发. 由于我们是从波函数来引入复合场算符, 显然用这种方法引入复合场算符并不是唯一的, 这里用 $T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))$ 表示复合场算符只是一种可能的方法.

类似于第二节中从式 (2.4) 定义式 (2.5), 对于复合场, 从 B-S 波函数的正交归一条件 [见式 (A. 34)], 同样也可以定义

$$a_{k\zeta}^{\dagger}(T) = i \int d^3X d^4x \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x)_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta X_0} Q' B_{\nu\mu}(X, x), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} b_{k\zeta}^{\dagger}(T) &= i \int d^3X d^4x B_{\mu\nu}(X, x) \frac{\delta}{\delta X_0} Q' \mathcal{A}_{k\zeta}(X, -x)_{\nu\mu}, \\ a_{qi}(T) &= i \int d^3X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{qi}(X, x)_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta X_0} Q' B_{\nu\mu}(X, x), \\ b_{qi}^{\dagger}(T) &= i \int d^3X d^4x B_{\mu\nu}(X, x) \frac{\delta}{\delta X_0} Q' \mathcal{A}_{qi}(X, -x)_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

1) 为了方便起见, 本文略去了么旋部分, 包括后面定义的复合粒子场量也是如此, 这并不影响问题的本质. 实质上 ζ 可以包含么旋指标在内.

由于目前对 B-S 方程的完备性尚不清楚,当然也给不出完备关系,因此也无法从式(3.9)和(3.10)导出复合场算符的展开式.

在引入这些定义以后,可以进一步讨论复合场的性质:渐近条件,相对论不变性,对易关系,希耳伯空间的完备基等问题.

渐近条件 由层子、反层子构成的系统其状态不外乎三类:稳定的束缚态,不稳定的束缚态,散射态.相应于这三类状态,假定三种不同的渐近条件来描述.

对于稳定的束缚态:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^{\zeta}(T) &\rightarrow a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty, \\ b_{\mathbf{k}}^{\zeta*}(T) &\rightarrow b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty; \end{aligned} \quad (3.11)$$

对于不稳定粒子:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^{\eta}(T) &\rightarrow 0 & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty, \\ b_{\mathbf{k}}^{\eta*}(T) &\rightarrow 0 & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty; \end{aligned} \quad (3.12)$$

对于散射态:

$$\begin{aligned} a_{qi}(T) &\rightarrow a_{qi}^{\text{in}} & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty, \\ b_{qi}^*(T) &\rightarrow b_{qi}^{*\text{in}} & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty. \end{aligned} \quad (3.13)$$

式(3.11)–(3.13)都是在弱收敛意义下定义的.严格地讲应以 B-S 方程的波包解去定义 a 和 b .式(3.11)和(3.13)中的 $a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})$, $b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})$, a_{qi}^{in} 和 $b_{qi}^{*\text{in}}$ 都是与 T 无关的稳定极限,这是合理的.因为对于稳定的束缚态来讲,在 $T \rightarrow \mp\infty$ 时,可以看作无任何相互作用的物理自由粒子或散射的渐近态.

注意到 B-S 方程波函数式(3.1)中的态矢 $|\mathbf{k}\zeta\rangle$ 是处于质量壳上 $k^2 = -\mu_{\zeta}^2$,因此, B-S 方程波函数也满足 Klein-Gordon 方程:

$$\begin{aligned} (\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x) &= 0, \\ (\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \overline{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

利用式(3.14),对式(3.9)直接微商就导至:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} a_{\mathbf{k}\zeta}(T) &= i \int d^3X d^4x \overline{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x)_{,\mu\nu} Q'(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) B_{\nu\mu}(X, x), \\ \frac{\partial}{\partial T} b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) &= -i \int d^3X d^4x [(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) B_{\mu\nu}(X, x)] Q' \mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x)_{,\nu\mu}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

再利用关系式

$$\int_{\mp\infty}^T dT' \frac{\partial}{\partial T'} a_{\mathbf{k}\zeta}(T') = a_{\mathbf{k}\zeta}(T) - \lim_{T \rightarrow \mp\infty} a_{\mathbf{k}\zeta}(T), \quad (3.16)$$

在渐近条件式(3.11)–(3.13)假定下,就可以获得

$$a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) = a_{\mathbf{k}\zeta}(T) - i \int_{\mp\infty}^T d^3X d^4x \overline{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x)_{,\mu\nu} Q'(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) B_{\nu\mu}(X, x), \quad (3.17a)$$

$$b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) = b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) + i \int_{\mp\infty}^T d^3X d^4x [(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) B_{\mu\nu}(X, x)] Q' \mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(X, -x)_{,\nu\mu}, \quad (3.17b)$$

$$0 = a_{k\eta}(T) - i \int_{-\infty}^T d^4X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{k\eta}(X, x)_{\mu\nu} Q'(\mu_\eta^2 - \square_X) B_{\nu\mu}(X, x), \quad (3.18a)$$

$$0 = b_{k\eta}^*(T) + i \int_{-\infty}^T d^4X d^4x [(\mu_\eta^2 - \square_X) B_{\mu\nu}(X, x)] Q' \mathcal{A}_{k\eta}(X, -x), \quad (3.18b)$$

$$a_q^{\text{in}} = a_q(T) - i \int_{-\infty}^T d^4X d^4x \bar{\mathcal{A}}_q(X, x)_{\mu\nu} Q'(\mu_q^2 - \square_X) B_{\nu\mu}(X, x), \quad (3.19a)$$

$$b_q^{*\text{in}} = b_q^*(T) + i \int_{-\infty}^T d^4X d^4x [(\mu_q^2 - \square_X) B_{\mu\nu}(X, x)] Q' \mathcal{A}_q(X, -x). \quad (3.19b)$$

式(3.19)中的 μ_q^2 定义为 $q^2 = -\mu_q^2$ 。由于B-S波函数的完备性问题有待解决,这里不可能从式(3.17)–(3.19)乘以相应的波函数导出 Yang-Feldman 方程。类似于基本场的式(2.11),这里也可以定义某一介子的 in-场量和 out-场量:

$$B_{\text{out}}^\zeta(X, x) = \sum_{\mathbf{k}} [a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) \bar{\mathcal{A}}_{\zeta}(X, x) + b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) \bar{\mathcal{A}}_{\zeta}(X, -x)]. \quad (3.20)$$

对于散射态来讲,类似地可以定义:

$$B_{\text{out}}^c(X, x) = \sum_{qi} [a_{qi}^{\text{out}} \mathcal{A}_{qi}(X, x) + b_{qi}^{*\text{in}} \bar{\mathcal{A}}_{qi}(X, -x)]. \quad (3.21)$$

从式(3.14)很容易见到, $B_{\text{out}}^\zeta(X, x)$ 满足 Klein-Gordon 方程:

$$(\mu_\zeta^2 - \square) B_{\text{out}}^\zeta(X, x) = 0. \quad (3.22)$$

从定义(3.20)和(3.21)式也可以写出系数的表达式:

$$a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) = i \int d^3X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{\zeta}(X, x)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_0} Q' B_{\text{out}}^\zeta(X, x)_{\nu\mu},$$

$$b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) = i \int d^3X d^4x B_{\text{out}}^\zeta(X, x)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_0} Q' \mathcal{A}_{\zeta}(X, -x)_{\nu\mu}, \quad (3.23)$$

$$a_{qi}^{\text{in}} = i \int d^3X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{qi}(X, x)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_0} Q' B_{\text{out}}^c(X, x)_{\nu\mu},$$

$$b_{qi}^{*\text{in}} = i \int d^3X d^4x B_{\text{out}}^c(X, x)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial X_0} Q' \mathcal{A}_{qi}(X, -x)_{\nu\mu}. \quad (3.24)$$

如果当 $T \rightarrow \mp\infty$ 时,只有稳定的介子态和散射态,那么进而可以定义复合场的 in-场和 out-场:

$$B_{\text{out}}^{\text{in}}(X, x) = \sum_{\zeta} [B_{\text{out}}^\zeta(X, x) + B_{\text{out}}^c(X, x)]. \quad (3.25)$$

由于B-S波函数的正交性,式(3.23)和(3.24)中的复合场量 $B_{\text{out}}^\zeta(X, x)$ 和 $B_{\text{out}}^c(X, x)$ 都可以换成 $B_{\text{out}}^{\text{in}}(X, x)$ 。

相对论不变性 按照第二节中的假定(2.1)式,

$$U(a, b) \Psi_a(x) U^{-1}(a, b) = S_{a\beta}^{-1} \Psi_\beta(ax + b)$$

可以给出复合场量在非齐次 Lorentz 变换下的变换性质为

$$U(a, b) B_{a\beta}(x_1, x_2) U^{-1}(a, b) = S_{a\gamma}^{-1} S_{\beta\delta}^{-1} B_{\gamma\delta}(ax_1 + b, ax_2 + b) \quad (3.26)$$

或

$$U(a, b) B_{a\beta}(X, x) U^{-1}(a, b) = S_{a\gamma}^{-1} S_{\beta\delta}^{-1} B_{\gamma\delta}(aX + b, ax). \quad (3.26')$$

特别对于平移不变性来讲,有

$$\begin{aligned} B(X+b, x) &= U(0, b)B(X, x)U^{-1}(0, b) \\ &= \exp(-iP_\mu b_\mu)B(X, x)\exp(iP_\mu b_\mu), \end{aligned} \quad (3.27)$$

这表明复合场满足相同的运动方程

$$i \frac{\partial}{\partial X_\mu} B(X, x) = [P_\mu, B(X, x)]. \quad (3.27')$$

由式(3.27')可以获得

$$\begin{aligned} [P_\mu, a_{\mathbf{k}\zeta}(T)] &= i \int d^3X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x) \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} Q' [P_\mu, B(X, x)] \\ &= -k_\mu a_{\mathbf{k}\zeta}(T) + i\delta_{\mu 4} \frac{\partial}{\partial X_4} a_{\mathbf{k}\zeta}(T). \end{aligned} \quad (3.28a)$$

类似地也有

$$[P_\mu, b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T)] = k_\mu b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) + i\delta_{\mu 4} \frac{\partial}{\partial X_4} b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T). \quad (3.28b)$$

在式(3.28a)和(3.28b)两边取弱收敛意义下渐近条件式(3.11),

$$\begin{aligned} [P_\mu, a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})] &= -k_\mu a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) + i\delta_{\mu 4} \left(\frac{\partial}{\partial X_4} a_{\mathbf{k}\zeta}(T) \right)_{T \rightarrow \mp\infty}, \\ [P_\mu, b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})] &= k_\mu b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) + i\delta_{\mu 4} \left(\frac{\partial}{\partial X_4} b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) \right)_{T \rightarrow \mp\infty}. \end{aligned}$$

如果我们要求渐近条件式(3.11)是趋于稳定的极限,亦即在 $T \rightarrow \mp\infty$ 时,区域内点点重合,或采用类似文献[1]中的讨论,那么在弱收敛意义下有

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \mp\infty} \left(\frac{\partial}{\partial T} a_{\mathbf{k}\zeta}(T) \right) &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \mp\infty} \left(\frac{\partial}{\partial T} b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) \right) &= 0. \end{aligned}$$

因此,最终获得下述对易关系:

$$[P_\mu, a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})] = -k_\mu a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}), \quad (3.29a)$$

$$[P_\mu, b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})] = k_\mu b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}). \quad (3.29b)$$

