

超声楔形换能器的体波和瑞利表面波指向性图案*

严仁博

(中国科学院物理研究所)

提 要

对超声检测中常用的楔形换能器的远场作了分析和实验。在理论上给出了在半无限大各向同性介质中纵波和横波指向性图案,以及在介质表面的瑞利波指向性图案。对于钢介质,对这三种波型作了指向性图案的数字计算,并对纵波和瑞利波作了指向性图案的测量。指出超声检测中某些需要考虑的问题。

楔形换能器广泛地用于超声检测,但对它的指向性图案的研究^[1-3],尚不充分。本文具体分析体波和瑞利波的指向性图案,并作了部分的实验验证。

一、理 论

图1表示一置于半无限大介质表面的楔形换能器,斜楔角为 α ,圆形压电晶片的直径为 $2a$,晶片在 XOY 平面上的投影为一椭圆,它的短轴为 $2a$,长轴为 $2b$ 。假设晶片以角频率 ω 作简谐振动,忽略斜楔中的衰减、混响及声束沿截面方向的不均匀性,又若介质的声阻抗远大于斜楔的声阻抗,再根据Kühn^[4]等人的结果,可让楔形换能器的作用等效地考虑为固体介质表面上有法向应力分布:

$$P_{zz} = \begin{cases} P_a \exp(-k_0 y + i\omega t) & \text{椭圆内,} \\ 0 & \text{椭圆外,} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $k_0 = k_{lw} \sin \alpha$; k_{lw} 为斜楔中纵波波数; $P_a = P_0 \cos^2 \alpha$; P_0 为晶片下斜楔面上的法向应力; $\cos \alpha = \frac{a}{b}$ 。

Hirona^[5], Miller 与 Pursey^[6]等曾经计算了和波长相比很小的表面法向应力源,在半无限大、各向同性、无损弹性体所产生的体波和瑞利波远场。在此基础上,我们可以写出椭圆内每一面积元上的应力所产生的声场,然后计算具有(1)式分布的应力源所产生的总声场。

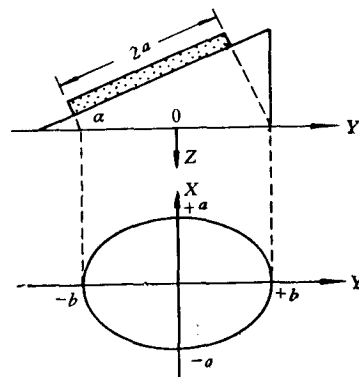


图1 楔形换能器及其在介质表面引起的椭圆形应力区

* 1973年4月3日收到。

设面积元 $d\sigma$ 上有法向应力 P , 它在远处 Q 点会产生位移. 取图 2 所示坐标, Q 点相对于 $d\sigma$ 的位置由坐标 (R, θ, φ) 来表示.

对于体波有相应于纵波和横波的沿 R 和 θ 方向的位移分量. 由 Hirona 等的结果, 可以写出只取 R^{-1} 项并略去高次项的位移分量为

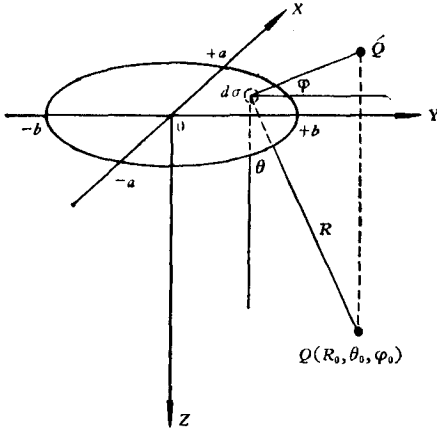


图 2 接收点 Q 的位置

$$dU_R = -P \frac{k_l^4}{2\pi\mu} \frac{\cos\theta \left[\left(\frac{k_l}{k_l} \right)^2 - 2\sin^2\theta \right]}{F(k_l \sin\theta)} \times \frac{e^{-ik_l R + i\omega t}}{R} d\sigma, \quad (2)$$

$$dU_\theta = -P \frac{k_l^4}{2\pi\mu} \frac{\sin 2\theta \sqrt{\left(\frac{k_l}{k_l} \right)^2 - \sin^2\theta}}{F(k_l \sin\theta)} \times \frac{e^{-ik_l R + i\omega t}}{R} d\sigma. \quad (3)$$

