

广义相对论的旋量和复矢量形式*

郭 汉 英 吴 詠 时 李 根 道

(中国科学院原子能研究所) (中国科学院物理研究所) (中国科学院数学研究所)

提 要

本文利用 Cartan 外微分法, 给出结构方程的旋量形式, 从而自然得出 Newman-Penrose 方程. 进而由旋量空间出发, 利用 $\mathfrak{sl}(2C)$ 代数引出广义相对论的复矢量形式. 通常采用的 Cahen-Debever-Defrise 复矢量形式及 Brans 复矢量形式是这里的特殊情形. 这样, 便从么模群 $SL(2C)$ 及其李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$ 的角度得到了引力场复矢量表述的普遍形式, 并把旋量和复矢量形式统一了起来.

一、引 言

最近十年, 旋量分析已发展成为研究引力理论, 特别是引力辐射的有力工具^[1-3]. 此外, Cahen 等人^[4,5]又提出了引力场的复矢量形式, 并用 Cartan 外微分法有效地处理了有关问题^[6].

这两种方法的共同点是从广义相对论的标架表述出发, 利用 Riemann 张量的对偶分解^[7], 把爱因斯坦场方程纳入相应的体系之中. 差别在于, 前者是用顺时序 Lorentz 群 $\mathcal{L}_4$ 和么模群 $SL(2C)$ 的同态对应把引力场量为旋量; 后者则是用 $\mathcal{L}_4$ 和复正交群 $SO(3C)$ 具体的同构对应得出具体的复矢量形式.

显然, 由于这两种方法的根据在于 $\mathcal{L}_4 \cong SL(2C)/\{\pm I^{(2)}\} \cong SO(3C)$ (其中 $I^{(2)}$ 表 2×2 单位方阵), 它们之间应存在更直接的联系. 我们发现, 利用 $SL(2C)$ 及其李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$, 可以由旋量形式构造出复矢量的普遍形式, 从而把二者统一起来.

本文首先回顾标架表述和旋量形式, 由结构方程的旋量形式自然导出 NP 方程. 进而构造复矢量形式, 最后讨论两种特殊的复矢量表述.

二、标 架 表 述

按照等效原理, 广义相对论处理的是正常双曲 Riemann 空间, 其线元为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

度规的号差为 -2.

在每一空时点, 选取一组标架向量, 其协变和逆变支量分别为 $e_{(a)}^\mu, e_{(\mu)}^a$. 满足条件

$$e_{(a)}^\mu e_{(\mu)}^b = \delta_a^b, \quad e_{(\mu)}^a e_{(a)}^b = \delta_\mu^b \quad (a, b = 0, 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

* 1973 年 2 月 7 日收到.

并且使得度规方阵能写为

$$G = (g_{\mu\nu})_{0 \leq \mu, \nu \leq 3} = (e_{\mu}^{(a)})' J (e_{\nu}^{(b)}) \quad J = (\eta_{ab}), \quad (2.3)$$

其中 η_{ab} 是对标架的度规, “ $'$ ”表示矩阵的转置.

引入协标架 1-形式 θ^a :

$$\theta^a = e_{\mu}^{(a)} dx^{\mu}. \quad (2.4)$$

线元(2.1)式能写为

$$ds^2 = \eta_{ab} \theta^a \theta^b. \quad (2.5)$$

再引入联络 1-形式 ω^a_b 及曲率 2-形式 Ω^a_b :

$$\omega^a_b = \gamma^a_{bc} \theta^c, \quad (2.6)$$

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d, \quad (2.7)$$

这里, γ^a_{bc} 是对于标架 $\{e_{\mu}^{(a)}\}$ 的联络.

$$\begin{aligned} \gamma^a_{bc} &= e_{(b); \mu}^{\nu} e_{(c)}^{\mu} e_{\nu}^{(a)} \\ &= (\partial_{\mu} e_{(b)}^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} e_{(b)}^{\lambda}) e_{(c)}^{\mu} e_{\nu}^{(a)} \quad \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ 是 Christoffel 符号. R^a_{bcd} 是 Riemann 曲率张量对标架的分量.

根据微分几何理论^[8], θ^a , ω^a_b , Ω^a_b 满足无挠率结构方程:

$$d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = 0 \quad \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0, \quad (2.9)$$

$$d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \Omega^a_b \quad \Omega_{ab} + \Omega_{ba} = 0; \quad (2.10)$$

和 Bianchi 恒等式

$$d\Omega^a_b = \Omega^a_c \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge \Omega^c_b. \quad (2.11)$$

为了把它们同爱因斯坦引力场方程

$$R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R = -T_{ab} \quad (2.12)$$

联系起来,要利用 Riemann 张量的对偶分解^[7]

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{R}{12} g_{abcd} + E_{abcd}, \quad (2.13)$$

其中

$$\begin{aligned} g_{abcd} &= \eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}, \quad {}^*g_{abcd} = g_{abcd}^*, \\ {}^*C_{abcd} &= C_{abcd}^*, \quad C^a_{ab} = 0, \\ {}^*E_{abcd} &= -E_{abcd}^*, \quad E^a_{ab} = 0, \\ E_{abcd} &= g_{ab} f_{cd} S_{ef}, \quad S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{4} \eta_{ab} R. \end{aligned} \quad (2.14)$$

C_{abcd} 为 Weyl 张量对标架的支量,无迹自对偶, E_{abcd} 无迹反自对偶. 反称张量的对偶定义为

$${}^*F_{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{-\eta} \epsilon_{abcd} F^{cd}, \quad \eta = \det(\eta_{ab}). \quad (2.15)$$

脚标上的方括号表示反称化. 利用场方程(2.12), 把 C_{abcd} 和 E_{abcd} 中的有关量表示出来, 例如 S_{ab} 可写为

$$S_{ab} = -T_{ab} + \frac{1}{4} \eta_{ab} R. \quad (2.16)$$

将(2.7)式中的 R^a_{bcd} 用(2.12), (2.13)和(2.14)式表示, 就可以用结构方程和 Bianchi 恒等式来描写引力场.