对此两式取共轭,就给出

$$[P_\mu, a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})] = k_\mu a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}), \quad (3.29c)$$

$$[P_\mu, b_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k})] = -k_\mu b_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}). \quad (3.29d)$$

式(3.29)的四个对易关系表明,可以由 a_{ζ}^{in} 和 b_{ζ}^{out} 去定义总能动量的本征态. 其中 $a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})$ 和 $b_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k})$ 可以由定义式(3.23)取共轭给出

$$a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) = -i \int d^3X d^4x (B_{\text{out}}^{\zeta}(X, x))^+ Q'^+ \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} (\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x))^+, \quad (3.30a)$$

$$b_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) = -i \int d^3X d^4x (\mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(X, -x))^+ Q'^+ \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} (B_{\text{out}}^{\zeta}(X, x))^+, \quad (3.30b)$$

注意到式 (A. 13) 和 (A. 35) 可以给出

$$a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) = i \int d^3X d^4x \bar{B}_{\text{out}}^{\zeta}(X, x) \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} Q' \mathcal{A}_{\zeta}(X, x), \quad (3.31a)$$

$$b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) = i \int d^3X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{\zeta}(X, -x) \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} Q' \bar{B}_{\text{out}}^{\zeta}(X, x), \quad (3.31b)$$

其中 $\bar{B}_{\text{out}}^{\zeta}(X, x)$ 定义为

$$\bar{B}_{\text{out}}^{\zeta}(X, x) = -\gamma_4 [B_{\text{out}}^{\zeta}(X, x)]^+ \gamma_4, \quad (3.32)$$

利用 $B_{\text{out}}^{\zeta}(X, x)$ 的定义和式 (A. 13) 可知

$$\bar{B}_{\text{out}}^{\zeta}(X, x) = \sum_{\mathbf{k}} [a_{\zeta}^{*\text{out}}(\mathbf{k}) \bar{\mathcal{A}}_{\zeta}(X, x) + b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) \mathcal{A}_{\zeta}(X, -x)]. \quad (3.32')$$

利用正交归一条件式 (A. 34) 很易验证式 (3.31) 是正确的。现在的问题是 $a_{\zeta}^{*\text{out}}(\mathbf{k})$ 和 $b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})$ 是看作谁的渐近极限？这个问题看起来可以简单地回答是 $a_{\zeta}^{*}(T)$ 和 $b_{\zeta}(T)$ 的渐近极限。其实不然，因为对式 (3.9) 直接取共轭给出 $a_{\zeta}^{*}(T)$, $b_{\zeta}(T)$, 其中出现了反编时算符 T^+ ,

$$\begin{aligned} \gamma_4 B^+(x_1 x_2) \gamma_4 &= \gamma_4 (T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)))^+ \gamma_4 \\ &= T^+(\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)). \end{aligned} \quad (3.33)$$

这将在理论中出现困难,而

$$T(\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)) = T^+(\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)) + \varepsilon(t_2 - t_1) \{\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1)\}. \quad (3.34)$$

当用了定域对易关系假定式 (2.2) 以后, 只给出在 $x_1 \sim x_2$ 类空时, $T^+(\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1))$ 与 $T(\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1))$ 两者相等。一般情况下, 反编时乘积不能用编时乘积来代替, 这也表明复合场算符 $B(x_1, x_2)$ 厄米性是不成立的, 为了回避这个困难, 引入算符:

$$a'_{\zeta}(T) = i \int d^3X d^4x T(\Psi_{\mu}(x_2) \bar{\Psi}_{\nu}(x_1)) \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} Q' \mathcal{A}_{\zeta}(X, x)_{\nu\mu}, \quad (3.35)$$

$$b'_{\zeta}(T) = i \int d^3X d^4x \bar{\mathcal{A}}_{\zeta}(X, -x)_{\mu\nu} \frac{\vec{\partial}}{\partial X_0} Q' T(\Psi_{\nu}(x_2) \bar{\Psi}_{\mu}(x_1)). \quad (3.36)$$

它们的渐近极限在弱收敛意义下有

$$a'_{\zeta}(T) \rightarrow a_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k}) \quad \text{当 } T \rightarrow \mp\infty,$$

$$b'_{\zeta}(T) \rightarrow b_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k}) \quad \text{当 } T \rightarrow \mp\infty.$$

类似于前面从式 (3.28) 到 (3.29) 的推导, 可以给出

$$[P_{\mu}, a_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k})] = k_{\mu} a_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k}), \quad (3.37a)$$

$$[P_{\mu}, b_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k})] = -k_{\mu} b_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k}). \quad (3.37b)$$

将式 (3.29) 与 (3.37) 相比较就可以见到, $a_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k})$ 与 $a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})$ 具有相同的量子数, 相同的本征值, 与 P_{μ} 的对易关系相同, 它们之间的区别只可能乘上一个与 P_{μ} 相对易的算符, 对 $a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})$ 不产生本质的影响, 因此在略去这可能出现的差别以后, 可以认为 $a_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k})$ 与 $a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k})$ 是一回事, 也就是说 $a_{\zeta}^{\prime\text{in}}(\mathbf{k})$ 可以认为是 $a'_{\zeta}(T)$ 的渐近极限。同

样的讨论对 $b_{\zeta}^{\text{out} \text{ in}}(\mathbf{k})$ 和 $b_{\zeta}^{* \text{ in}}(\mathbf{k})$ 也成立. 这样在弱收敛意义下可以记作:

$$\begin{aligned} a'_{\mathbf{k}\zeta}(T) &\rightarrow a_{\zeta}^{* \text{ in}}(\mathbf{k}) & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty, \\ b'_{\mathbf{k}\zeta}(T) &\rightarrow b_{\zeta}^{\text{out} \text{ in}}(\mathbf{k}) & \text{当 } T \rightarrow \mp\infty. \end{aligned} \quad (3.38)$$

对易关系 类似于基本场情况下导出的对易关系, 在复合场情况下, Zimmermann 基于基本场所满足的定域对易关系和谱条件, 证明了下列恒等式:

$$\begin{aligned} &\int dXdY F_a^*(X) F_B(Y) (\mu'^2 - \square_X)(\mu^2 - \square_Y) \\ &\quad \cdot T \left[A\left(X + \frac{x}{2}\right) A\left(X - \frac{x}{2}\right) A\left(Y + \frac{y}{2}\right) A\left(Y - \frac{y}{2}\right) \right] \\ &= \int dY dX F_a^*(X) F_B(Y) (\mu'^2 - \square_X)(\mu^2 - \square_Y) \\ &\quad \cdot T \left[A\left(X + \frac{x}{2}\right) A\left(X - \frac{x}{2}\right) A\left(Y + \frac{y}{2}\right) A\left(Y - \frac{y}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

其中 $A(x)$ 是中性标量场, $F_a(X)$ 是复合场方程的波包解,

$$(\mu'^2 - \square_X) F_a(X) = 0.$$

在平面波极限下,

$$F_p(X) = \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{iPx} \quad (P' = -\mu^2).$$

在式 (3.39) 两边乘以内部波函数部分 $\mathcal{A}_{k'}(x)$ 和 $\mathcal{A}_k(y)$, 并对内部坐标 x, y 积分, 当然等式仍旧成立. 这里, 我们不加证明地推广这个结果到基本场是旋量场情况, 因而在这里就出现相应的恒等式:

$$\begin{aligned} &\int dXdY dxdy \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \\ &\quad \cdot T \left[\psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \bar{\psi}_\beta\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_\gamma\left(Y - \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}_\delta\left(Y + \frac{y}{2}\right) \right] Q' \mathcal{A}_{k\zeta}(Y, y)_{\delta\gamma} \\ &= \int dY dX dxdy \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \\ &\quad \cdot T \left[\psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \bar{\psi}_\beta\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_\gamma\left(Y - \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}_\delta\left(Y + \frac{y}{2}\right) \right] Q' \mathcal{A}_{k\zeta}(Y, y)_{\delta\gamma}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

为了简单起见, 在式 (3.40) 中都以平面波形式出现, 严格地应以波包指标 α, β 代替. 其中 $k^2 = -\mu_{\zeta}^2$, $k'^2 = -\mu_{\zeta'}^2$. 分别考察等式 (3.40) 的右边和左边:

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \int dY dX dxdy \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \\ &\quad \cdot T \left[\psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \bar{\psi}_\beta\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_\gamma\left(Y - \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}_\delta\left(Y + \frac{y}{2}\right) \right] Q' \mathcal{A}_{k\zeta}(Y, y)_{\delta\gamma} \\ &= \int dY dX dxdy (\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \frac{\partial}{\partial X_0} \left\{ \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q' \frac{\tilde{\delta}}{\partial X_0} \right. \\ &\quad \left. \cdot T \left[\psi_a\left(X + \frac{x}{2}\right) \bar{\psi}_\beta\left(X - \frac{x}{2}\right) \psi_\gamma\left(Y - \frac{y}{2}\right) \bar{\psi}_\delta\left(Y + \frac{y}{2}\right) \right] \right\} Q' \mathcal{A}_{k\zeta}(Y, y)_{\delta\gamma} \end{aligned}$$

$$= \int dY dX dx dy (\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \left\{ \bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q' \frac{\partial}{\partial X_0} \right. \\ \left. \cdot T \left[\psi_{\alpha} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_{\beta} \left(X - \frac{x}{2} \right) \psi_{\gamma} \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\psi}_{\delta} \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right] \right\}_{-\infty}^{\infty} Q' \mathcal{K}_{k\zeta}(Y, y)_{\delta\gamma}.$$

一般地讲, $T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(y_2)\bar{\psi}(y_1))$ 共有 4! 项展开式, 考虑到束缚态内部波函数随内部变量 $x \rightarrow \infty$ 而趋于零的特性, 即使内部波函数不满足这个特性, 与 Q 算符乘在一起也可能会满足这个特性, 因此, 可以认为 x 只在有限范围内¹⁾. 这里固定 Y_0 , 当 $X_0 \rightarrow \infty$ 时, 则有 $X_0 \gg Y_0$; 当 $X_0 \rightarrow -\infty$ 时, 则有 $Y_0 \gg X_0$. 因而 T 乘积中实际有贡献的只有两项, 这样就可以将 T 乘积项记作:

$$T \left[\psi_{\alpha} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_{\beta} \left(X - \frac{x}{2} \right) \psi_{\gamma} \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\psi}_{\delta} \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right] \\ = \theta(X_0 - Y_0) T \left[\psi_{\alpha} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_{\beta} \left(X - \frac{x}{2} \right) \right] T \left[\psi_{\gamma} \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\psi}_{\delta} \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right] \\ + \theta(Y_0 - X_0) T \left[\psi_{\gamma} \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\psi}_{\delta} \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right] T \left[\psi_{\alpha} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_{\beta} \left(X - \frac{x}{2} \right) \right] + \dots \quad (3.41)$$

由于式 (3.40) 中 Klein-Gordon 算子以时间的二次微分出现, 与第二节中讨论的基本场情况不一样, 带有 $\delta(X_0 - Y_0)$ 的等时对易关系项的贡献一般不能被略去, 亦即 Redmond 和 Uretsky 的批评是存在的. 然而用文献[1]中的估值方法可以见到, 等时对易关系项的贡献是可以被忽略的. 由此获得

$$\text{右边} = a_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}') a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) - a_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}') a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) \\ - a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}') + a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}').$$