其中 k_l 为固体中纵波波数; k_t 为固体中横波波数; μ 为固体介质的切变模量; $F(\xi) = (2\xi^2 - k_t^2)^2$

$$- 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - k_t^2} \sqrt{\xi^2 - k_l^2}.$$

对于瑞利波, Q 点在 $Z = 0$ 的自由表面上, 有沿 R 和 Z 方向的瑞利波的二个位移分量. 取 $R^{-\frac{1}{2}}$ 项并略去高次项, 则

$$dU_R^s = P \frac{k_R^4}{\sqrt{2\pi\mu}} \frac{\left[2 - \left(\frac{k_t}{k_R} \right)^2 \right] - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_t}{k_R} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{k_l}{k_R} \right)^2}}{\left[\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi) \right]_{\xi=k_R}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-ik_R R + i\omega t}}{\sqrt{k_R R}} \cdot d\sigma, \quad (4)$$

$$dU_Z^s = P \frac{(k_t k_R)^2}{\sqrt{2\pi\mu}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k_l}{k_R} \right)^2}}{\left[\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi) \right]_{\xi=k_R}} e^{i\frac{3\pi}{4}} \frac{e^{-ik_R R + i\omega t}}{\sqrt{k_R R}} d\sigma. \quad (5)$$

其中, k_R 为瑞利波波数.

在单个面积元 $d\sigma$ 内, P 设为常数. 在图 1 所示椭圆区域内, 则按 (1) 式, 不同 $d\sigma$ 内 P 的相位是随 $d\sigma$ 的 Y 向位置而变化的. 因此

$$P = P(y) = P_a e^{-ik_a y}.$$

引入符号:

$$A_1 = -\frac{k_l^4}{2\pi\mu}, \quad (6)$$

$$A_2 = -\frac{k_t^4}{2\pi\mu}, \quad (7)$$

$$G_1(\theta) = \frac{\cos\theta \left[\left(\frac{k_l}{k_l} \right)^2 - 2\sin^2\theta \right]}{F(k_l \sin\theta)}, \quad (8)$$

$$G_2(\theta) = \frac{\sin 2\theta \sqrt{\left(\frac{k_l}{k_r}\right)^2 - \sin^2 \theta}}{F(k_l \sin \theta)}, \quad (9)$$

$$A_{3h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \frac{k_r^2}{\sqrt{k_r}} \frac{\left[2 - \left(\frac{k_l}{k_r}\right)^2\right] - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_l}{k_r}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{k_l}{k_r}\right)^2}}{\left[\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi)\right]_{\xi=k_r}} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (10)$$

$$A_{3v} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \frac{(k_l k_r)^2}{\sqrt{k_r}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k_l}{k_r}\right)^2}}{\left[\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi)\right]_{\xi=k_r}} e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad (11)$$

并略去因子 $e^{i\omega t}$, 对于体波, 则有

$$dU_R = P_a A_1 G_1(\theta) \frac{e^{-i(k_l R + k_0 y)}}{R} d\sigma, \quad (12)$$

$$dU_\theta = P_a A_2 G_2(\theta) \frac{e^{-i(k_l R + k_0 y)}}{R} d\sigma. \quad (13)$$

对于瑞利波, 有

$$dU_R^2 = P_a A_{3h} \frac{e^{-i(k_r R + k_0 y)}}{\sqrt{R}} d\sigma, \quad (14)$$

$$dU_z^2 = P_a A_{3v} \frac{e^{-i(k_r R + k_0 y)}}{\sqrt{R}} d\sigma. \quad (15)$$

现在考虑椭圆区域内全部面积元的应力对 Q 点位移的贡献。取椭圆区域的中心点为座标原点, 并设 Q 点的座标为 $(R_0, \theta_0, \varphi_0)$ (图 2)。 Q 点的位移可用积分求得。例如考虑纵波情况, 则要计算

$$P_a A_1 \iint_{\text{椭圆}} G_1(\theta) \frac{e^{-i(k_l R + k_0 y)}}{R} d\sigma.$$