可以把结构方程写为分量形式:

$$\partial_{[\mu} e_{\nu]}^{(a)} = \gamma^a_{bc} e_{\mu}^{(b)} e_{\nu}^{(c)}, \quad (2.17)$$

$$e_{[\nu}^{(c)} \partial_{\mu]} \gamma^a_{bc} = \left(\gamma^a_{fc} \gamma^f_{bd} - \gamma^a_{bf} \gamma^f_{dc} - \frac{1}{2} R^a_{bcd} \right) e_{\nu}^{(c)} e_{\mu}^{(d)}. \quad (2.18)$$

它们对应于协变支量 $e_{(a)}^{\mu}$, 或者写为对应于逆变支量 $e_{(a)}^{\mu}$ 的形式:

$$X_c e_{(b)}^{\mu} - X_b e_{(c)}^{\mu} = C^a_{cb} e_{(a)}^{\mu}, \quad C^a_{cb} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb}, \quad (2.19)$$

$$X_c \gamma^a_{bd} - X_d \gamma^a_{bc} = \gamma^a_{fd} \gamma^f_{bc} - \gamma^a_{fc} \gamma^f_{bd} - \gamma^a_{bf} C^f_{dc} - R^a_{bcd}, \quad (2.20)$$

其中微分算子 X_a 定义为

$$X_a = e_{(a)}^{\mu} \partial_{\mu}. \quad (2.21)$$

由(2.19)式可以得到等价于 Poincaré 引理^[8]的交换子方程:

$$[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c. \quad (2.22)$$

同样, 可以把 Bianchi 式写为标架的协分量或逆分量形式. 这样, 就得到了引力场所满足的两套等价的一阶偏微分方程组.

通常的张量表述相当于取自然标架

$$e_{(a)}^{\mu} = \delta_a^{\mu}. \quad (2.23)$$

下面用的是两种 Lorentz 标架: 伪正交标架和拟正交标架^[3]. 对于前者

$$g^{\mu\nu} = e_{(0)}^{\mu} e_{(0)}^{\nu} - e_{(1)}^{\mu} e_{(1)}^{\nu} - e_{(2)}^{\mu} e_{(2)}^{\nu} - e_{(3)}^{\mu} e_{(3)}^{\nu}; \quad (2.24)$$

对于后者,

$$g^{\mu\nu} = e_{(0)}^{\mu} e_{(1)}^{\nu} + e_{(1)}^{\mu} e_{(0)}^{\nu} - e_{(2)}^{\mu} \overline{e_{(2)}^{\nu}} - \overline{e_{(2)}^{\mu}} e_{(2)}^{\nu}, \quad e_{(3)}^{\mu} = \overline{e_{(2)}^{\mu}}. \quad (2.25)$$

“—”表示取复共轭. 这两种情形中, 标架的局部变换群都是 Lorentz 群 $\mathcal{L}$, 并有

$$\theta^a \rightarrow \tilde{\theta}^a = l^a_b \theta^b, \quad L^{-1} = (l^a_b) \in \mathcal{L}, \quad (2.26)$$

$$\omega^a_b \rightarrow \tilde{\omega}^a_b = l^a_c \omega^c_f L^f_b + l^a_c dL^c_b, \quad L = (L^a_b) \in \mathcal{L}, \quad (2.27)$$

$$Q^a_b \rightarrow \tilde{Q}^a_b = l^a_c Q^c_f L^f_b, \quad (2.28)$$

或者写为矩阵形式:

$$\theta \rightarrow \tilde{\theta} = L^{-1} \theta, \quad (2.29)$$

$$\omega \rightarrow \tilde{\omega} = L^{-1} \omega L + L^{-1} dL, \quad (2.30)$$

$$Q \rightarrow \tilde{Q} = L^{-1} Q L. \quad (2.31)$$

显然, 采用 Lorentz 标架的优点在于可以充分利用群 $\mathcal{L}$ 的性质来讨论引力场. 其所以能够这样作, 是由于等效原理要求引力场有正常双曲黎曼几何, 以保证每一空时点存在局部惯性系.

三、旋量形式

具有一反称双线性型的二维复矢量空间称为旋量空间, 记作 $\mathfrak{S}$. 使这一反称双线性型不变的变换群为 $SL(2C)$, 它与群 $\mathcal{L}^\dagger$ 的关系为 $\mathcal{L}^\dagger \cong SL(2C)/\{\pm I^{(2)}\}$. 旋量分析正是利用这一关系把引力场量表为旋量的, 所谓 NP 方程^[1]就是相应于 Lorentz 标架逆变支

量的方程(2.20)之旋量形式。这里,先给出结构方程和 Bianchi 恒等式的旋量形式,然后利用 Riemann 旋量的对偶分解和场方程的旋量形式,自然导出 NP 方程、逆标架方程和 Bianchi 式相应的方程。

从 Lorentz 标架出发,引入 $[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}]$ 型厄米旋量协标架 1-形式 $\theta^{A\bar{B}}(A, B = 1, 2)$, 旋量联络 1-形式 Γ^A_B 和旋量曲率 2-形式 Ω^A_B :

$$\theta^{A\bar{B}} = \sigma_a^{A\bar{B}} \theta^a = \sigma_\mu^{A\bar{B}} dx^\mu \quad \sigma_\mu^{A\bar{B}} = \sigma_a^{A\bar{B}} e_\mu^{(a)}, \quad (3.1)$$

$$\Gamma^A_B = \frac{1}{2} \omega^a_b \sigma_a^{A\bar{B}} \sigma_b^{B\bar{B}} = \omega^{ab} \sigma_{ab}{}^A{}_B, \quad (3.2)$$

$$\Omega^A_B = \frac{1}{2} \Omega^a_b \sigma_a^{A\bar{B}} \sigma_b^{B\bar{B}} = \Omega^{ab} \sigma_{ab}{}^A{}_B, \quad (3.3)$$