类似地对于式 (3.40) 的左边, 可以获得

$$\text{左边} = a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) a_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}') - a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}') \\ - a_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}') a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}') + a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}') a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}).$$

这样恒等式 (3.40) 就给出下列关系:

$$[a_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}'), a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k})] = [a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}'), a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})]. \quad (3.42)$$

再利用另一个等式:

$$\int dX dY dx dy \bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q' (\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) (\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \\ \cdot T \left[\psi_{\alpha} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\psi}_{\beta} \left(X - \frac{x}{2} \right) \psi_{\gamma} \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\psi}_{\delta} \left(Y + \frac{y}{2} \right) \psi(z) \right] Q' \mathcal{K}_{k\zeta}(Y, y)_{\delta\gamma} \\ = \int dY dX dx dy \bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(X, x)_{\beta\alpha} Q' (\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) (\mu_{\zeta}^2 - \square_Y)$$

1) 在某些情况下, B-S 波函数当 $x \rightarrow \infty$ 时, 不一定趋于零, 如 Wick 的复合粒子质量为零的解, 虽然在 x 沿类空方向趋于无穷时而趋于零, 但当 x 沿类时方向趋于无穷时却是发散的. 因而这里的证明只是对某一类的波函数才正确. 至于一般情况下, 这实质上是一个广义函数的积分次序 d^4X 和 d^4x 能否交换问题. 如果能交换, 则可以先积 d^4X , 而 x 是固定的, 当 $X_0 \rightarrow \pm\infty$ 时, T 乘积中只有两项有贡献. 对于 B-S 波函数在 $x \rightarrow \infty$ 时趋于零的情况, 积分一致收敛是没有问题的. 但在 Wick 解的情况下, 积分是否具有一致收敛的特性, 值得进一步研究. 作者感谢北京基本粒子理论讨论班上北京大学的同志们指出存在这一问题.

$$\cdot T \left[\Psi_a \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_\beta \left(X - \frac{x}{2} \right) \Psi_\gamma \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\Psi}_\delta \left(Y + \frac{y}{2} \right) \Psi(z) \right] \mathcal{O}' \mathcal{R}_{k\zeta}(Y, y)_{\beta\gamma}, \quad (3.43)$$

作类似的推导, 得出对易关系

$$[[a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}'), a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})], \Psi(z)] = 0.$$

由于前面假定了 $\Psi(z)$ 是完备的, 因此

$$[a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}'), a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})] = c \text{ 数}. \quad (3.44)$$

既然是 c 数, 两边取真空平均值, 并利用 B-S 波函数的正交归一条件, 就可以获得

$$[a_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}'), a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k})] = [a_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}'), a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k})] = \delta_{\zeta\zeta'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (3.45)$$

类似地, 在反粒子情况下也有相应的恒等式而导致

$$[b_{\zeta'}^{\text{in}}(\mathbf{k}), b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}')] = [b_{\zeta'}^{\text{out}}(\mathbf{k}), b_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}')] = \delta_{\zeta\zeta'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (3.46)$$

此外, 利用相应的恒等式还可以获得其他各对易关系为零。

对于层子系统的散射态, 利用上述恒等式和渐近条件式 (3.13) 似乎也可以导致如同式 (3.45) 和 (3.46) 的对易关系, 其实不可能。因为对于散射态情况, 系统的内部波函数 (即使是在 $\mathcal{Q}$ 算符作用以后) 是不会具有定域在空间某一区域的特点, 内部坐标 x 不是有限的, 因此 T 乘积中不可能分出式 (3.41) 中两个主要贡献项, 一般地 $4!$ 项都有贡献, 其对易关系将与束缚态情况完全不同。这样也就导不出 Zimmermann 的荒谬结果,

$$[a_{\mathbf{p}}^{\text{in}}, a_{q_i}^{\text{in}}] = 0, \quad (3.47)$$

其中 $a_{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ 是层子的湮灭算符, $a_{q_i}^{\text{in}}$ 是层子、反层子系统的散射态算符, 而对易关系式 (3.47) 正是 Redmond 和 Uretski 批评的另一个重要之点^[6]。

完备性 在第二节中, 从式 (2.13) 和 (2.14) 已经在希耳伯空间里构成层子的各种状态, 这一节从式 (3.45), (3.46) 和 (3.39) 又可以构成层子的各种束缚态(介子态), 这些态都是总能动量的本征态。前面在第二节中曾经从完备性和谱条件的假定讨论了构成束缚态的可能性, 这一节则是具体地实现了这种可能性, 即从基本场 $\Psi(x)$ 构成了束缚态, 且是能动量的本征态, 显然束缚态是包含在基本场集合 $\{\Psi(x)\}$ 的完备集之中。对于散射态, 从 B-S 方程的散射态积分形式解, 不难猜测散射态可以由层子、反层子态组成。这样, 我们可以假定在希耳伯空间里层子的各种状态加上由层子、反层子构成的各种束缚态构成完备集, 或者说 $\{\psi_{\text{in}}(x)\}$ 加上 $\{B_{\text{in}}^{\zeta}(x_1, x_2)\}$, $\{B_{\text{in}}^{\bar{\zeta}}(x_1, x_2)\}$, $\cdots$ 构成希耳伯空间的完备集(或者说 out-集合构成完备集)。这个假定与第二节中假定的由 $\{\Psi(x)\}$ 构成完备集是不矛盾的, 可以用 Borchers 方法^[7]证明。

四、S 矩 陣 元

前一节引入复合场并讨论了复合场的性质, 由此而定义了海森堡表象的两组完备基, 这就为这一节讨论 S 矩阵元提供了基础。

为了讨论方便起见, 首先给出一组化简公式。利用等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{\partial}{\partial T} f(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} f(T) - \lim_{T \rightarrow -\infty} f(T),$$

在弱收敛意义下,利用上一节渐近条件可以获得下列一组化简公式:

$$a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) - a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) = i \int d^4X d^4x (\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(X, x))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \cdot \text{T} \left[\Psi_{\nu} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\mu} \left(X - \frac{x}{2} \right) \right], \quad (4.1a)$$

$$b_{\zeta}^{*\text{out}}(\mathbf{k}) - b_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) = -i \int dX dx \left[(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \text{T} \left(\Psi_{\nu} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\mu} \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) \right] \cdot \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k\zeta}(X, -x))_{\mu\nu}, \quad (4.1b)$$

$$a_{\zeta}^{*\text{out}}(\mathbf{k}) - a_{\zeta}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) = -i \int dX dx \left[(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \text{T} \left(\Psi_{\nu} \left(X - \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\mu} \left(X + \frac{x}{2} \right) \right) \right] \cdot \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k\zeta}(X, x))_{\mu\nu}, \quad (4.1c)$$

$$b_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}) - b_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}) = i \int dX dx (\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(X, -x))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \cdot \text{T} \left[\Psi_{\nu} \left(X - \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\mu} \left(X + \frac{x}{2} \right) \right]. \quad (4.1d)$$

下面分别讨论跃迁矩阵元和散射矩阵元.在讨论这些矩阵元之前,首先讨论一个粒子散射的情况.

一个粒子散射

$$\begin{aligned} {}_{\text{out}}\langle \mathbf{k}'\zeta' | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} &= \langle 0 | a_{\zeta}^{\text{out}}(\mathbf{k}') | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} \\ &= \langle 0 | a_{\zeta}^{\text{in}}(\mathbf{k}') | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} \\ &\quad + i \int dX dx (\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) \\ &\quad \cdot \langle 0 | \text{T} \left(\Psi_{\nu} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\mu} \left(X - \frac{x}{2} \right) | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} \right. \\ &= \delta_{\zeta\zeta'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + i \int dX d^4x (\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x))_{\mu\nu} \\ &\quad \cdot \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) (\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(X, x))_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

对于上式中的第二项积分,可以分成两种情况讨论:

当 $\zeta = \zeta'$ 时 $(\mu_{\zeta}^2 - \square_X) \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x) = 0$,

$$\begin{aligned} \text{当 } \zeta \neq \zeta' \text{ 时 } & i \int dX dx (\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \mu_{\zeta}^2) (\mathcal{A}_{k\zeta}(X, x))_{\nu\mu} \\ &= i(\mu_{\zeta'}^2 - \mu_{\zeta}^2) \int d^4X e^{i(k-k')X} \int d^4x (\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(x))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k\zeta}(x))_{\nu\mu} \\ &= 0. \end{aligned}$$

最后一个等式是由于波函数的正交性[见附录式(A.36)],因此,

$$\begin{aligned} & \int dX dx (\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) \\ & \cdot \langle 0 | \text{T} \left(\Psi_{\nu} \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\mu} \left(X - \frac{x}{2} \right) | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$${}_{\text{out}}\langle \mathbf{k}'\zeta' | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} = \delta_{\zeta\zeta'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (4.4)$$

由式(4.4)可知,在不计相因子的情况下,

$$| \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{in}} = | \mathbf{k}\zeta \rangle_{\text{out}}. \quad (4.5)$$

对于单个束缚态也有 in-态和 out-态相同的等式, 以后对于单个束缚态不再标出指标 in 或 out. 从式 (4.4) 还可以获得另一个等式, 继续将式 (4.4) 中的 $|\mathbf{k}\zeta\rangle$ 抽出来,

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}\zeta\rangle &= a_{\zeta}^{*in}(\mathbf{k})|0\rangle = \lim_{Y_0 \rightarrow -\infty} a_{\mathbf{k}\zeta}^{*}(Y_0)|0\rangle \\ &= \lim_{Y_0 \rightarrow -\infty} i \int d^3Y d^4y \left[(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) T \left(\Psi_a \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\Psi}_b \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial Y_0} \hat{Q}'(\mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(Y, y))_{\beta a} |0\rangle. \end{aligned}$$

由于在积分中出现了束缚态内部结构波函数, 同于前面的讨论, y 只在空间的有限区域里, 因此, $Y_0 \rightarrow -\infty$ 时, 无论 $(Y_0 - \frac{y_0}{2})$ 还是 $(Y_0 + \frac{y_0}{2})$ 都趋于 $-\infty$. 考虑到这一特点, 在等式 (4.4) 中抽出 $|\mathbf{k}\zeta\rangle$ 以后, 引入编时算符就是对基本场的坐标 x_1, x_2, y_1, y_2 编时, 因此, 式 (4.4) 给出

$$\begin{aligned} &\int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 (\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}\zeta'}(x_1, x_2))_{\mu\nu} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \\ &\quad \cdot \langle 0 | T(\Psi_\nu(x_1) \bar{\Psi}_\mu(x_2) \Psi_a(y_2) \bar{\Psi}_b(y_1)) | 0 \rangle \hat{Q}'(\mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(y_1, y_2))_{\beta a} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

式 (4.6) 中的真空平均值正是四点 Green 函数:

$$K_{\nu\mu a\beta}(x_1 x_2; y_2 y_1) = \langle 0 | T(\Psi_\nu(x_1) \bar{\Psi}_\mu(x_2) \Psi_a(y_2) \bar{\Psi}_b(y_1)) | 0 \rangle, \quad (4.7)$$

可以认为方程式 (4.6) 是 Green 函数 K 的一条性质.