设 Q 点和椭圆区相距很远, 则对所有面积元而言,

$$\theta \simeq \theta_0, \quad \frac{e^{-ik_l R}}{R} \simeq \frac{e^{-ik_l(R_0 - \Delta R)}}{R_0},$$

故

$$U_{R_1} = P_a A_1 \frac{e^{-ik_l R_0}}{R_0} G_1(\theta_0) \iint_{\text{椭圆}} e^{i(k_l \Delta R - k_0 y)} d\sigma.$$

利用关系式^[7]

$$\sin(m_1 \sin \beta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(m_1) \sin(2n+1)\beta,$$

$$J_{2n+1}(l_1) = \frac{i^{-(2n+1)}}{\pi} \int_0^\pi e^{il_1 \cos \beta} \cos(2n+1)\beta d\beta,$$

$$\frac{J_1(\sqrt{l_1^2 + m_1^2})}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{J_{2n+1}(l_1)}{l_1} \frac{J_{2n+1}(m_1)}{m_1},$$

就可以进行积分.

略去 R_0, θ_0, φ_0 的下标, 即以 (R, θ, φ) 表示 Q 点对椭圆中心的座标. 则对于纵波, 其远场位移为

$$U_R = \pi ab P_a A_1 \frac{e^{-ik_l R}}{R} G_1(\theta) H_1(\theta, \varphi); \quad (16)$$

对于横波有

$$U_\theta = \pi ab P_a A_2 \frac{e^{-ik_t R}}{R} G_2(\theta) H_2(\theta, \varphi); \quad (17)$$

对于瑞利波有

$$U'_R = \pi ab P_a A_{3h} \frac{e^{-ik_R R}}{\sqrt{R}} H_3(\varphi), \quad (18)$$

$$U'_Z = \pi ab P_a A_{3v} \frac{e^{-ik_R R}}{\sqrt{R}} H_3(\varphi). \quad (19)$$

在这些方程中,

$$H_{1,2}(\theta, \varphi) = \frac{2J_1(\sqrt{l_{1,2}^2 + m_{1,2}^2})}{\sqrt{l_{1,2}^2 + m_{1,2}^2}}, \quad (20)$$

$$H_3(\varphi) = \frac{2J_1(\sqrt{l_3^2 + m_3^2})}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad (21)$$

$$l_{1,2} = (k_{l,t} \sin \theta \cos \varphi - k_{lw} \sin \alpha) b, \quad (22)$$

$$m_{1,2} = k_{l,t} a \sin \theta \sin \varphi, \quad (23)$$

$$l_3 = (k_R \cos \varphi - k_{lw} \sin \alpha) b, \quad (24)$$

$$m_3 = k_R a \sin \varphi, \quad (25)$$

式中下标 1, 2 与 l, t 等是 H_1 或 H_2 等与 k_l 或 k_t 等的省写.

由式 (16)–(19) 得楔形换能器的指向性图案. 对于纵波有

$$D_1(\theta, \varphi) = |G_1(\theta) H_1(\theta, \varphi)|;$$

对于横波有

$$D_2(\theta, \varphi) = |G_2(\theta) H_2(\theta, \varphi)|;$$

对于瑞利波有

$$D_3(\varphi) = |H_3(\varphi)|.$$

顺便指出, 当 $ka \ll 1$ 时, H_1, H_2, H_3 趋近于 1. 又如当 $\alpha = 0^\circ$ 时,

$$D_1(\theta, \varphi) = \left| G_1(\theta) \frac{2J_1(k_{l,t} a \sin \theta)}{k_{l,t} a \sin \theta} \right|, \quad (26)$$

$$D_2(\theta, \varphi) = \left| G_2(\theta) \frac{2J_1(k_{l,t} a \sin \theta)}{k_{l,t} a \sin \theta} \right|, \quad (27)$$

$$D_3(\varphi) = \left| \frac{2J_1(k_R a)}{k_R a} \right|. \quad (28)$$

前两式子即在半无限大固体表面上圆形活塞声源的指向性图案. 第三式子指出, 当利用体波时, 可以选择适当的 a , 使 $J_1(k_R a) = 0$, 以避免产生瑞利波.