这里, $\sigma_\mu^{A\bar{B}}$ 是旋量协标架分量, $\sigma_a^{A\bar{B}}$ 联系旋量和张量的标架分量, 适合条件

$$\begin{aligned} \sigma_a^{A\bar{B}} \sigma^a_{C\bar{D}} &= \delta_C^A \delta_{\bar{D}}^{\bar{B}}, \quad \sigma_a^{A\bar{B}} \sigma^b_{B\bar{B}} = \delta_a^b \sigma_a^{A\bar{B}} = \overline{\sigma_a^{B\bar{A}}}, \\ \sigma_a^{A\bar{B}} &= \eta_{ab} \sigma^b_{C\bar{D}} e^{AC} e^{\bar{B}\bar{D}}, \quad e_{AB} = e^{AB} = \delta_1^A \delta_2^B - \delta_2^A \delta_1^B, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$e = (e_{AB})$ 是旋量空间 $\mathfrak{S}$ 的反称双线性型。对于伪正交标架和拟正交标架, σ_{AB}^a 分别取为

$$(\sigma_{A\bar{B}}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{A\bar{B}}^1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{A\bar{B}}^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{A\bar{B}}^3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ (\sigma_{AB}^0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{AB}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{AB}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_{AB}^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\sigma_{ab}{}^A{}_B$ 定义为

$$\sigma_{ab}{}^A{}_B = \frac{1}{2} \sigma_{[a}{}^{A\bar{B}} \sigma_{b]B\bar{B}}, \quad \sigma_{ab}{}^A{}_A = 0. \quad (3.7)$$

不难证明公式

$$\bar{\delta}_F^{\bar{B}} \Gamma^A_E + \delta_E^A \bar{\Gamma}_F^{\bar{B}} = \omega^a_b \sigma_a^{A\bar{B}} \sigma_b^E{}_{\bar{F}}, \quad (3.8)$$

利用此式,并由(2.9),(2.10)及(2.11)式可以得到

$$d\theta^{A\bar{B}} + \Gamma^A_C \theta^{C\bar{B}} + \bar{\Gamma}^{\bar{B}}_{D\bar{A}} \theta^{A\bar{D}} = 0, \quad (3.9)$$

$$d\Gamma^A_B + \Gamma^A_C \Gamma^C_B = \Omega^A_B, \quad (3.10)$$

$$d\Omega^A_B = \Omega^A_{D\bar{A}} \Gamma^D_B - \Gamma^A_{D\bar{A}} \Omega^D_B. \quad (3.11)$$

这就是结构方程和 Bianchi 恒等式的旋量形式。

引入旋量联络 $\Gamma_{ABC\bar{D}}$ 和旋量曲率 $R_{A\bar{B}B\bar{C}D\bar{H}}$:

$$\Gamma^A_B = \Gamma^A_{BC\bar{D}} \theta^{C\bar{D}}, \quad (3.12)$$

$$\Omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BC\bar{D}\bar{H}} \theta^{C\bar{G}} \wedge \theta^{D\bar{H}} \quad R^A_{BC\bar{D}\bar{H}} = \frac{1}{2} R^{A\bar{B}}_{B\bar{E}C\bar{G}D\bar{H}} \quad (3.13)$$

以及算子

$$X_{A\bar{B}} = \sigma_{A\bar{B}}^a X_a = \sigma_{A\bar{B}}^\mu \partial_\mu, \quad (3.14)$$

$$d = dx^\mu \partial_\mu = \theta^a X_a = \theta^{A\bar{B}} X_{A\bar{B}}. \quad (3.15)$$

可以写出(3.9)和(3.10)式的逆标架分量形式

$$X_{C\bar{D}} \sigma_{A\bar{B}}^\mu - X_{A\bar{B}} \sigma_{C\bar{D}}^\mu = C^{E\bar{F}}_{C\bar{D}A\bar{B}} \sigma_{E\bar{F}}^\mu, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} X_{C\bar{G}}\Gamma^A_{BD\bar{H}} - X_{D\bar{H}}\Gamma^A_{BC\bar{G}} &= \Gamma^A_{ID\bar{H}}\Gamma^I_{BC\bar{G}} - \Gamma^A_{IC\bar{G}}\Gamma^I_{BD\bar{H}} \\ &+ \Gamma^A_{BI}\Gamma^I_{C\bar{G}D\bar{H}} + R^A_{BC\bar{G}D\bar{H}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

以及和 Poincaré 定理相应的交换子方程

$$[X_{A\bar{B}}, X_{C\bar{D}}] = C^{\bar{E}\bar{F}}_{A\bar{B}C\bar{D}} X_{E\bar{F}}, \quad (3.18)$$

其中

$$C^I_{C\bar{G}D\bar{H}} = \Gamma^I_{DC\bar{G}}\bar{\delta}^I_{\bar{H}} - \Gamma^I_{CD\bar{H}}\bar{\delta}^I_{\bar{G}} + \bar{\Gamma}^I_{HG\bar{C}}\delta^I_D - \bar{\Gamma}^I_{GH\bar{D}}\delta^I_C. \quad (3.19)$$

此外,由 Riemann 张量的对偶分解可以得到^[2]

$$R_{ABC\bar{G}D\bar{H}} = \epsilon_{\bar{H}\bar{G}} \left[\psi_{ABCD} + \frac{R}{24} (\epsilon_{AD}\epsilon_{BC} + \epsilon_{AC}\epsilon_{BD}) \right] + \epsilon_{DC}\phi_{AB\bar{G}\bar{H}}, \quad (3.20)$$

其中 ψ_{ABCD} 对下标全对称,对应于 Weyl 旋量;而 $\phi_{AB\bar{G}\bar{H}}$ 为 Ricci 旋量之无迹部分,满足

$$\phi_{AB\bar{C}\bar{D}} = \phi_{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}} = \phi_{B\bar{A}\bar{C}\bar{D}} = \overline{\phi_{CD\bar{A}\bar{B}}}, \quad (3.21)$$

同时,爱因斯坦场方程可以表为

$$\phi_{AB\bar{C}\bar{D}} = \frac{1}{4} (T_{A\bar{C}B\bar{D}} + T_{B\bar{C}A\bar{D}}), \quad R = T, \quad (3.22)$$

$T_{A\bar{C}B\bar{D}}$ 是能量动量旋量:

$$T_{A\bar{C}B\bar{D}} = T_{ab}\sigma^a_{A\bar{C}}\sigma^b_{B\bar{D}} = T_{ab}\sigma^{(a}_{A\bar{C}}\sigma^{b)}_{B\bar{D}}, \quad T = T^a_a, \quad (3.23)$$

脚标中的圆括号表示对称化. 将(3.17)式中的 $R^A_{BC\bar{G}D\bar{H}}$ 用(3.20)及(3.22)式表示就得到 NP 方程^[1]. (3.16)式是相应的标架方程.