跃迁矩阵元 束缚态的电磁衰变和弱衰变都牵涉到计算矩阵元 $\langle \mathbf{k}'\zeta' | J(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle$, 其中 $J(z)$ 可以是电磁流也可以是弱流. 对此矩阵元进行化简, 首先将初态抽出来,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle &= \langle 0 | J_\mu(z) | 0 \rangle \delta_{\zeta\zeta'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &\quad + i \int d^4X d^4x \left[(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) \langle \mathbf{k}'\zeta' | T \left(J_\mu(z) \Psi_a \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_b \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) | 0 \rangle \right] \\ &\quad \cdot \hat{Q}'(\mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x))_{\beta a}, \end{aligned}$$

对于第一项无论是电磁流还是弱流都可以认为是零. 因此,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle &= i \int d^4X d^4x \left[(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) \langle \mathbf{k}'\zeta' | T \left(J_\mu(z) \Psi_a \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_b \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) | 0 \rangle \right] \\ &\quad \cdot \hat{Q}'(\mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(X, x))_{\beta a}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

进一步将式 (4.8) 中的末态抽出来, 给出下列等式:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle &= - \int d^4X d^4x d^4Y d^4y (\bar{\mathcal{A}}_{\mathbf{k}'\zeta'}(X, x))_{\sigma\rho} \\ &\quad \cdot \hat{Q}' \left[(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \langle 0 | T \left(\Psi_\rho \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_\sigma \left(X - \frac{x}{2} \right) J_\mu(z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \Psi_a \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\Psi}_b \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right) | 0 \rangle \right] \hat{Q}'(\mathcal{A}_{\mathbf{k}\zeta}(Y, y))_{\beta a}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

在式 (4.9) 中的编时乘积是对基本场的坐标编时, 类似于前面的讨论, 这是由于内部波函数使得对 x 和 y 的积分只在有限范围内. 式 (4.9) 表明, 一个束缚态的跃迁矩阵元可以通过编时乘积的真空平均值和束缚态内部波函数来表示.

散射矩阵元 以两个复合粒子的弹性散射为例,用 ζ_1, ζ'_1 代表一种介子的初态、终态,用 ζ_2, ζ'_2 代表另一种介子的初态、终态如图 1 所示.

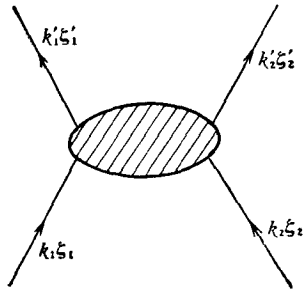


图 1

对于这样一个过程, S 矩阵元为

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle \mathbf{k}'_1 \zeta'_1 | \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | \mathbf{k}_1 \zeta_1 \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle_{\text{in}} \\ &= \langle \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | a_{\zeta'_1}^{\text{out}}(\mathbf{k}'_1) | \mathbf{k}_1 \zeta_1 \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle_{\text{in}} \\ &= \langle \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | a_{\zeta'_1}^{\text{in}}(\mathbf{k}'_1) | \mathbf{k}_1 \zeta_1 \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle \\ &+ i \int d^4 X d^4 x (\mathcal{A}_{k'_1 \zeta'_1}(X, x))_{aB} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'_1}^2 - \square_X) \\ &\cdot \langle \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | T \left(\Psi_B \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_A \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) \\ &\cdot | \mathbf{k}_1 \zeta_1 \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle_{\text{in}}. \end{aligned}$$

这样就导致散射振幅:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'_1 \zeta'_1, \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | (S - 1) | \mathbf{k}_1 \zeta_1, \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle \\ &= i \int dX dx (\mathcal{A}_{k'_1 \zeta'_1}(X, x))_{aB} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'_1}^2 - \square_X) \\ &\cdot \left\langle \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | T \left(\Psi_B \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_A \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) | \mathbf{k}_1 \zeta_1 \mathbf{k}_2 \zeta_2 \right\rangle_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

如果进一步将初态中的 $k_1 \zeta_1$ 抽出来,就获得

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'_1 \zeta'_1, \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | (S - 1) | \mathbf{k}_1 \zeta_1, \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle \\ &= - \int dX dx dY dy (\mathcal{A}_{k'_1 \zeta'_1}(X, x))_{aB} \hat{Q}' \left[(\mu_{\zeta'_1}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta_1}^2 - \square_Y) \right. \\ &\cdot \left. \langle \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | T \left(\Psi_B \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_A \left(X - \frac{x}{2} \right) \Psi_\mu \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\Psi}_\nu \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right) | \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle \right] \\ &\cdot \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k_1 \zeta_1}(Y, y))_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

如果继续将初态和终态中的第二个介子抽出来,并利用等式(4.6),就可以获得

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'_1 \zeta'_1, \mathbf{k}'_2 \zeta'_2 | (S - 1) | \mathbf{k}_1 \zeta_1, \mathbf{k}_2 \zeta_2 \rangle \\ &= \int dX dx dY dy dX' dx' dY' dy' (\mathcal{A}_{k'_1 \zeta'_1}(X', x'))_{aB} \hat{Q}' (\mathcal{A}_{k'_2 \zeta'_2}(Y', y'))_{\mu\nu} \\ &\cdot \hat{Q}' \left[(\mu_{\zeta'_1}^2 - \square_X)(\mu_{\zeta'_2}^2 - \square_{Y'}) (\mu_{\zeta'_1}^2 - \square_{X'}) (\mu_{\zeta'_2}^2 - \square_{Y'}) \langle 0 | T \left(\Psi_B \left(X' + \frac{x'}{2} \right) \right. \right. \\ &\cdot \bar{\Psi}_A \left(X' - \frac{x'}{2} \right) \Psi_\nu \left(Y' + \frac{y'}{2} \right) \bar{\Psi}_\mu \left(Y' - \frac{y'}{2} \right) \Psi_\sigma \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\Psi}_\rho \left(Y + \frac{y}{2} \right) \\ &\cdot \left. \left. \Psi_\delta \left(X - \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_\gamma \left(X + \frac{x}{2} \right) \right) | 0 \rangle \right] \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k_1 \zeta_1}(X, x))_{\gamma\delta} \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k_2 \zeta_2}(Y, y))_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

这样,就将散射矩阵元依赖于 T 乘积的真空平均值和束缚态内部波函数表示出来,再现了跃迁矩阵元的结果. 这样的化简步骤可以推广到多粒子散射过程,这些过程都可以依赖于 T 乘积的真空平均值和束缚态内部波函数表示出来,这样就为进一步分析 S 矩阵元性质提供了一个新的表达式. 在文献[1]中曾以中性标量场为例,给出 S 矩阵元的普遍表达

式, 对于旋量场情况也有类似的表达式, 不过比较复杂而已, 本文不予讨论。

五、 S 矩阵元的其它形式

前面借助于 B-S 波函数和基本场场量表达了跃迁矩阵元和散射矩阵元。我们知道, 层子模型^[2]中计算跃迁矩阵元是用 Mandelstam^[4] 的计算方法, 这两种表示具有一个共同的特点, 都以束缚态内部波函数来表示。那么, 就要问这两者之间的关系是什么? 或者说, 上一节表示出来的矩阵元能否表示成由 Mandelstam 给出的形式?

以跃迁矩阵元为例, Mandelstam 所给出的 S 矩阵元具有下述形式:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 (\overline{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(x_2, x_1))_{a\beta} (G_\mu(x_1, x_2; z; y_2, y_1))_{\beta\alpha\gamma\delta} (\mathcal{A}_{k\zeta}(y_1, y_2))_{\delta\gamma}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

其中 G_μ 定义为

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\Psi_\rho(x_1) \overline{\Psi}_\sigma(x_2) J_\mu(z) \Psi_a(y_2) \overline{\Psi}_\beta(y_1)) | 0 \rangle \\ &= \int K_{\rho\sigma\rho'\sigma'}(x_1, x_2; x'_2, x'_1) (G_\mu(x'_1, x'_2; z; y'_2, y'_1))_{\sigma'\rho'\beta'a'} \\ & \quad \cdot K_{a'\beta'a\beta}(y'_1, y'_2; y_2, y_1) dx'_1 dx'_2 dy'_1 dy'_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

式 (5.2) 中的 K 就是式 (4.7) 定义的 Green 函数。注意到定义式 (5.2), 并将式 (4.9) 和 (5.1) 相比较, 不难看到两者是有关联的。为了找出两者的关联, 首先把束缚态波函数和共轭波函数写成另一种形式:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_{k\zeta}(y_1, y_2))_{a'\beta'} = \langle 0 | T(\Psi_{a'}(y'_1) \overline{\Psi}_{\beta'}(y'_2)) | \mathbf{k}\zeta \rangle \\ &= i \int dY dy [(\mu_\zeta^2 - \square_Y) \langle 0 | T(\Psi_{a'}(y'_1) \overline{\Psi}_{\beta'}(y'_2) \Psi_a(y_2) \overline{\Psi}_\beta(y_1)) | 0 \rangle] \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k\zeta}(y_1, y_2))_{\beta a} \\ &= i \int dY dy [(\mu_\zeta^2 - \square_Y) K_{a'\beta'a\beta}(y'_1, y'_2; y_2, y_1)] \hat{Q}'(\mathcal{A}_{k\zeta}(y_1, y_2))_{\beta a}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} & (\overline{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(x_2, x_1))_{\rho'\sigma'} = \langle \mathbf{k}'\zeta' | T(\Psi_{\rho'}(x'_2) \overline{\Psi}_{\sigma'}(x'_1)) | 0 \rangle \\ &= i \int dX dx (\overline{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(x_2, x_1))_{\sigma\rho} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) \langle 0 | T(\Psi_\rho(x_1) \overline{\Psi}_\sigma(x_2) \Psi_{\rho'}(x'_2) \overline{\Psi}_{\sigma'}(x'_1)) | 0 \rangle \\ &= i \int dX dx (\overline{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(x_2, x_1))_{\sigma\rho} \hat{Q}'(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) K_{\rho\sigma\rho'\sigma'}(x_1, x_2; x'_2, x'_1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

将式 (5.2) 代入到式 (4.9), 并利用式 (5.3) 和 (5.4), 就可以从式 (4.9) 导致式 (5.1)。这样, 对于跃迁矩阵元来讲, 式 (4.9) 和 (5.1) 完全等价; 或者说, Mandelstam 矩阵元式 (5.1) 只是式 (4.9) 的另一种形式而已。然而, 这里给出的矩阵元形式要比 Mandelstam 给出的形式较为优越, 其优点归纳起来有两方面: 一是推广了 Mandelstam 的结果, 包含了束缚态散射过程, 以及初态或终态中有两个以上束缚态的过程。另一是这里给出的 S 矩阵元, 便于讨论交叉对称性、解析性等普遍性质。

如果我们仔细分析表达式 (5.2) 和 Green 函数 K 的性质式 (A. 14) 就可以发现, 第四节中给出的矩阵元还可以表达成其它形式。在附录中式 (A. 17) 曾给出:

$$(\vec{O} + \vec{I})K(x_1, x_2; y_2, y_1) = -\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2),$$

$$K(x_1, x_2; y_2, y_1)(\vec{O} + \vec{I}) = -\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2).$$