如压电晶片为矩形,以 a 和 a' 为边,这里 a' 是沿楔的斜面,按圆形晶片情况的类似推导得

$$U_R = aa'P_a A_1 \frac{e^{-ik_l R}}{R} G_1(\theta) K_1(\theta, \varphi), \quad (29)$$

$$U_\theta = aa'P_a A_2 \frac{e^{-ik_l R}}{R} G_2(\theta) K_2(\theta, \varphi), \quad (30)$$

$$U_R^s = aa'P_a A_{3h} \frac{e^{-ik_R R}}{\sqrt{R}} K_3(\varphi), \quad (31)$$

$$U_Z^s = aa'P_a A_{3v} \frac{e^{-ik_R R}}{\sqrt{R}} K_3(\varphi). \quad (32)$$

其中

$$K_{1,2}(\theta, \varphi) = \frac{\sin m_{1,2}}{m_{1,2}} \frac{\sin l_{1,2}}{l_{1,2}}, \quad (33)$$

$$K_3(\varphi) = \frac{\sin m_3}{m_3} \frac{\sin l_3}{l_3}. \quad (34)$$

在所有 l 中, $b = \frac{a'}{\cos \alpha}$.

Викторов^[2] 等人给出过矩形晶片楔形换能器当 $\sin \alpha = \frac{k_R}{k_{lw}}$ 时的 $K_3(\varphi)$.

二、数字计算

对压电晶片是圆形,介质是钢,斜楔材料是有机玻璃的情形,作了数字计算,其有关参量为:

晶片(石英)直径	$2a = 12.0$ 毫米,
频率	$f = 2.50 \times 10^6$ 周/秒,
楔的纵波速度	$V_{lw} = 2.67 \times 10^3$ 米/秒,
钢的纵波速度	$V_{ls} = 5.87 \times 10^3$ 米/秒,
钢的横波速度	$V_{ts} = 3.20 \times 10^3$ 米/秒,
钢的瑞利波速度	$V_{Rs} = 2.97 \times 10^3$ 米/秒.

对体波计算了换能器前方($\varphi = 0$)YZ 平面内的指向性图案,对瑞利波计算了换能器前方 XY 平面上的指向性图案.

图 3 表示 $\alpha = 0^\circ, 20^\circ, 27.1^\circ$ 时纵波指向性图案 $D_1(\theta, 0)$. $\varphi = 0$ 时, $m_1 = 0$, $l_1 = l'_1 = (k_l \sin \theta - k_{lw} \sin \alpha)b$, 故 $D_1(\theta, 0) = \left| G_1(\theta) \frac{2J_1(l'_1)}{l'_1} \right|$.

如果按照平面波在两个相连接的两向同性半无限大介质之间的折射公式,即常用的 Snell 公式(对于纵波情况是 $\frac{\sin \alpha}{v_{lw}} = \frac{\sin \theta}{v_{ls}}$),则算出的折射角 θ , 如图中的垂直线所示. 可见,当 α 小于纵波全反射的临界角 α_{cl} ($= \sin^{-1} \frac{v_{lw}}{v_{ls}} = 27.1^\circ$) 时, α 愈大, $D_1(\theta, 0)$ 主极大