由(3.11)式可以得到

$$e^{ED}\nabla_{E\bar{D}}\psi_{ABCD} = e_{AC}\nabla_{B\bar{G}}\Lambda + e_{BC}\nabla_{A\bar{G}}\Lambda + e^{\bar{F}\bar{H}}\nabla_{C\bar{F}}\phi_{AB\bar{G}\bar{H}} \quad \Lambda = \frac{R}{24}, \quad (3.24)$$

其中 $\nabla_{E\bar{D}}$ 是旋量协变微分算子. 利用场方程(3.22),就得到与 Bianchi 恒等式相应的旋量方程组^[9].

到此,我们由结构方程和 Bianchi 恒等式的旋量形式出发,自然导出了 Newman-Penrose 旋量体系. 显然,(3.16),(3.17),(3.18)及(3.24)式就是(2.19),(2.20),(2.22)等式的旋量形式.

当协标架 θ^a 经变换 $L^{-1} = (l^a_b) \in \mathcal{L}^\dagger$ 时,旋量协标架 $\theta^{A\bar{B}}$ 经变换 $\mathcal{A}^{-1} \otimes \bar{\mathcal{A}}^{-1} = (\alpha^A_C) \otimes (\bar{\alpha}^{\bar{B}}_{\bar{D}}) \in SL(2C) \otimes \overline{SL(2C)}$. Γ^A_B, Q^A_B 亦有与(2.27),(2.28)式相应的变换性质:

$$\theta^{A\bar{B}} \rightarrow \tilde{\theta}^{A\bar{B}} = \alpha^A_C \bar{\alpha}^{\bar{B}}_{\bar{D}} \theta^{C\bar{D}}, \quad (3.25)$$

$$\Gamma^A_B \rightarrow \tilde{\Gamma}^A_B = \alpha^A_C \Gamma^C_D A^D_B + \alpha^A_C dA^C_B, \quad (3.26)$$

$$Q^A_B \rightarrow \tilde{Q}^A_B = \alpha^A_C Q^C_D A^D_B, \quad \mathcal{A} = (A^C_D) \in SL(2C). \quad (3.27)$$

后两式可写为矩阵形式:

$$\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma} = \mathcal{A}^{-1}\Gamma\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}d\mathcal{A}, \quad (3.28)$$

$$Q \rightarrow \tilde{Q} = \mathcal{A}^{-1}Q\mathcal{A}, \quad (3.29)$$

其中么模变换与顺时序 Lorentz 变换的关系为

$$l^a_b \sigma^a_{A\bar{B}} = \sigma^c_{B\bar{D}} \alpha^A_C \bar{\alpha}^{\bar{B}}_{\bar{D}}, \quad (3.30)$$

$$L^a_b \sigma^a_{A\bar{B}} = \sigma^c_{C\bar{D}} A^C_A \bar{A}^{\bar{D}}_{\bar{B}}. \quad (3.31)$$

四、复矢量形式

Cahen 等人^[4,5]利用 Riemann 空间双向量的对偶分解,作出了 $\mathcal{L}\downarrow$ 与 $SO(3C)$ 具体的同构对应,并由此得出具体的复矢量形式.事实上,从旋量空间 Θ 出发,利用李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$,可以构造普遍的复矢量形式.

我们知道,李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$ 构成一个三维复矢量空间 $\mathfrak{E}^3$,它的一组基 $\{\lambda_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)\}$ 可以取为三个线性无关的 2×2 零迹矩阵.因此,旋量空间 Θ 中,所有 2×2 的零迹矩阵都可展为 λ_α 的线性组合,展开式的系数就是 $\mathfrak{sl}(2C)$ 的元素,即 $\mathfrak{E}^3$ 空间中的复矢量的分量.同时,根据半单李代数的 Cartan 判据,可以由 $\mathfrak{sl}(2C)$ 代数的结构常数 $C_{\alpha\beta}^\gamma$ 定义非异的 Killing 型 $g_{\alpha\beta}$,它作为 $\mathfrak{E}^3$ 空间中元素的内积在 $\mathfrak{sl}(2C)$ 的伴随线性群下是不变的,而这个伴随线性群同构于 $SO(3C)$.这样,由于 $\mathcal{L}\downarrow \cong SL(2C)/\{\pm I^{(2)}\}$,李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$ 就自然刻划了 $\mathcal{L}\downarrow$ 与 $SO(3C)$ 的同构关系.另一方面, Riemann 双向量的对偶性质可以充分体现它在旋量形式之中,因而只要能够从旋量形式出发构造出复矢量形式,当然也就反映了相应的对偶性质.

现在,着手从旋量空间构造复矢量形式.