将 $(\vec{O} + \vec{I})$ 算符作用式 (5.2) 的两边就获得一个等式:

$$\begin{aligned} & (G_\mu(x_1, x_2; z; y_2, y_1))_{\rho\sigma\alpha\beta} \\ &= (\vec{O} + \vec{I})\langle 0 | T(\Psi_\rho(x_1)\bar{\Psi}_\sigma(x_2)J_\mu(z)\Psi_\alpha(y_2)\bar{\Psi}_\beta(y_1)) | 0 \rangle (\vec{O} + \vec{I}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

将式 (5.5) 代入式 (5.1), 就给出跃迁矩阵元的另一种形式:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 (\mathcal{K}_{k'\zeta'}(x_2, x_1))_{\sigma\rho} (\vec{O} + \vec{I}) \\ & \quad \cdot \langle 0 | T(\Psi_\rho(x_1)\bar{\Psi}_\sigma(x_2)J_\mu(z)\Psi_\alpha(y_2)\bar{\Psi}_\beta(y_1)) | 0 \rangle (\vec{O} + \vec{I}) (\mathcal{K}_{k\zeta}(y_1, y_2))_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

其中前面一个 $(\vec{O} + \vec{I})$ 算子只作用于 x_1, x_2 , 而后面一个 $(\vec{O} + \vec{I})$ 算子只作用于 y_1, y_2 . 将式 (5.6) 与 (4.9) 相比较可以见到, 两种形式的差别只在于作用算子不同, 在式 (4.7) 中出现的是 Klein-Gordon 算子 $(\mu^2 - \square)$, 而式 (5.6) 中出现的是 B-S 算子 $(\vec{O} + \vec{I})$, 式 (5.6) 中的特点在于, 等式中出现的场量、质量都是基本场和层子的质量, 微分、积分算子只对层子场量作用, 完全用层子的物理量来表述, 这就为进一步研究微扰展开和重正化问题提供了一种有用的形式. 仔细分析这两种形式就可以发现, 可以从另一个角度获得式 (5.6). 注意到在式 (4.9) 中之所以出现 Klein-Gordon 算子, 是由于前面从 B-S 波函数 $\mathcal{K}_{k\zeta}(X, x)$ 满足 Klein-Gordon 方程 (3.14), 而导致 $B_{\text{out}}^\zeta(X, x)$ 也满足 Klein-Gordon 方程 (3.22). 这样, 相当于引入一个流算符:

$$J_\zeta(X, x) = (\mu_\zeta^2 - \square)B_\zeta(X, x), \quad (5.7)$$

其中 $B_\zeta(X, x)$ 是 $B_{\text{out}}^\zeta(X, x)$ 的插入场算符, 从而获得了式 (4.9). 另一方面, 如果注意到在附录中给出的 B-S 波函数也满足 B-S 方程:

$$(\vec{O} + \vec{I})\mathcal{K}_{k\zeta}(x_1, x_2) = 0, \quad (5.8)$$

那么, 前面所定义的 $B_{\text{out}}^\zeta(X, x)$ 当然也满足 B-S 方程:

$$(\vec{O} + \vec{I})B_{\text{out}}^\zeta(x_1, x_2) = 0. \quad (5.9)$$

由此, 也可以定义一个流算符:

$$(\vec{O} + \vec{I})B(x_1, x_2) = J(x_1, x_2), \quad (5.10)$$

其中 $B(x_1, x_2) = T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))$, 由此建立一个体系, 就可以获得矩阵元形式 (5.6). 这好象是将 B-S 方程量子化, 而获得一种复合场场论体系. 关于这种体系的建立和有关问题的讨论, 已在文献 [1] 中给出, 这里不再赘述.

从上面的讨论可见, 第四节中所给出的 S 矩阵元, 可以从不同的角度进行探讨, 最终都可以获得相一致的结果.

六、定域性

前面几节在 L-S-Z 场论体系里, 构成了一个适合于层子模型的束缚态场论, 并给出了几种不同形式的 S 矩阵元. 在这样一个体系里, 只假定基本场 $\Psi(x)$ 是定域场量, 满足

式(2.2), 引入了一个双重定域场量 $B(x_1, x_2) = T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))$ 后, 就有

$$[B(x_1, x_2), B(y_1, y_2)] = 0 \quad \text{当} \quad \begin{cases} x_1 \sim y_1 \text{ 类空,} \\ x_2 \sim y_1 \text{ 类空,} \\ x_1 \sim y_2 \text{ 类空,} \\ x_2 \sim y_2 \text{ 类空.} \end{cases} \quad (6.1)$$

因此, 给出的几种形式的 S 矩阵元, 都依赖于定域的基本场量来表示; 或者说, 依赖于双重定域的复合场场量来表示, 因为

$$T(B(x_1, x_2)B(y_1, y_2)) = T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\Psi(y_1)\bar{\Psi}(y_2)). \quad (6.2)$$

注意到, 在 H-N-Z 体系里, 曾经获得一个重要的结论: 在 S 矩阵的结构里, 存在一种等价的定域场量 $B(X)$, 可以看作是复合场 $B(x_1, x_2)$ 在 $x \rightarrow 0$ 情况下的某种极限^[5], 即

$$B(X) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T \left[A \left(X + \frac{x}{2} \right) A \left(X - \frac{x}{2} \right) \right] - \langle 0 | T \left[A \left(\frac{x}{2} \right) A \left(-\frac{x}{2} \right) \right] | 0 \rangle}{(2\pi)^{3/2} \langle 0 | T \left[A \left(\frac{x}{2} \right) A \left(-\frac{x}{2} \right) \right] | 0 \rangle}, \quad (6.3)$$

其中 $A(x)$ 是基本场 (中性标量场)。这一节将讨论本文所给出体系里也存在一个等效的定域复合场算符。仍以跃迁矩阵元为例, 表明定义一个定域复合场算符的可能性。

考虑到我们仅讨论跃迁矩阵元, 而上一节又讨论了式(4.9)与 Mandelstam 矩阵元式(5.1)是等价的, 这里可以从式(5.1)和(5.2)出发进行讨论。在方程(5.2)中, 用 Green 函数在一个极点附近的表达式(A. 16):

$$K(x_1, x_2; x'_2, x'_1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q' \exp[iq'(X - X')] \left[\frac{\mathcal{H}_{q'\zeta'}(x)\bar{\mathcal{H}}_{q'\zeta'}(x')}{q_0 - E_{\zeta'} + i\varepsilon} + \gamma' \right], \quad (6.4a)$$

$$K(y'_1, y'_2; y_1, y_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \exp[iq(Y' - Y)] \left[\frac{\mathcal{H}_{q\zeta}(y')\bar{\mathcal{H}}_{q\zeta}(y)}{q_0 - E_{\zeta} + i\varepsilon} + \gamma \right], \quad (6.4b)$$

其中 γ 是在 q_0 平面上对 $(q_0 - E_{\zeta})$ 正则的项, γ' 是在 q'_0 平面上对 $(q'_0 - E_{\zeta'})$ 正则的项。将式(6.4)代入式(5.2), 得

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)J_{\mu}(z)\Psi(y_2)\bar{\Psi}(y_1)) | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^8} \int dX' dx' dY' dy' d\zeta d\zeta' \exp[iq'(X - X')] \left[\frac{\mathcal{H}_{q'\zeta'}(x)\bar{\mathcal{H}}_{q'\zeta'}(x')}{q'_0 - E_{\zeta'} + i\varepsilon} + \gamma' \right] \\ & \quad \cdot G_{\mu}(X', x'; z; Y', y') \exp[iq(Y' - Y)] \left[\frac{\mathcal{H}_{q\zeta}(y')\bar{\mathcal{H}}_{q\zeta}(y)}{q_0 - E_{\zeta} + i\varepsilon} + \gamma \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

在方程(6.5)两边分别作用 Klein-Gordon 算符 $(\mu_{\zeta'}^2 - \square_X)$ 和 $(\mu_{\zeta}^2 - \square_Y)$, 再乘以 $\exp(-ik'X)(k'^2 = -\mu_{\zeta'}^2)$ 和 $\exp(ikY)(k^2 = -\mu_{\zeta}^2)$, 并对 d^4Xd^4Y 积分, 就获得如下的等式:

$$\begin{aligned} & \int \exp(-ik'X) \exp(ikY) (\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) (\mu_{\zeta}^2 - \square_Y) \\ & \quad \cdot \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)J_{\mu}(z)\Psi(y_2)\bar{\Psi}(y_1)) | 0 \rangle dX dY \\ &= -4EE' \int \mathcal{H}_{k'\zeta'}(x) \bar{\mathcal{H}}_{k'\zeta'}(X', x') G_{\mu}(X', x'; z; Y', y') \\ & \quad \cdot \mathcal{H}_{k\zeta}(Y', y') \bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(y) dX' dx' dY' dy'. \end{aligned} \quad (6.6)$$

利用归一化条件式 (A. 36) 对式 (6.6) 的两边左乘以 $\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(x)\hat{Q}'$, 对 x 积分, 右乘以 $\hat{Q}'\mathcal{A}_{k\zeta}(y)$ 对 y 积分, 就获得

$$\begin{aligned} & \int dXdYdx dy \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x)\hat{Q}'(\mu_{k'}^2 - \square_x)(\mu_k^2 - \square_y) \\ & \cdot \langle 0 | T \left[\Psi \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi} \left(X - \frac{x}{2} \right) J_\mu(z) \Psi \left(Y - \frac{y}{2} \right) \bar{\Psi} \left(Y + \frac{y}{2} \right) \right] | 0 \rangle \\ & \cdot \hat{Q}'\mathcal{A}_{k\zeta}(Y, y) \\ & = \int dX'dx'dY'dy' \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X', x')G_\mu(X', x'; z; Y', y')\mathcal{A}_{k\zeta}(Y', y'). \end{aligned} \quad (6.7)$$

可见, 从式 (6.6) 获得式 (6.7), 正表明式 (4.9) 和式 (5.1) 是等价的, 而且表明用 Mandelstam 的方程亦可以获得式 (4.9). 这正表明了在这个新体系里, 获得的 S 矩阵元是 Mandelstam 方法向场论发展的一种自然的扩充. 仔细分析式 (6.6) 还可以获得另一个重要的结论. 注意到式 (5.1), 方程 (6.6) 给出

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{k'\zeta'}(x) \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y) \\ & = \int \exp[(kY - k'X)i](\mu_{k'}^2 - \square_x)(\mu_k^2 - \square_y) \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2) \\ & \cdot J_\mu(z)\Psi(y_2)\bar{\Psi}(y_1)) | 0 \rangle dXdY. \end{aligned} \quad (6.8)$$

从式 (6.6) 给出式 (6.7), 也就相应于从式 (6.8) 给出式 (4.9). 这个过程表明, 只要考虑到正交归一条件, 消去式 (6.8) 左边的 $\mathcal{A}_{k'\zeta'}(x)$ 和 $\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y)$, 就可以获得一种矩阵元的形式. 如果存在另一种办法, 消去式 (6.8) 左边的 $\mathcal{A}_{k'\zeta'}(x)$, $\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y)$, 就可以获得其它形式的矩阵元, 而且这些矩阵元都是相互等价的.