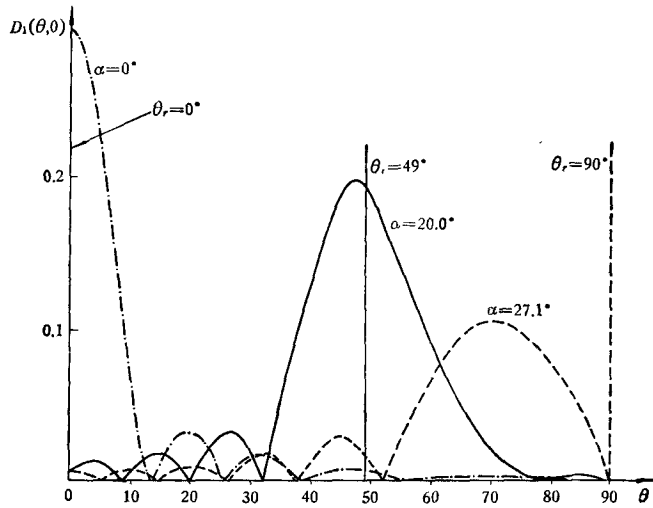


图 3 楔形换能器在正前方的纵波指向性图案

值的方向相对 θ , 偏离愈大. 当 α 很小时, 在主极大值附近 $G_1(\theta)$ 近似为常数, 故

$$D_1(\theta, 0) \simeq \text{常数} \cdot \frac{2J_1(l'_1)}{l'_1},$$

所得主极大值的方向和 θ , 基本是一致的.

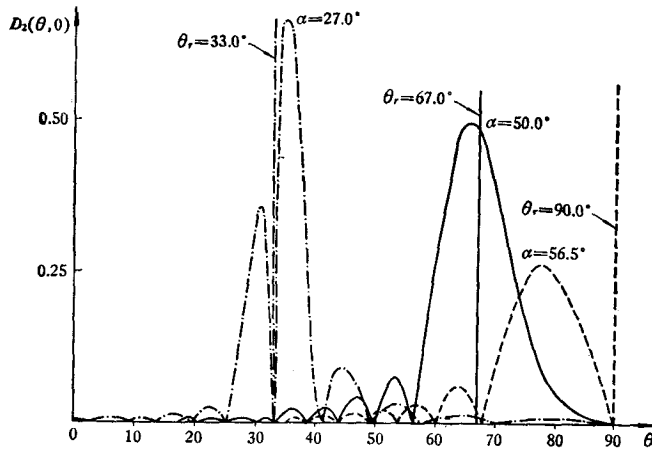


图 4 楔形换能器在正前方的横波指向性图案

图 4 表示 $\alpha = 27^\circ, 50^\circ, 56.5^\circ$ 时, $\varphi = 0$ 平面内横波指向性图案 $D_2(\theta, 0)$. $\varphi = 0$ 时, $m_2 = 0, l_2 = l'_2 = (k_t \sin \theta - k_{l_w} \sin \alpha)b, D_2(\theta, 0) = \left| G_2(\theta) \frac{2J_1(l'_2)}{l'_2} \right|$. 横波全反射的临界角 $\alpha_{cr} = 56.5^\circ$.

对于瑞利波, $D_3(\varphi) = D_3(-\varphi)$, 故指向性图案与 Y 轴对称. $\sqrt{l_3^2 + m_3^2}$ 随 φ 单调增长, 故 $D_3(\varphi)$ 对 φ 的关系类似于 $\left| \frac{2J_1(x)}{x} \right|$ 对 x 关系曲线的某一区间. 图 5 表示 $\alpha = 50^\circ, 58^\circ, 64^\circ$ 时, 瑞利波指向性图案 $D_3(\varphi)$. 可以看到 $D_3(0)$ 不一定是极大, 甚至在某些 α 时

它等于零。可以推算 $\varphi = 0$ 时,

$$\sqrt{l_3^2 + m_3^2} = l_3' = (k_R - k_{lw} \sin \alpha) \frac{a}{\cos \alpha}.$$

由 (18), (19) 式知

$$u_R' \text{ 或 } u_Z' \propto \cos \alpha \frac{2J_1(l_3')}{l_3'} \simeq \text{常数} \frac{2J_1(l_3')}{l_3'}.$$

图 6 计算了 $D_3(0)$ 与 α 的关系。从图中看出, 当 $\alpha = \sin^{-1} \frac{k_R}{k_{lw}} = 64.0^\circ$ 时, $D_3(0)$ 为最大。同时, 楔形换能器瑞利波指向性图案可以有二种类型: 一种是主瓣在 $\varphi = 0$ 的方向, 即在换能器的正前方; 另一种是有二个相同的主瓣对称地在 $\varphi = 0$ 方向的二侧。