首先,利用 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 型零迹旋量 $\sigma_{ab}{}^A{}_B$, 引入一个 $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 型零迹旋量标架 2-形式 $\Theta^A{}_B$:

$$\Theta^A{}_B = \frac{1}{2} \theta^a \wedge \theta^b \sigma_{ab}{}^A{}_B. \quad (4.1)$$

以 A, B 为指标,排成 2×2 矩阵,由(3.7)式知迹为零.因此有

$$\Theta = (\Theta^A{}_B)_{1 \leq A, B \leq 2} = Z^a \lambda_a, \quad Z^a = \frac{1}{2} Z^a{}_{ab} \theta^a \wedge \theta^b, \quad (4.2)$$

其中 $Z^a{}_{ab}$ 为 $\sigma_{ab} = (\sigma_{ab}{}^A{}_B)$ 之展开系数:

$$\sigma_{ab} = (\sigma_{ab}{}^A{}_B)_{1 \leq A, B \leq 2} = Z^a{}_{ab} \lambda_a. \quad (4.3)$$

与此相应,由(3.2), (3.3)式可以得到

$$\Gamma = (\Gamma^A{}_B)_{1 \leq A, B \leq 2} = \sigma^a \lambda_a, \quad \sigma^a = \sigma^a{}_c \theta^c, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}^A{}_B)_{1 \leq A, B \leq 2} = \Sigma^a \lambda_a, \quad \Sigma^a = \frac{1}{2} \Sigma^a{}_{ab} \theta^a \wedge \theta^b. \quad (4.5)$$

显然, Z^a , σ^a 与 Σ^a 是 $\mathfrak{E}^3$ 空间中的元素.

利用公式(3.8)可以证明:

$$d\Theta^A{}_B + \Gamma^A{}_C \wedge \Theta^C{}_B - \Theta^A{}_C \wedge \Gamma^C{}_B = 0, \quad (4.6)$$

写为矩阵形式即为

$$d\Theta + \Gamma \wedge \Theta - \Theta \wedge \Gamma = 0. \quad (4.7)$$

同时,方程(3.10), (3.11)也可写为矩阵形式:

$$d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = \mathcal{Q}, \quad (4.8)$$

$$d\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \mathcal{Q}. \quad (4.9)$$

利用(4.2), (4.4)及(4.5)式,使得 Z^a , σ^a , Σ^a 的方程:

$$dZ^a + C^a{}_{\beta\gamma} \sigma^\beta \wedge Z^\gamma = 0, \quad (4.10)$$

$$d\sigma^a + \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^a \sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma = \Sigma^a, \quad (4.11)$$

$$d\Sigma^a = C_{\beta\gamma}^a \Sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma, \quad (4.12)$$

这里, $C_{a\beta}^\gamma$ 是 $\mathfrak{sl}(2C)$ 代数的结构常数,

$$[\lambda_a \lambda_\beta] = C_{a\beta}^\gamma \lambda_\gamma. \quad (4.13)$$

由 $C_{a\beta}^\gamma$ 可构造 $\mathfrak{sl}(2C)$ 代数的 Killing 型:

$$g_{a\beta} = C_{a\gamma}^\delta C_{\beta\delta}^\gamma. \quad (4.14)$$

根据半单李代数的 Cartan 判据, 对于 $\mathfrak{sl}(2C)$, $g_{a\beta}$ 非异, 即存在 $g^{a\beta}$, 使得

$$g_{a\beta} g^{a\beta} = \delta_\beta^\beta, \quad \det(g_{a\beta}) \neq 0. \quad (4.15)$$

利用 $g^{a\beta}$ 可以定义 $\mathbb{E}^3$ 中元素 Z^a 的局内积:

$$\langle Z^a Z^\beta \rangle = g^{a\beta}. \quad (4.16)$$

此外, 可以证明, $\text{tr}(\lambda_a \lambda_\beta) = \gamma_{a\beta}$ 也是非退化的. 因此可以定义:

$$\lambda^a = \gamma^{a\beta} \lambda_\beta, \quad \gamma^{a\beta} \gamma_{a\delta} = \delta_\delta^\beta. \quad (4.17)$$

于是, 显然有

$$\text{tr}(\lambda^a \lambda_\beta) = \delta_\beta^a. \quad (4.18)$$

引入 1-形式 σ^a_β 及 2-形式 Σ^a_β :

$$\sigma^a_\beta = C^a_{\gamma\beta} \sigma^\gamma, \quad (4.19)$$

$$\Sigma^a_\beta = C^a_{\gamma\beta} \Sigma^\gamma, \quad (4.20)$$

它们是李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$ 之内微分代数的元素. 利用 Jacobi 恒等式, 可由 (4.10), (4.11) 和 (4.12) 式得到

$$dZ^a + \sigma^a_\beta \wedge Z^\beta = 0, \quad (4.21)$$

$$d\sigma^a_\beta + \sigma^a_\gamma \wedge \sigma^\gamma_\beta = \Sigma^a_\beta, \quad (4.22)$$

$$d\Sigma^a_\beta = \Sigma^a_\gamma \wedge \sigma^\gamma_\beta - \sigma^a_\gamma \wedge \Sigma^\gamma_\beta. \quad (4.23)$$

根据李代数理论^[8], 内微分代数在李代数内生成一个群, 称为伴随线性群, 在这个群下, Killing 型是不变的. 显然, $\mathfrak{sl}(2C)$ 代数之内微分代数生成的伴随线性群 G 同构于 $SO(3C)$.

$$g_{a\beta} \rightarrow \tilde{g}_{a\beta} = O^\gamma_\alpha g_{\gamma\delta} O^\delta_\beta = g_{a\beta}, \quad O = (O^\alpha_\beta) \in G \cong SO(3C). \quad (4.24)$$

由方程 (4.21), (4.22) 及 (4.23) 的协变性, 可以得到在群 $G \cong SO(3C)$ 下 Z^a , σ^a_β , Σ^a_β 的变换性质,

$$Z^a \rightarrow \tilde{Z}^a = O^{-1a}_\beta Z^\beta, \quad (4.25)$$

$$\sigma^a_\beta \rightarrow \tilde{\sigma}^a_\beta = O^{-1a}_\gamma \sigma^\gamma_\delta O^\delta_\beta + O^{-1a}_\gamma dO^\gamma_\beta, \quad (4.26)$$

$$\Sigma^a_\beta \rightarrow \tilde{\Sigma}^a_\beta = O^{-1a}_\gamma \Sigma^\gamma_\delta O^\delta_\beta. \quad (4.27)$$