从介子波函数的时空对称性质, 中性赝标介子的 $\mathcal{A}_{k\zeta}(x)$ 具有下述形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k\zeta}(x) &= \gamma_5 f_1 + \frac{i\hat{k}}{\mu_\zeta} \gamma_5 f_2 + i\hat{x} \frac{(kx)}{\mu_\zeta} \gamma_5 f_3 + i \frac{k_\mu x_\nu}{\mu_\zeta} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 f_4, \\ \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y) &= \gamma_5 f_1 - \frac{i\hat{k}}{\mu_\zeta} \gamma_5 f_2 - i\hat{x} \frac{(kx)}{\mu_\zeta} \gamma_5 f_3 - i \frac{k_\mu x_\nu}{\mu_\zeta} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 f_4. \end{aligned} \quad (6.9)$$

那么在中性赝标介子情况下, 一个最简单的办法是两边乘以 γ_5 并求 Spur 就给出:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{4EE'} \text{Sp}(\gamma_5 \mathcal{A}_{k'\zeta'}(x)) \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \text{Sp}(\gamma_5 \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y)) \\ & = \int F_{k'}^*(X) F_k(Y) (\mu_{k'}^2 - \square_x)(\mu_k^2 - \square_y) \langle 0 | T(\text{Sp}(\gamma_5 \Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) \\ & \cdot J_\mu(z) \text{Sp}(\gamma_5 \Psi(y_2)\bar{\Psi}(y_1))) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

从式 (6.9) 可见, $\text{Sp}(\gamma_5 \mathcal{A}_{k'\zeta'}(x))$ 是一个无旋量结构的标量函数 f_1 , 这样就可以除过来而获得一种矩阵元的表达式:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \\ & = -\frac{1}{\sqrt{4EE'}} \frac{1}{\text{Sp}(\gamma_5 \mathcal{A}_{k'\zeta'}(x)) \text{Sp}(\gamma_5 \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y))} \int F_{k'}^*(X) F_k(Y) \\ & \cdot (\mu_{k'}^2 - \square_x)(\mu_k^2 - \square_y) \langle 0 | T(\text{Sp}(\gamma_5 T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) J_\mu(z) \\ & \cdot \text{Sp}(\gamma_5 T(\Psi(y_2)\bar{\Psi}(y_1))) | 0 \rangle dXdY. \end{aligned} \quad (6.10)$$

这个表达式具有新的内容, 因为式 (6.10) 的左边是与 x, y 无关的, 而式 (6.10) 的右边

又不对 x, y 积分, 那么这意味着式 (6.10) 右边的积分, 在积分以后可以变量分离出 $\text{Sp}(\gamma_s \mathcal{A}_{k\zeta'}(x))$ 和 $\text{Sp}(\gamma_s \mathcal{A}_{k\zeta}(y))$, 它们恰巧与分母相消, 使其结果与 x, y 无关. 既然是这样, 可以令式 (6.10) 的右边取 $x, y \rightarrow 0$ 的极限,

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{4EE'}} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\text{Sp}(\gamma_s \mathcal{A}_{k\zeta'}(x)) \text{Sp}(\gamma_s \mathcal{A}_{k\zeta}(y))} \int dXdY \\ & \quad \cdot F_{k'}^*(X) F_k(Y) (\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) (\mu_\zeta^2 - \square_Y) \\ & \quad \cdot \langle 0 | T(\text{Sp}(\gamma_s \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) J_\mu(z) \text{Sp}(\gamma_s \Psi(y_2) \bar{\Psi}(y_1))) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.11)$$

这样获得的式 (6.11) 就提供了可能在 S 矩阵等价意义下定义一个定域场量, 至少是在保持 S 矩阵不变的意义下存在下列极限, 致使

$$B_\zeta(X) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sp} \gamma_s T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2))}{\sqrt{2E} \text{Sp}(\gamma_s \mathcal{A}_{k\zeta}(x))}, \quad (6.12a)$$

$$B_\zeta^*(X) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sp} \gamma_s T(\Psi(x_2) \bar{\Psi}(x_1))}{\sqrt{2E} \text{Sp}(\gamma_s \mathcal{A}_{k\zeta}(x))}, \quad (6.12b)$$

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}'\zeta' | J_\mu(z) | \mathbf{k}\zeta \rangle \\ &= -\int dXdY F_{k'}^*(X) F_k(Y) (\mu_{\zeta'}^2 - \square_X) (\mu_\zeta^2 - \square_Y) \\ & \quad \cdot \langle 0 | T(B_\zeta(X) J_\mu(z) B_\zeta^*(Y)) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.13)$$

$B_\zeta(X)$ 的特点是只有质心坐标, 而与内部坐标无关. 如果将式 (6.13) 和 (4.9) 相比可以见到, 式 (6.12) 的定义相当于在保持 S 矩阵不变的条件下存在下列关系:

$$B_\zeta(X) = \sqrt{2E} \int (\mathcal{A}_{k\zeta}(x))_{\eta\lambda} \hat{Q}' B_{\lambda\eta}(X, x) dx, \quad (6.14a)$$

$$B_\zeta^*(X) = \sqrt{2E} \int \bar{B}_{\lambda\eta}(X, x) \hat{Q}' (\mathcal{A}_{k\zeta}(x))_{\eta\lambda} dx, \quad (6.14b)$$

其中

$$\begin{aligned} B_{\lambda\eta}(X, x) &= T \left(\Psi_\lambda \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_\eta \left(X - \frac{x}{2} \right) \right), \\ \bar{B}_{\lambda\eta}(X, x) &= T \left(\bar{\Psi}_\lambda \left(X - \frac{x}{2} \right) \Psi_\eta \left(X + \frac{x}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

将式 (6.15) 代入到式 (3.9), (3.35) 和 (3.36), 就获得等价的展开系数:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\zeta}(T) &= i \int d^3X F_{k\zeta}^*(X) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} B_\zeta(X), \\ b_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) &= i \int d^3X B_\zeta(X) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} F_{k\zeta}(X), \\ a_{\mathbf{k}\zeta}^*(T) &= i \int d^3X B_\zeta^*(X) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} F_{k\zeta}(X), \\ b_{\mathbf{k}\zeta}(T) &= i \int d^3X F_{k\zeta}^*(X) \frac{\ddot{\partial}}{\partial X_0} B_\zeta^*(X). \end{aligned} \quad (6.16)$$

再利用渐近条件式 (3.11) 就导致一组化简公式:

$$\begin{aligned}
 a_{\xi}^{\text{out}}(\mathbf{k}) - a_{\xi}^{\text{in}}(\mathbf{k}) &= i \int d^4X F_{k\xi}^*(X) (\mu_{\xi}^2 - \square) B_{\xi}(X), \\
 b_{\xi}^{*\text{out}}(\mathbf{k}) - b_{\xi}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) &= -i \int d^4X F_{k\xi}(X) (\mu_{\xi}^2 - \square) B_{\xi}(X), \\
 a_{\xi}^{*\text{out}}(\mathbf{k}) - a_{\xi}^{*\text{in}}(\mathbf{k}) &= -i \int d^4X [(\mu_{\xi}^2 - \square) B_{\xi}^*(X)] F_{k\xi}(X), \\
 b_{\xi}^{\text{out}}(\mathbf{k}) - b_{\xi}^{\text{in}}(\mathbf{k}) &= i \int d^4X [(\mu_{\xi}^2 - \square) B_{\xi}^*(X)] F_{k\xi}^*(X).
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

利用式 (6.16) 和 (6.17), 立即可以导致式 (6.13)。

由上面的讨论可见, 虽然在第三节中引入的复合场算符 $B(x_1, x_2) = T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2))$ 不是定域的, 而是双重定域, 然而在 S 矩阵等价意义下, 可以由式 (6.13) 定义一个等价的定域场算符, 从而给出定域场论下的 S 矩阵表示式。这就表明, 在层子模型的情况下 (基本场是旋量场, 束缚态是多能级), 也能得到 Zimmermann 实标量场单束缚态能级模型下所获得的结论。式 (6.12), (6.13) 表明, 这里建立的复合场场论具有一个重要性质, 即由复合场场论所建立的 S 矩阵, 将满足由定域场论所导出的色散关系。这将和 π -N 散射的实验结果相符合。

七、几点讨论

前面几节探讨了一种适合于层子模型的复合粒子场论。在这个体系里引入了一种双重定域场量 $B(x_1, x_2)$ [假定基本场 $\Psi(x)$ 是定域的], 使用了反映内部结构的 B-S 波函数定义复合粒子的渐近条件。这样, 就将 B-S 方程与 L-S-Z 场论体系结合起来。从前面的介绍可以归纳出, 这种尝试性的束缚态场论体系具有如下的特点:

1) 它用了内部结构波函数描写束缚态的 S 矩阵元, 而且能够适用于各种物理过程中出现的不同的束缚态情况。这就可能通过内部结构波函数描述的 S 矩阵把不同的物理过程联系起来。

2) 它具有多种相互等价的 S 矩阵形式, 因而可能从不同形式的 S 矩阵出发, 从不同角度做出近似。如在第五节中, 曾给出了与 Mandelstam 矩阵元相等价, 这就保持了 1965—1966 年层子模型中的所有计算结果。层子模型的计算方法是用 Mandelstam 矩阵元的梯形近似, 而本文所给出的方法可以推广到任意束缚态的情形, 并且能处理束缚态的产生和消灭, 可以说这是一种扩大了 Mandelstam S 矩阵表达式。再如第六节中, 讨论了在 S 矩阵等价意义下, 可以定义一种等价的定域复合场场量, 这就可以保持定域场论的一些积极结果, 如色散关系等。

3) 它具有包含束缚态在内的微扰展开形式。特别是在第五节中曾讨论的另一种 S 矩阵形式 (5.6), 提供了研究微扰展开的较好形式。这就可能通过对微扰级数的研究, 找出所要探讨的物理过程的性质。

4) 它可以容纳各种现象性理论。如流代数、矢量介子为主、轴矢流部分守恒、场流关系^[8]、光锥代数等。这就可能综合地应用各不同领域中的近似方法。

5) 它可以有稳定粒子形态的基本场量, 又可以有稳定粒子形态的基本场量。前面曾经按照层子模型, 假定基本场的稳定粒子形态和束缚态形成希耳伯空间的完备集, 其实

在这个体系里不仅不限于“夸克”方案,而且也可以假定基本场不具有稳定粒子形态,只假定基本场的束缚态形成希耳伯空间的完备集,这种完备集的大小适用于各种不同模型,最终将由实验检验。

以上列举的这些特点,有些已在本文中阐明,有些将在今后的文章中讨论。为了使这种尝试性的束缚态场论体系能与实验进行比较,还必须发展一些计算方法,特别是要解决那些涉及到强相互作用在内的物理过程。还有一些如不稳定粒子的复合粒子场论, B-S 方程的负模解和零模解问题都有待进一步的探讨。

附 录

对于层子、反层子系统,其 B-S 波函数定义为

$$\mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) | \mathbf{k}\zeta \rangle, \quad (\text{A. 1})$$

它满足 B-S 方程:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + M \right) \mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{2\mu}} + M \right) \\ = - \int I(x_1, x_2; u_2, u_1) \mathcal{A}_{k\zeta}(u_1, u_2) du_1 du_2; \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

其共轭波函数

$$\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) = \langle \mathbf{k}\zeta | T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)) | 0 \rangle \quad (\text{A. 3})$$

满足下列方程:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{2\mu}} + M \right) \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + M \right) \\ = - \int \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(u_2, u_1) I(u_1, u_2; x_2, x_1) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