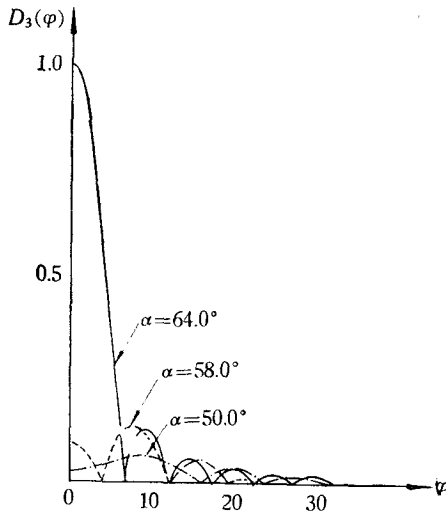


图 5 楔形换能器的瑞利波指向性图案

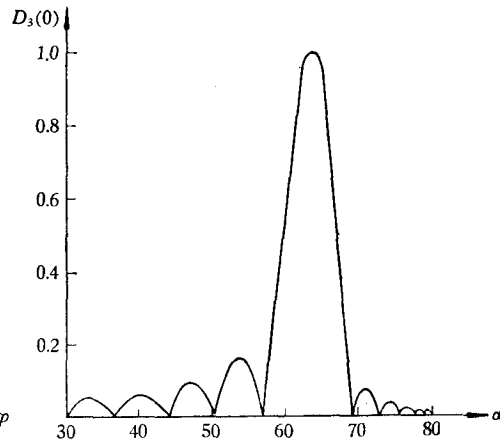


图 6 $D_3(0)$ 和斜楔角 α 的关系

顺便指出, 楔形换能器兰姆波指向性图案的分析, 为类似于瑞利波的情形。只是如同同时激发起几个模式时, 由于各模式的速度不同, 它们各自的指向性图案亦不同。

三、实验及实验结果

测量了纵波和瑞利波指向性图案。发射换能器用直径 12 毫米的石英晶片; 接收换能器用钛酸钡晶片, 前面加一有机玻璃的截头锥体, 其头部直径 3 毫米。晶片基频均为 2.5 兆赫。加在发射换能器的电信号是载频为 2.5 兆赫、宽度 25 微秒的射频脉冲。测量纵波指向性图案时, 用一直径 280 毫米、厚度 90 毫米的半圆柱形钢块。发射(被测)换能器放在平面中心, 圆柱面上每 2 度(相应的弧长约为 5 毫米)加工成一小平面对, 使它和接收换能器有较好的声耦合(如图 7 所示, 图中未画出沿柱面的一系列小平面对)。测量瑞利波指向性图案时, 利用同一钢块的平面部分, 让接收换能器固定, 发射(被测)换能器借助于一支架而围绕自己的垂直轴旋转, 以改变 φ 角(图 8)。

在测量瑞利波指向性图案过程中, 曾反复拆装楔形换能器中的晶片, 改变接收换能器

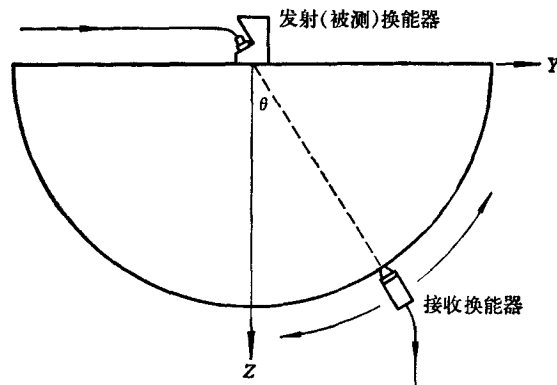


图 7 纵波指向性图案的测量装置

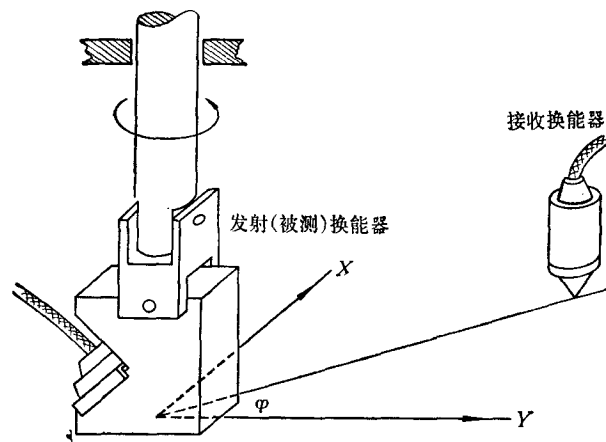
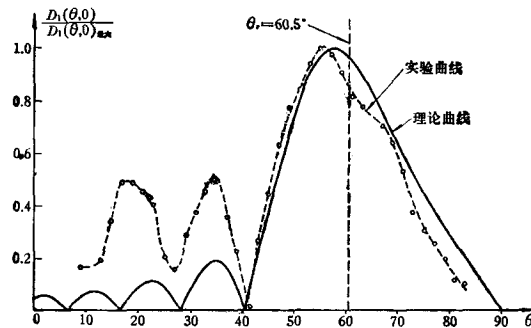