写为矩阵形式:

$$Z \rightarrow \tilde{Z} = O^{-1} Z, \quad (4.28)$$

$$\sigma \rightarrow \tilde{\sigma} = O^{-1} \sigma O + O^{-1} dO, \quad (4.29)$$

$$\Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma} = O^{-1} \Sigma O. \quad (4.30)$$

不难看出, 当旋量空间 $\mathfrak{S}$ 中 Θ^A_B 经么模变换 $\mathcal{A}^{-1} = (\alpha^A_B) \in SL(2C)$ 时, 复 3 维空间 $\mathbb{E}^3$ 中 Z^a 经变换 $O^{-1} = (O^{-1a}_\beta) \in G \cong SO(3C)$. 可以求出二者之间的对应为

$$O^a_\beta \lambda_a = \mathcal{A}^{-1} \lambda_a \mathcal{A}. \quad (4.31)$$

到此为止,我们已经从旋量空间 $\mathfrak{S}$ 出发,利用李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$, 把 Lorentz 空间 $\mathfrak{S}$ 中的几何量,以及结构方程和 Bianchi 恒等式,全部化为复 3 维矢量空间 $\mathfrak{C}^3$ 中的复矢量形式. $\theta^a, \omega^a_b, \Omega^a_b$ 与 $Z^a, \sigma^a_\beta, \Sigma^a_\beta$ 之间的对应关系为

$$Z^a = \frac{1}{2} Z^a_{ab} \theta^a \wedge \theta^b, \quad (4.32)$$

$$\sigma^a_\beta = C^a_{\gamma\beta} Z^{\gamma}_{ab} \omega^{ab}, \quad (4.33)$$

$$\Sigma^a_\beta = C^a_{\gamma\beta} Z^{\gamma}_{ab} \Omega^{ab}. \quad (4.34)$$

(4.21), (4.22), (4.23) 式就是复矢量形式的结构方程和 Bianchi 恒等式. Z^a, σ^a_β 和 Σ^a_β 分别为复矢量的标架 2-形式、联络 1-形式和曲率 2-形式. 此外,不难证明:

$$\eta_{ab} = \frac{3}{2} Z^a_{cc} g_{a\beta} Z^{\beta c}_b, \quad (4.35)$$

$$Z^a_{ab} Z^b_c = \frac{3}{2} \delta^c_a, \quad (4.36)$$

$$Z^a_{ab} Z^b_\beta = 2\delta^a_\beta. \quad (4.37)$$

将(4.22)式写为分量形式,可以得到复矢量旋转系数 σ^a_c 及复矢量曲率系数 Σ^a_{cd} 之间的关系:

$$X_{[a} \sigma^a_{b]} = \sigma^a_c \gamma^c_{[ba]} - \frac{1}{2} C^a_{\beta\gamma} \sigma^{\beta}_{[a} \sigma^{\gamma}_{b]} + \frac{1}{2} \Sigma^a_{ab}, \quad (4.38)$$

$$e^{(a)}_{[\mu} \partial_{\nu]} \sigma^a_c = \left(\sigma^a_d \gamma^d_{bc} - \frac{1}{4} C^a_{\beta\gamma} \sigma^{\beta}_b \sigma^{\gamma}_c + \frac{1}{2} \Sigma^a_{bc} \right) e^{(b)}_{[\mu} e^{(c)}_{\nu]}. \quad (4.39)$$

前者相应于逆标架,后者相应于协标架. 对于(4.10)和(4.12)式也可以作出相应的分量形式.

为了把上述几何量的复矢量形式和引力场联系起来,必须给出曲率张量对偶分解和场方程的复矢量形式. 我们仍由旋量形式出发.

由 Riemann 旋量的对偶分解(3.20)式有

$$\begin{aligned} R^A_{Bcd} &= R^A_{BC\bar{D}\bar{H}} \sigma^{\bar{C}\bar{G}}_{[c} \sigma^{\bar{D}\bar{H}}_{d]} \\ &= \{ \epsilon_{\bar{H}\bar{G}} [\phi^A_{BCD} + \Lambda (\delta^A_D \epsilon_{CB} + \delta^A_C \epsilon_{DB})] + \epsilon_{DC} \phi^A_{B\bar{G}\bar{H}} \} \sigma^{\bar{C}\bar{G}}_{[c} \sigma^{\bar{D}\bar{H}}_{d]}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

引入矩阵 R_{cd} , ψ 和 ϕ , 并按 λ_a 展开:

$$R_{cd} = (R^A_{Bcd})_{1 \leq A, B \leq 2} = \Sigma^a_{cd} \lambda_a, \quad (4.41)$$

$$\psi = ((\phi^A_{B\bar{D}\bar{C}})_{1 \leq C, D \leq 2})_{1 \leq A, B \leq 2} = C^a_{\beta\lambda_a} \lambda^{\bar{\beta}}, \quad (4.42)$$

$$\phi = ((\phi^A_{B\bar{H}\bar{G}})_{1 \leq \bar{G}, \bar{H} \leq 2})_{1 \leq A, B \leq 2} = E^a_{\bar{\beta}\lambda_a} \lambda^{\bar{\beta}}. \quad (4.43)$$

利用(4.3)式及(4.18)式,可以得到

$$\Sigma^a_{cd} = -C^a_{\beta} Z^{\beta}_{cd} + 2\Lambda Z^a_{cd} - E^a_{\bar{\beta}} Z^{\bar{\beta}}_{cd}, \quad (4.44)$$

或者写为微分形式:

$$\Sigma_a = (-C_{a\beta} + 2\Lambda g_{a\beta}) Z^{\beta} - E_{a\bar{\beta}} Z^{\bar{\beta}}, \quad (4.45)$$