如果定义微分算符:

$$\vec{O} \mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) = \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + M \right) \mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{2\mu}} + M \right), \quad (\text{A. 5a})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) \vec{O} = \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{2\mu}} + M \right) \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) \left(\gamma_\mu \frac{\vec{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + M \right). \quad (\text{A. 5b})$$

再定义一个积分算符:

$$\vec{I} \mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) = \int I(x_1, x_2; u_2, u_1) \mathcal{A}_{k\zeta}(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (\text{A. 6a})$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) \vec{I} = \int \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(u_2, u_1) I(u_1, u_2; x_2, x_1) du_1 du_2. \quad (\text{A. 6b})$$

利用定义式 (A. 5) 和 (A. 6), 可以将方程 (A. 2) 和 (A. 4) 记为

$$(\vec{O} + \vec{I}) \mathcal{A}_{k\zeta}(x_1, x_2) = 0, \quad (\text{A. 2}')$$

$$\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x_2, x_1) (\vec{O} + \vec{I}) = 0. \quad (\text{A. 4}')$$

引入质心坐标 X 和相对坐标 x :

$$X = \frac{1}{2} (x_1 + x_2),$$

$$x = x_1 - x_2.$$

对波函数进行平移变换

$$\mathcal{H}_{k\zeta}(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\Psi(x_1)\bar{\Psi}(x_2)) | \mathbf{k}\zeta \rangle = \exp(i\mathbf{k}X) \mathcal{H}_{k\zeta}(x), \quad (\text{A. 7a})$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x_2, x_1) = \langle \mathbf{k}\zeta | T(\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)) | 0 \rangle = \exp(-i\mathbf{k}X) \bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x), \quad (\text{A. 7b})$$

其中 $\mathcal{H}_{k\zeta}(x)$ 和 $\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x)$ 定义如下:

$$\mathcal{H}_{k\zeta}(x) = \langle 0 | T\left(\Psi\left(\frac{x}{2}\right)\bar{\Psi}\left(-\frac{x}{2}\right)\right) | \mathbf{k}\zeta \rangle, \quad (\text{A. 8a})$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x) = \langle \mathbf{k}\zeta | T\left(\Psi\left(-\frac{x}{2}\right)\bar{\Psi}\left(\frac{x}{2}\right)\right) | 0 \rangle. \quad (\text{A. 8b})$$

对 $\mathcal{H}_{k\zeta}(x)$ 和 $\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x)$ 作傅里叶变换:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{k\zeta}(p) &= \int \exp(-ipx) \mathcal{H}_{k\zeta}(x) dx, \\ \bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(p) &= \int \exp(ipx) \bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

将式 (A. 8) 代入式 (A. 9), 插入中间态并对 x 积分, 就给出 $\mathcal{H}_{k\zeta}(p)$ 和 $\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(p)$ 的谱表示:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{k\zeta}(p) &= \frac{i}{2\pi} \left\{ \int_N^{\infty} \frac{dq_0 f_{k\zeta}\left(p + \frac{\mathbf{k}}{2}, q_0\right)}{p_0 + \frac{E}{2} - q_0 + i\varepsilon} - \int_N^{\infty} \frac{dq_0 g_{k\zeta}\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{p}, q_0\right)}{p_0 - \frac{E}{2} + q_0 - i\varepsilon} \right\}, \\ \bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(p) &= \frac{i}{2\pi} \left\{ \int_N^{\infty} \frac{dq_0 \bar{g}_{k\zeta}\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{p}, q_0\right)}{p_0 + \frac{E}{2} - q_0 + i\varepsilon} - \int_N^{\infty} \frac{dq_0 \bar{f}_{k\zeta}\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{p}, q_0\right)}{p_0 - \frac{E}{2} + q_0 - i\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A. 10})$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{g}_{k\zeta}\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{p}, q_0\right) &= \gamma_4 f_{k\zeta}^+\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{p}, q_0\right) \gamma_4, \\ \bar{f}_{k\zeta}\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{p}, q_0\right) &= \gamma_4 g_{k\zeta}^+\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{p}, q_0\right) \gamma_4, \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

$$N = \frac{1}{2}(B + E).$$

B 是结合能, $E = -ik_4$ 是介子能量. 由式 (A. 10), (A. 11) 可知, 在 p_0 解析平面上存在如下关系 (如图 2 所示):

$$\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(p) = -\gamma_4 \mathcal{H}_{k\zeta}^+(\mathbf{p}, p_0^*) \gamma_4. \quad (\text{A. 12})$$

如果约定式 (A. 10) 中取共轭时不改变分母中 $i\varepsilon$ 的符号, 则可将式 (A. 12) 简记为

$$\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(p) = -\gamma_4 \mathcal{H}_{k\zeta}^+(p) \gamma_4. \quad (\text{A. 12}')$$

这就是在文献[9]中所得到的结果. 将式 (A. 12') 变换到坐标表象, 就给出

$$\bar{\mathcal{H}}_{k\zeta}(x_2, x_1) = -\gamma_4 \mathcal{H}_{k\zeta}^+(x_1, x_2) \gamma_4. \quad (\text{A. 13})$$

进一步定义双粒子 Green 函数:

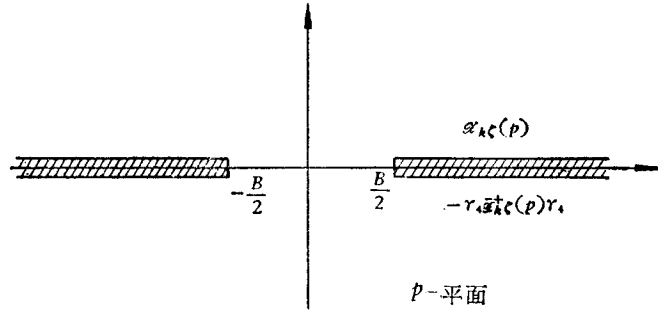


图 2

$$K(x_1, x_2; y_2, y_1) = \langle 0 | T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \Psi(y_2) \bar{\Psi}(y_1)) | 0 \rangle, \quad (\text{A. 14})$$

并写出 Green 函数在一个束缚态附近的极点行为:

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2; y_2, y_1) &= K(X - Y; x, y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \exp[ik(X - Y)] K(k; x, y), \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

$$K(k; x, y) = i \frac{\mathcal{A}_{k\zeta}(x) \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(y)}{k_0 - E_\zeta + i\varepsilon} + r, \quad (\text{A. 16})$$

其中 r 是对 $k_0 = E_\zeta$ 正则的项. 由式 (A. 14) 定义的双粒子 Green 函数满足下列微分方程:

$$\begin{aligned} (\bar{O} + \bar{I})K(x_1, x_2; y_2, y_1) &= -\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2), \\ K(x_1, x_2; y_2, y_1)(\bar{O} + \bar{I}) &= -\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2). \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

在推导式 (A. 17) 时, 略去了 $\Psi(x_1)$ 和 $\Psi(x_2)$ 的收缩项, 实际上是下列 Green 函数的定义

$$K(x_1, x_2; y_2, y_1) = \langle 0 | T(N(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) N(\Psi(y_2) \bar{\Psi}(y_1))) | 0 \rangle \quad (\text{A. 14}')$$

代替了式 (A. 14) 的定义, 其中

$$(N(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2))) = T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) - \langle 0 | T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) | 0 \rangle.$$

如果变换到动量空间, 方程 (A. 2), (A. 4) 和 (A. 17) 具有如下的形式:

$$\int dq [\mathcal{D}(k\zeta; p, q)_{\rho\mu\nu\sigma} + \mathcal{G}(k\zeta; p, q)_{\rho\sigma\nu\mu}] \mathcal{A}_{k\zeta}(q)_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A. 18a})$$

$$\int dq \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(q)_{\mu\nu} [\mathcal{D}(k\zeta; p, q)_{\nu\sigma\rho\mu} + \mathcal{G}(k\zeta; q, p)_{\nu\mu\rho\sigma}] = 0, \quad (\text{A. 18b})$$

$$(k_\zeta^2 = -\mu_\zeta^2).$$

$$\int dq' [\mathcal{D}(k; p, q')_{a\mu\nu\beta} + \mathcal{G}(k; p, q')_{a\beta\nu\mu}] K(k; q', q)_{\mu\nu\rho\sigma} = -\delta(p - q) \delta_{a\sigma} \delta_{\beta\rho}, \quad (\text{A. 19})$$

$$\int dq' K(k; p, q')_{\mu\nu\rho\sigma} [\mathcal{D}(k; q, q')_{\sigma\beta a\rho} + \mathcal{G}(k; q', q)_{\sigma\rho a\beta}] = -\delta(p - q) \delta_{a\mu} \delta_{\nu\beta},$$

其中

$$\mathcal{D}_{a\mu\nu\beta}(k; p, q) = \left(\frac{i\hat{k}}{2} + i\hat{p} + M \right)_{a\mu} \left(\frac{-i\hat{k}}{2} + i\hat{p} + M \right)_{\nu\beta} \delta(p - q), \quad (\text{A. 20})$$

$$I_{\rho\sigma\nu\mu}(k; p, q) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 k \mathcal{G}(k; p, q)_{\rho\sigma\nu\mu} \exp[ik(X - U)] \exp[i(px - qu)], \quad (\text{A. 21})$$

$$K(k; x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp dq K(k; p, q)_{\mu\nu\rho\sigma} \exp[i(px - qy)]. \quad (\text{A. 22})$$

在式 (A. 18) 中的四动量 k_ζ 是处于质量壳上, 而式 (A. 19) 中的 k 是不在质量壳上的四个独立分量.

利用积分关系式:

$$\begin{aligned} & \int dq' (k_0 - E_\zeta) K(k; q, q')_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial k_0} [\mathcal{D}(k; q', p)_{\sigma\beta\alpha\rho} + \mathcal{G}(k; q', p)_{\sigma\rho\alpha\beta}] \\ &= \delta(p - q) \delta_{\alpha\mu} \delta_{\nu\beta} - \int d^4 q' \left\{ \frac{\partial}{\partial k_0} [(k_0 - E_\zeta) K(k; q, q')_{\mu\nu\rho\sigma}] \right\} \\ & \quad \cdot [\mathcal{D}(k; q', p)_{\sigma\beta\alpha\rho} + \mathcal{G}(k; q', p)_{\sigma\rho\alpha\beta}], \end{aligned} \quad (\text{A. 23})$$

将式 (A. 23) 两边分别作用在 $\mathcal{K}_{k\zeta}(p)_{\beta\alpha}$ 上, 并在两边令 $k_0 \rightarrow E_\zeta$, 注意到 (A. 16) 式, 立即可获得 B-S 波函数的归一条件 (同一束缚态):

$$\int d^4 p d^4 q \bar{\mathcal{K}}_{k\zeta}(q)_{\mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial k_0} [\mathcal{D}(k; q, p)_{\nu\rho\sigma\mu} + \mathcal{G}(k; q, p)_{\nu\mu\sigma\rho}] \right]_{k^2 \rightarrow \mu_\zeta^2} \mathcal{K}_{k\zeta}(p)_{\rho\sigma} = 1. \quad (\text{A. 24})$$

对于不同质量束缚态的正交条件并不能从积分关系式 (A. 23) 获得, 这里用 Klein 的方法给出正交条件, 并企图将正交条件和归一条件写成一个统一的形式.