图 8 瑞利波指向性图案的测量装置

的倾斜度、耦合剂(变压器油)用量的多少,以及楔形换能器与介质间的压力,以观察这些因素对指向性图案的影响。发现这些因素中,拆装晶片对瑞利波指向性图案的影响较大,而用钛酸钡晶片较之石英晶片影响更甚。在测纵波指向性图案时,拆装晶片的影响较瑞利波小。改变接收换能器与楔形换能器的相对位置,距离愈近,测得瑞利波指向性图案中的主瓣显得愈宽,距离增大到 12 厘米以上时,才接近于理论曲线。

图 9、10 给出 $\alpha = 23.3^\circ$ 和 27.0° 时,纵波指向性图案的实验曲线与理论曲线。分析

图 9 $\alpha = 23.3^\circ$ 时的纵波指向性图案

表明,按 Snell 公式确定的折射方向 θ , 和实验曲线主极大值方向之差,超出可能的最大实验误差.

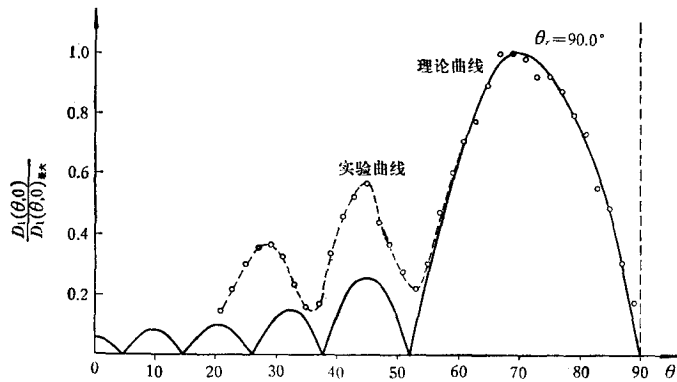


图 10 $\alpha = 27.0^\circ$ 时的纵波指向性图案

图 11、12 给出 $\alpha = 50.0^\circ$ 和 65.0° 时,瑞利波指向性图案的实验曲线与理论曲线.

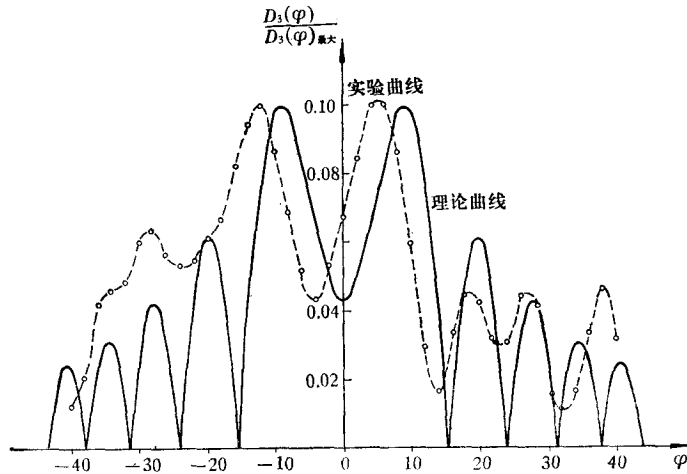


图 11 $\alpha = 50.0^\circ$ 时的瑞利波指向性图案

从结果可知,楔形换能器一般地是同时产生体波和瑞利表面波的;在超声检测中应用时,为便于识别信号,应适当地选择有关参数,使其有比较单纯的波型或一定的指向性图案.对于钢的检测,如要利用纵波,选用直探头(即 $\alpha = 0^\circ$),并选晶片直径使其满足 $J_1(k_R a) = 0$ 的条件,则有可能避免产生瑞利表面波.例如在工作频率为 2.5 兆赫时,可选晶片直径为 11.0 毫米,12.2 毫米,13.4 毫米或 14.6 毫米等等;在工作频率为 0.63 兆赫时,可选晶片直径