$C_{a\beta}$ 相应于 Weyl 张量, $E_{a\bar{\beta}}$ 相应于 Ricci 张量之无迹部分. 由 ϕ_{ABCD} 及 $\phi_{AB\bar{C}\bar{D}}$ 的性质,可以得到 $C_{a\beta}$ 和 $E_{a\bar{\beta}}$ 的性质:

$$C_{a\beta} = C_{\beta a}, \quad C^a_a = 0, \quad E_{a\bar{\beta}} = \overline{E_{\beta\bar{a}}}. \quad (4.46)$$

通过类似的处理, 由爱因斯坦场方程的旋量形式(3.22)式可以得到场方程的复矢量形式:

$$E_{a\bar{b}} = \frac{1}{4} T_{ab} \sigma^{(ab)}_{a\bar{b}}, \quad R = T, \quad (4.47)$$

其中 $\sigma^{(ab)}_{a\bar{b}}$ 是双重矩阵 $\sigma^{(ab)}$ 按 λ^a 及 $\lambda^{\bar{a}}$ 展开的系数:

$$\begin{aligned} \sigma^{(ab)} &= [(\sigma^{(aA\bar{G}}\sigma^{b)}_{B\bar{H}} + \sigma^{(A\bar{G}}\sigma^{b)}_{E\bar{H}}\sigma^{(a}_{B\bar{E}}\sigma^{b)}_{C\bar{H}})_{1 \leq \bar{G}, H \leq 2} 1 \leq A, B \leq 2] \\ &= \sigma^{(ab)}_{a\bar{b}} \lambda^a \lambda^{\bar{b}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

将结构方程及 Bianchi 恒等式中的复矢量曲率系数用(4.44)式表示, 并利用复矢量形式的场方程(4.47), 就得到引力场的复矢量形式. 显然, 复矢量的具体形式依赖于李代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 基底 λ_a 的选取. 选取不同的 λ_a , 就得到不同的复矢量表示. 因此, 这里给出的复矢量形式具有普遍的意义. 此外, 由于我们是从旋量空间 $\mathfrak{S}$ 出发的, 因而, 从给出的关系中很容易建立旋量和复矢量之间对应量的直接联系.

五、两种具体的复矢量形式

现在给出两种具体的复矢量形式. 它们分别为 Cahen-Debever-Defrise 复矢量^[4] 和 Brans 复矢量^[5].

1. CDD 复矢量

将 λ_a 取为

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

因此有

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_3, \quad [\lambda_1, \lambda_3] = 2\lambda_1, \quad [\lambda_2, \lambda_3] = -2\lambda_2, \quad (5.2)$$

$$(g_{a\bar{b}}) = -4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (g^{a\bar{b}}) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

于是可以得到

$$Z^1 = \frac{1}{2} \theta^{1\bar{2}} \wedge \theta^{1\bar{1}}, \quad Z^2 = \frac{1}{2} \theta^{2\bar{2}} \wedge \theta^{2\bar{1}}, \quad Z^3 = \frac{1}{4} (\theta^{2\bar{2}} \wedge \theta^{1\bar{1}} - \theta^{2\bar{1}} \wedge \theta^{1\bar{2}}), \quad (5.4)$$

$$\sigma^1 = \Gamma^1_2, \sigma^2 = -\Gamma^2_1, \sigma^3 = -\Gamma^1_1 = \Gamma^2_2, \quad (5.5)$$

$$\Sigma^1 = Q^1_2, \Sigma^2 = -Q^2_1, \Sigma^3 = -Q^1_1 = Q^2_2, \quad (5.6)$$

以及

$$(\sigma^a_{\bar{b}}) = \begin{pmatrix} 2\Gamma^1_1 & 0 & 2\Gamma^1_2 \\ 0 & -2\Gamma^1_1 & 2\Gamma^2_1 \\ \Gamma^2_1 & \Gamma^1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$(\Sigma^a_{\bar{b}}) = \begin{pmatrix} 2Q^1_1 & 0 & 2Q^1_2 \\ 0 & -2Q^1_1 & 2Q^2_1 \\ Q^2_1 & Q^1_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

显然, 这些公式给出了旋量空间 $\mathfrak{S}$ 和复矢量空间 $\mathfrak{U}^3$ 中相应量之间的直接关系.

取拟正交标架. 利用(3.6)式可以得到

$$\theta^{1\bar{1}} = \theta^0, \quad \theta^{2\bar{2}} = \theta^1, \quad \theta^{1\bar{2}} = \theta^2, \quad \theta^{2\bar{1}} = \theta^3, \quad (5.9)$$

$$\Gamma^1_1 = \frac{1}{2}(\omega_{10} - \omega_{32}), \quad \Gamma^1_2 = \omega_{13}, \quad \Gamma^2_1 = \omega_{02}, \quad (5.10)$$

$$Q^1_1 = \frac{1}{2}(\Omega_{10} - \Omega_{32}), \quad Q^1_2 = \Omega_{13}, \quad Q^2_1 = \Omega_{02}. \quad (5.11)$$

由此, 又可得到 $\mathfrak{S}^3$ 和 Lorentz 空间 $\mathfrak{S}$ 中相应量的关系:

$$Z^1 = \frac{1}{2}\theta^2 \wedge \theta^0, \quad Z^2 = \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^3, \quad Z^3 = \frac{1}{4}(\theta^1 \wedge \theta^0 - \theta^3 \wedge \theta^2), \quad (5.12)$$

$$(\sigma^a_\beta) = \begin{pmatrix} \omega_{10} - \omega_{32} & 0 & 2\omega_{13} \\ 0 & -(\omega_{10} - \omega_{32}) & 2\omega_{02} \\ \omega_{02} & \omega_{13} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$(\Sigma^a_\beta) = \begin{pmatrix} \Omega_{10} - \Omega_{32} & 0 & 2\Omega_{13} \\ 0 & -(\Omega_{10} - \Omega_{32}) & 2\Omega_{02} \\ \Omega_{02} & \Omega_{13} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