在式 (A. 18a) 的左边乘以 $\bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(p)_{\sigma\rho}$ 对 $d^4 p$ 积分, 在式 (A. 18b) 的右边乘以 $\mathcal{K}_{k\zeta}(p)_{\sigma\rho}$ 对 $d^4 p$ 积分, 两者相减, 交换积分变量就可以获得

$$\begin{aligned} & (k_\lambda - k'_\lambda) \int dp dq \bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(p)_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial k_\lambda} \mathcal{D}(k; p, q)_{\nu\rho\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial k'_\lambda} \mathcal{D}(k'; p, q)_{\nu\rho\sigma\mu} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{k_\lambda - k'_\lambda} [\mathcal{G}(k'; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho} - \mathcal{G}(k; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho}] \right\} \mathcal{K}_{k\zeta}(q)_{\rho\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A. 25})$$

其中 k 和 k' 都分别在质量壳上, $k^2 = \mu_\zeta^2, k'^2 = \mu_{\zeta'}^2$. 如果附加一质心部分能保证 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, 那么对 $\mu_\zeta \neq \mu_{\zeta'}$ 的情况下, 式 (A. 25) 就导致正交条件 ($\mathbf{k} = \mathbf{k}'$):

$$\begin{aligned} & \int dp dq \bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(p)_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial k_0} \mathcal{D}(k; p, q)_{\nu\rho\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial k'_0} \mathcal{D}(k'; p, q)_{\nu\rho\sigma\mu} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\mathcal{G}(k; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho} - \mathcal{G}(k'; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho}}{E - E'} \right\} \mathcal{K}_{k\zeta}(q)_{\rho\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A. 26})$$

比较式 (A. 24) 和 (A. 26) 可以见到, 在 ($\mathbf{k} = \mathbf{k}'$) 的情况下, 可能将正交归一条件写成统一的形式. 因为当 $\zeta \rightarrow \zeta'$ 时, $\mu_\zeta \rightarrow \mu_{\zeta'}$, $E \rightarrow E'$, 式 (A. 26) 中的第二项就变成式 (A. 24) 中的第二项微分 $\left(\frac{\partial}{\partial k_0} \mathcal{G}(k; p, q) \right)_{k^2 \rightarrow \mu_\zeta^2}$. 因此, 正交条件式 (A. 26) 和归一条件式 (A. 24) 可以统一地写成 ($\mathbf{k} = \mathbf{k}'$)

$$\int dp dq \bar{\mathcal{K}}_{k'\zeta'}(p)_{\mu\nu} \mathcal{D}(k, k'; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho} \mathcal{K}_{k\zeta}(q)_{\rho\sigma} = \delta_{\zeta\zeta'}, \quad (\text{A. 27})$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k, k'; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial k_0} \mathcal{D}(k; p, q)_{\nu\rho\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial k'_0} \mathcal{D}(k'; p, q)_{\nu\rho\sigma\mu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\mathcal{G}(k; p, q) - \mathcal{G}(k'; p, q))_{\nu\rho\sigma\mu}}{E - E'} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 28})$$

如果定义积分算符 $\hat{Q}(k, k')$:

$$\hat{Q}(k, k') \mathcal{A}_{k\zeta}(p)_{\nu\mu} = \int \mathcal{Q}(k, k'; p, q)_{\nu\mu\sigma\rho} \mathcal{A}_{k\zeta}(q)_{\rho\sigma} dq, \quad (\text{A. 29})$$

则可以将式 (A. 27) 简记为

$$\int dp \mathcal{A}_{k'\zeta'}(p)_{\mu\nu} \hat{Q}(k, k') \mathcal{A}_{k\zeta}(p)_{\nu\mu} = \delta_{\zeta\zeta'}. \quad (\text{A. 30})$$

前面已经提到式 (A. 26) 是在 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ 情况下获得的, 为了保证 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ 成立, 必须引入质心部分. 对于等质量和不等质量情况, 都可以引入

$$i \int d^3X F_{k'\zeta'}^*(X) \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} F_{k\zeta}(X) d^3X \quad k^2 = -\mu_\zeta^2, k'^2 = -\mu_{\zeta'}^2. \quad (\text{A. 31})$$

同时将式 (A. 30) 变换到坐标表象, 就可以记作:

$$(2\pi)^4 i \int d^3X d^4x \mathcal{A}_{k'\zeta'}(X, x)_{\mu\nu} \hat{Q} \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x)_{\nu\mu} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\zeta\zeta'} (2E_\zeta), \quad (\text{A. 32})$$

其中 $\hat{Q}$ 也是一个积分算符, 它在动量表象中由式 (A. 29) 定义, 而变换到坐标表象中需要将其中的 k 和 k' 变成微分算符. 为了方便起见, 引入

$$\hat{Q}' = \frac{(2\pi)^4}{2E_\zeta} \hat{Q}. \quad (\text{A. 33})$$

式 (A. 32) 就可以写成简洁的形式:

$$i \int d^3X d^4x \mathcal{A}_{k'\zeta'}(X, x)_{\mu\nu} \hat{Q}' \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x)_{\nu\mu} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\zeta\zeta'}. \quad (\text{A. 34})$$

在式 (A. 34) 两边取厄米共轭, 并利用关系式 (A. 13), 就导致

$$\gamma_4 \hat{Q}'^\dagger \gamma_4 = \hat{Q}'. \quad (\text{A. 35})$$

从表达式 (A. 34) 可见, 质心部分是外加的, 其实简单地取

$$(2\pi)^4 \int d^3X d^4x \mathcal{A}_{k'\zeta'}(X, x)_{\mu\nu} \hat{Q} \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x)_{\nu\mu} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\zeta\zeta'}, \quad (\text{A. 36})$$

仍然可以保证 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$. 然而, 这里所以取式 (A. 34) 的形式, 是由于波函数 $\mathcal{A}_{k\zeta}(X, x)$ 的质心部分满足 Klein-Gordon 方程 $(\mu_\zeta^2 - \square_X) \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x) = 0$. 因此, 相应的质心部分取 Klein-Gordon 的正交归一形式.

再注意到 Green 函数的定义, 直接有

$$K(x_1, x_2; y_2, y_1)_{\rho\sigma\nu\mu} = K(y_2, y_1; x_1, x_2)_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (\text{A. 37})$$

立即导致

$$G(u_1, u_2; v_2, v_1)_{\rho\sigma\nu\mu} = G(v_2, v_1; u_1, u_2)_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (\text{A. 38})$$

利用傅里叶变换定义式 (A. 15) 可以证明下列等式:

$$G(k; u, v)_{\rho\sigma\nu\mu} = G(-k; -v, -u)_{\nu\mu\rho\sigma} \quad u = u_1 - u_2, v = v_1 - v_2. \quad (\text{A. 39})$$

另一方面, 从方程式 (A. 2) 和 (A. 4) 除去质心因子后, 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i\hat{k}}{2} + \gamma_\mu \frac{\bar{\partial}}{\partial x_\mu} + M \right)_{\rho\mu} (\mathcal{A}_{k\zeta}(x))_{\mu\nu} \left(\frac{-i\hat{k}}{2} - \gamma_\mu \frac{\bar{\partial}}{\partial x_\mu} + M \right)_{\nu\sigma} \\ & = - \int du G(k; x, u)_{\rho\sigma\nu\mu} (\mathcal{A}_{k\zeta}(u))_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A. 40})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-ik}{2} - \gamma_\mu \frac{\bar{\partial}}{\partial x_\mu} + M \right)_{\rho\mu} (\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x))_{\mu\nu} \left(\frac{ik}{2} + \gamma_\mu \frac{\bar{\partial}}{\partial x_\mu} + M \right)_{\nu\sigma} \\ &= - \int du (\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(u))_{\mu\nu} G(k; u, x)_{\nu\mu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A. 41})$$

在式 (A. 40) 中改变 k, x 的符号, 并利用关系式 (A. 39), 立即可以见到, 同一个束缚态 ζ 的 $\bar{\mathcal{A}}_{-k\zeta}(-x)$ 与 $\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(x)$ 满足同一个方程. 利用获得式 (A. 30) 相类似的办法, 可以给出 $\zeta \approx \zeta'$ 时的正交条件:

$$\int dp \bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(p)_{\mu\nu} \hat{Q}(k', -k) \bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(p)_{\nu\mu} = 0 \quad (\text{A. 42})$$

$$\zeta \approx \zeta',$$

$$\int dp \mathcal{A}_{k'\zeta'}(p)_{\mu\nu} \hat{Q}(-k', k) \mathcal{A}_{k\zeta}(p)_{\nu\mu} = 0 \quad (\text{A. 43})$$

然而对于 $\zeta = \zeta'$ 时, 一般地讲此两式不等于零. 在引入质心部分以后, 由于 $\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(X, x)$ 中的 $\exp(-ikX)$ 与 $\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(X, x)$ 中的 $\exp(ikX)$ 指数上相差一个负号, 当变换到坐标表象中以后, k 换以微分算符, 两式中的 Q 正好与式 (A. 32) 中相同, 因此获得

$$i \int d^3X d^4x (\bar{\mathcal{A}}_{k'\zeta'}(X, x))_{\mu\nu} \hat{Q}' \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} (\bar{\mathcal{A}}_{k\zeta}(X, -x))_{\nu\mu} = 0, \quad (\text{A. 44})$$

$$i \int d^3X d^4x (\mathcal{A}_{k'\zeta'}(X, -x))_{\mu\nu} \hat{Q}' \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} \mathcal{A}_{k\zeta}(X, x)_{\nu\mu} = 0. \quad (\text{A. 45})$$

这里式 (A. 44) 与 (A. 45) 的成立不仅对于 $\zeta \approx \zeta'$, 而且对于 $\zeta = \zeta'$ 时也成立, 这是因为

$$i \int d^3X F_{k'\zeta'}^*(X) \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} F_{k\zeta}^*(X) = 0,$$

$$i \int d^3X F_{k'\zeta'}(X) \frac{\bar{\partial}}{\partial X_0} F_{k\zeta}(X) = 0.$$

这样, 我们就得到 B-S 波函数正交归一条件的三个基本关系式 (A. 34), (A. 44) 和 (A. 45).

参 考 文 献

- [1] 何祚麻, 黄涛, 物理学报, **23** (1974), 113.
- [2] 1966 年北京暑期物理讨论会上北京基本粒子理论组的论文.
- [3] H. A. Bethe, E. E. Salpeter, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 1232.
- [4] S. Mandelstam, *Proc. Roy. Soc.*, **A233** (1955), 248.
- [5] R. Haag, *Phys. Rev.*, **12** (1958), 669; K. Nishijima, *Phys. Rev.*, **111** (1958), 995; W. Zimmermann, *Nuovo Cimento*, **10** (1958), 597.
- [6] P. T. Redmond, J. L. Uretsky, *Ann. Phys.*, **9** (1960), 106.
- [7] H. J. Borchers, 引自哈格栋编写的《色散关系导论》(中译本).
- [8] 何祚麻, 黄涛, 物理学报, 待发表.
- [9] 北京大学理论物理研究室基本粒子理论组中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北京大学学报, **12** (1966), 209.

ON THE COMPOSITE FIELD THEORY AND THE STRATON MODEL (I)

HO TSU-HSIU HUANG TAO

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

We further generalize the composite field theory^[1] to the case when basic field is spinor and derive the relevant formula in the straton model for the processes involving mesons. It is shown that the results obtained are valid for other models also.