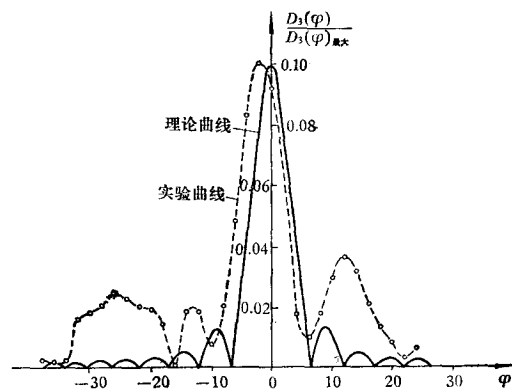


图 12 $\alpha = 65.0^\circ$ 时的瑞利波指向性图案

为 20.2 毫米, 24.9 毫米或 29.7 毫米等等. 如要用横波波束时, 选 $\alpha = 30^\circ \sim 50^\circ$, 但最好选某些 α 值使 $D_3(0) = 0$ (见图 6 的曲线). 利用瑞利表面波时, 可选 $\alpha = \alpha_0 = 64^\circ$. 如 α 偏离 α_0 太大, 达 $6^\circ - 7^\circ$ 时, $D_3(0)$ 就降低到零, 这时在 $\varphi = 0$ 方向的二侧, 有瑞利表面波辐射, 二个对称的指向性图案的主极大值约在 $\varphi = \pm 8^\circ$ 的位置, 这样对于检测显然是不利的. 改变晶片直径或频率, 则图 6 曲线中使 $\varphi = 0$ 方向辐射最强的斜楔角 α_0 不变, 即仍为 64° , 但计算表明, 整个曲线沿水平轴向 α_0 靠紧或松开. 故实际制作时, 对斜楔角允许的误差应按晶片直径和频率有所不同. 另一方面, 需要注意, 体波指向性图案主极大值的方向与按 Snell 公式算出的折射方向的不完全一致, 且在 α 较大 (接近于斜楔中入射波全反射的临界角) 时, 表现得比较明显. 例如对于横波, 在 $\alpha = 50^\circ, 55^\circ, 56^\circ$ 时, 其差别约各为 $1.5^\circ, 4.5^\circ$ 和 7.0° . 在这种情况下, 如按 Snell 公式算出的折射方向和反射信号的最大幅度来确定缺陷位置时, 需要注意可能由此产生的误差.

参 考 文 献

- [1] J. Krautkrämer und H. Krautkrämer, *Werkstoffprüfung mit Ultraschall*, Springer-Verlag (1961).
- [2] И. А. Викторов и О. М. Зубова, *Акуст. Ж.*, 9 (1963), 171.
- [3] И. А. Викторов, *Акуст. Ж.*, 7 (1961), 295.
- [4] G. J. Kühn and A. Lutsch, *J. Acoust. Soc. Am.*, 33 (1961), 949.
- [5] T. Hirona, *Geophys. Mag. (Tokyo)*, 18 (1948), 1.
- [6] G. F. Miller and H. Pursey, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A223 (1954), 521.
- [7] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Edition, Cambridge University Press (1944).

DIRECTIVITY PATTERNS OF ANGLE PROBES FOR ULTRASONIC BULK WAVES AND SURFACE WAVES

YEN REN-BO

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The directivity patterns of angle probes commonly used in ultrasonic material-testing are studied both theoretically and experimentally. Expressions are obtained for longitudinal waves and transverse waves radiating into the body under test and for surface waves propagating over the surface of the body, treated as a semi-infinite isotropic medium. Numerical computations are given in all three cases for a steel object. The theoretical deductions are partially checked by experiments for the case of longitudinal and surface waves. Some problems to be considered in ultrasonic testing are pointed out.