同时, 当拟正交标架经变换 $L^{-1} = (l^a_b) \in \mathcal{L}^\dagger$,

$$L^{-1} = (l^a_b) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & e^{-\alpha}\kappa\bar{\kappa} & e^{-\alpha}\bar{\kappa} & e^{-\alpha}\kappa \\ 0 & e^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta}\kappa & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta}\bar{\kappa} & 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ 为实}, \kappa \text{ 为复}) \quad (5.15)$$

时, 相应的么模变换和复正交变换分别为

$$\mathcal{A}^{-1} = (\alpha^A_B) = \pm \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}(\alpha-i\beta)} & e^{-\frac{1}{2}(\alpha-i\beta)}\kappa \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(\alpha-i\beta)} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$O^{-1} = (O^a_\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-(\alpha-i\beta)} & \kappa^2 e^{-(\alpha-i\beta)} & 2\kappa e^{-(\alpha-i\beta)} \\ 0 & e^{-(\alpha-i\beta)} & 0 \\ 0 & \kappa & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

$\beta = \kappa = 0, \alpha \neq 0$ 为类时旋转; $\alpha = \kappa = 0, \beta \neq 0$ 为类空旋转; $\alpha = \beta = 0, \kappa \neq 0$ 为类光旋转.

2. Brans 复矢量

将 λ_a 取为

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

因此有

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = -2i\lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ 取 } 1, 2, 3 \text{ 的循环}), \quad (5.19)$$

$$(g_{\alpha\beta}) = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g^{a\beta}) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

由一般公式可以得到

$$\begin{aligned} Z^1 &= \frac{1}{4} (\theta^1 \bar{\theta}^1 \wedge \theta^1 \bar{\theta}^1 - \theta^2 \bar{\theta}^2 \wedge \theta^2 \bar{\theta}^2), \\ Z^2 &= \frac{1}{4i} (\theta^1 \bar{\theta}^1 \wedge \theta^1 \bar{\theta}^1 + \theta^2 \bar{\theta}^2 \wedge \theta^2 \bar{\theta}^2), \\ Z^3 &= \frac{1}{4} (\theta^1 \bar{\theta}^1 \wedge \theta^2 \bar{\theta}^2 - \theta^1 \bar{\theta}^2 \wedge \theta^2 \bar{\theta}^1), \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\sigma^1 = \frac{1}{2} (\Gamma^1_2 + \Gamma^2_1), \sigma^2 = \frac{1}{2i} (\Gamma^1_2 - \Gamma^2_1), \sigma^3 = \Gamma^1_1 = -\Gamma^2_2, \quad (5.22)$$

$$\Sigma^1 = \frac{1}{2} (\Omega^1_2 + \Omega^2_1), \Sigma^2 = \frac{1}{2i} (\Omega^1_2 - \Omega^2_1), \Sigma^3 = \Omega^1_1 = -\Omega^2_2. \quad (5.23)$$

考虑伪正交标架, 由(3.5)式可得

$$\begin{aligned} \theta^1 \bar{\theta}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta^0 + \theta^3), \theta^2 \bar{\theta}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta^0 - \theta^3), \\ \theta^1 \bar{\theta}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta^1 + i\theta^2), \theta^2 \bar{\theta}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta^1 - i\theta^2). \end{aligned} \quad (5.24)$$

代入(5.21)式, 得到

$$Z^\alpha = \frac{1}{4} (\theta^\alpha \wedge \theta^0 + i\theta^\beta \wedge \theta^\gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ 取 } 1, 2, 3 \text{ 的循环}), \quad (5.25)$$

这就是 Brans^[5] 所取的复矢量标架, 容易得到 σ^α , Σ^α 与 ω_{ab} , Ω_{ab} 的关系, 这里就不一一给出了.

六、结 语

综上所述, 广义相对论的旋量形式和复矢量形式具有密切的内在联系. 从李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$ 着手, 可以由旋量形式构造普遍的复矢量形式, 并把二者统一起来. 显然, 这两种形式在本质上是完全等价的. 事实上, Cahen 等人讨论的是相应于协标架支量的一阶偏微分方程组, 这组方程可以直接化为相应于逆标架支量的 NP 方程. 不过, 从对称性的角度而言, 么模群 $SL(2C)$ 及其李代数 $\mathfrak{sl}(2C)$ 清晰地表现了引力场的内在性质.

作者感谢陆启铿、邹振隆、刘焜奋、陈建生等同志有益的讨论.

参 考 文 献

- [1] E. T. Newman, R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 566.
- [2] F. A. E. Pirani, *Introduction to Gravitational Radiation Theory* (1964), Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, Vol. **1**, 249.
- [3] 陆启铿, 旋量分析和引力辐射(1971), 尚未发表.
- [4] M. Cahen, R. Debever, L. Defrise, *J. Math. Mech.*, **16** (7) (1967), 761.
- [5] C. Brans, *J. Math. Phys.*, **12** (8) (1971), 1616.
- [6] M. Cahen, J. Leroy, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, **51** (1965), 9; **51** (1965), 10; **51** (1966), 11. M. Cahen, J. Leroy, *J. Math. Mech.*, **16** (6) (1966), 501.
- [7] J. G        , R. Debever, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, **42** (1956), 114, 252, 313, 608.
- [8] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces* (1962).
- [9] 陆启铿、刘焜奋、邹振隆、郭汉英, 物理学报, **23** (1974), 95.

THE SPINOR FORMALISM AND THE COMPLEX-VECTOR FORMALISM OF GENERAL RELATIVITY

KUO HAN-YING WU YUNG-SHIH LEE KEN-DAU

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, using E. Cartan's exterior calculus, we give the spinor form of the structure equations, which leads naturally to the Newman-Penrose equations. Further, starting from the spinor space and the $\text{sl}(2\mathbb{C})$ algebra, we construct the general complex-vector formalism of general relativity. We find that both the Cahen-Debever-Defrise complex-vector formalism and the Brans one are its special cases. Thus, the spinor formalism and the complex-vector formalism of general relativity are unified on the basis of the unimodular group $SL(2\mathbb{C})$ and its Lie algebra.