第 24 卷 第 1 期 物 理 学 报 Vol. 24, No. 1
1975 年 1 月 ACTA PHYSICA SINICA Jan., 1975

椭球分布星系不可能稳定*

韩 念 国
(中国科学院北京天文台)

提 要

本文求出了星系动力学基本方程的一个修正的通解．用这个通解我们证明了不存在具有自转且又满足椭球分布律的稳定星系，并证明了某种准稳星系一定具有旋涡结构．

星系动力学的基本方程在柱面坐标系中具有下述形式[1]：

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+v_r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{v_\theta^2}{r}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial v_r}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\frac{v_rv_\theta}{r}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial v_\theta}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial v_z}=0, \tag{1}$$

其中 Ψ 是分布函数，Φ 为引力势，$v_r=\dot r$, $v_\theta=r\dot\theta$, $v_z=\dot z$．我们还采用下列符号：

$$\alpha=2h^2v_{r_0}+mv_{\theta_0}+nv_{z_0} \tag{2}$$

$$\beta=mv_{r_0}+2k^2v_{\theta_0}+pv_{z_0}, \tag{3}$$

$$\gamma=nv_{r_0}+pv_{\theta_0}+2l^2v_{z_0}, \tag{4}$$

$$\delta=h^2v_{r_0}^2+k^2v_{\theta_0}^2+l^2v_{z_0}^2+mv_{r_0}v_{\theta_0}+nv_{r_0}v_{z_0}+pv_{\theta_0}v_{z_0}, \tag{5}$$

$$H=-(\sigma+\delta), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}T=&\ h^2(v_r-v_{r_0})^2+k^2(v_\theta-v_{\theta_0})^2+l^2(v_z-v_{z_0})^2\\&+m(v_r-v_{r_0})(v_\theta-v_{\theta_0})+n(v_r-v_{r_0})(v_z-v_{z_0})\\&+p(v_\theta-v_{\theta_0})(v_z-v_{z_0}).\end{aligned} \tag{7}$$

上述各式中 v_{r_0}, v_{θ_0}, v_{z_0} 是局部形心速度分量．h^2, k^2, l^2, m, n, p, α, β, γ, H, Φ 都是 (r, θ, z, t) 的函数，称为星系的力学参量，简称参量．δ 由(5)式定义，σ 由(6)式定义．数学上，假定参量可以展开为能进行分析运算的傅里叶级数，例如：

$$\begin{aligned}&h^2=h_0+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(h_n\sin n\theta+h'_n\cos n\theta),\\&\cdots\cdots\\&\Phi=\Phi_0+\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\sin n\theta+\Phi'_n\cos n\theta).\end{aligned} \tag{8}$$

这里的 n 是自然数，从上下文看将不会与参量 n 混淆，h_0, h_n, h'_n 等只是 (r, z, t) 的函数．

我们的基本假设是：星系中成立史瓦西(Schwarzschild)速度椭球分布律，即分布函数具有下述形式[1]：

$$\Psi=e^{-(T+\sigma)}. \tag{9}$$

* 1973 年 11 月 14 日收到．

将(9)式代入(1)式后左边得到一个 v_r, v_θ, v_z 的多项式,使其各项系数为零,就得到下列方程[4]:

$$\frac{\partial h^2}{\partial r} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial h^2}{\partial \theta} + \frac{\partial m}{\partial r} - \frac{m}{r} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial r} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial m}{\partial \theta} + 2\frac{h^2 - k^2}{r} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial \theta} + m = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{n}{r} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial l^2}{\partial r} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial l^2}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial l^2}{\partial z} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{p}{r} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial l^2}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\beta}{r}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 2h^2\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{m}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + n\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{26}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta}{\partial t} = m\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{2k^2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} = n\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{p}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + 2l^2\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \gamma\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{29}$$

把傅里叶级数(8)式代入方程(10)—(25),可以得到这 16 个方程的通解如下[4]:

$$
\begin{aligned}
h^2 &= d_1 + c_1 z + \bar{c}_2 z^2 + (a_1 + a_2 z + \bar{a}_3 z^2)\sin 2\theta + (a_4 + a_5 z + \bar{a}_6 z^2)\cos 2\theta,\\
k^2 &= d_1 + c_1 z + \bar{c}_2 z^2 - (a_9 + \bar{a}_{10} z) r\sin\theta + (a_7 + \bar{a}_8 z) r\cos\theta\\
&\quad - (a_1 + a_2 z + \bar{a}_3 z^2)\sin 2\theta - (a_4 + a_5 z + \bar{a}_6 z^2)\cos 2\theta,\\
l^2 &= d_2 + \bar{c}_2 r^2 - a_{12} r\sin\theta - a_{14} r\cos\theta + \bar{a}_3 r^2 \sin 2\theta + \bar{a}_6 r^2\cos 2\theta,\\
m &= (a_7 + \bar{a}_8 z) r\sin\theta + (a_9 + \bar{a}_{10} z) r\cos\theta - 2(a_4 + a_5 z + \bar{a}_6 z^2)\sin 2\theta\\
&\quad + 2(a_1 + a_2 z + \bar{a}_3 z^2)\cos 2\theta,\\
n &= -c_1 r - 2\bar{c}_2 r z + (a_{11} + a_{12} z)\sin\theta + (a_{13} + a_{14} z)\cos\theta\\
&\quad - (a_2 + 2\bar{a}_3 z) r\sin 2\theta - (a_5 + 2\bar{a}_6 z) r\cos 2\theta,\\
p &= b_2 r - (a_{13} + a_{14} z + \bar{a}_8 r^2)\sin\theta + (a_{11} + a_{12} z - \bar{a}_{10} r^2)\cos\theta\\
&\quad + (a_5 + 2\bar{a}_6 z) r\sin 2\theta - (a_2 + 2\bar{a}_3 z) r\cos 2\theta,\\
\alpha &= \dot{b}_1 r + \dot{c}_1 r z + (a_{15} + \dot{a}_{16} z + \dot{a}_{12} z^2)\sin\theta + (a_{17} + a_{18} z + \dot{a}_{14} z^2)\cos\theta\\
&\quad + (\dot{a}_1 + \dot{a}_2 z) r\sin 2\theta + (\dot{a}_4 + \dot{a}_5 z) r\cos 2\theta,\\
\beta &= b_3 r + \dot{b}_2 r z - (a_{17} + a_{18} z + \dot{a}_{14} z^2 - \dot{a}_7 r^2)\sin\theta + (a_{15} + a_{16} z\\
&\quad + \dot{a}_{12} z^2 + \dot{a}_9 r^2)\cos\theta - (\dot{a}_4 + \dot{a}_5 z) r\sin 2\theta + (\dot{a}_1 + \dot{a}_3 z) r\cos 2\theta,\\
\gamma &= d_3 + \dot{d}_2 z - \dot{c}_1 r^2 + (\dot{a}_{11} - \dot{a}_{12} z - a_{16}) r\sin\theta + (\dot{a}_{13} - \dot{a}_{14} z - a_{18}) r\cos\theta\\
&\quad - \dot{a}_2 r^2 \sin 2\theta - \dot{a}_5 r^2 \cos 2\theta.
\end{aligned}
$$

其中 a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_9, a_{11}—a_{18}, b_2, b_3, c_1, d_1, d_2, d_3 共有 20 个时间的任意函数; $\bar{a}_3$, $\bar{a}_6$, $\bar{a}_8$, $\bar{a}_{10}$, $\bar{b}_1$, $\bar{c}_2$ 共有 6 个积分常数. 这与张德拉塞卡(Chandrasekhar)在直角坐标中的结果是一致的[2].

为了保证 $r = 0$ 时 Ψ 是单值的,上述通解还应修正. 在直线 $r = 0$ 上$(T + \sigma)$与 θ 无关. 首先取 $v_r = v_\theta = v_z = 0$, 得到 $\delta + \sigma$ 与 θ 无关. 其次取 $v_\theta = v_z = 0$,得到 h^2, α 与 θ 无关. 最后取 $v_\theta = 0$, 得到 l^2, n, γ 也与 θ 无关. 因此, 通解公式中的 a_1—a_6, a_{11}—a_{18} 都应为零. 这样,修正后的通解公式如下[4]:

$$h^2 = d_1 + c_1 z + \bar{c}_2 z^2, \tag{30}$$

$$k^2 = d_1 + c_1 z + \bar{c}_2 z^2 + \bar{b}_1 r^2 - (a_9 + \bar{a}_{10} z) r\sin\theta + (a_7 + \bar{a}_8 z) r\cos\theta, \tag{31}$$

$$l^2 = d_2 + \bar{c}_2 r^2, \tag{32}$$

$$m = (a_7 + \bar{a}_8 z) r\sin\theta + (a_9 + \bar{a}_{10} z) r\cos\theta, \tag{33}$$

$$n = -c_1 r - 2 c_2 r z, \tag{34}$$

$$p = b_2 r - \bar{a}_8 r^2 \sin\theta - \bar{a}_{10} r^2 \cos\theta, \tag{35}$$

$$\alpha = \dot{d}_1 r + \dot{c}_1 r z, \tag{36}$$

$$\beta = b_3 r + \dot{b}_2 r z + \dot{a}_7 r^2 \sin\theta + \dot{a}_9 r^2 \cos\theta, \tag{37}$$

$$\gamma = d_3 + \dot{d}_2 z - \dot{c}_1 r^2. \tag{38}$$

如果采用下列记号:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2h^2 & m & n \\ m & 2k^2 & p \\ n & p & 2l^2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_r = \begin{vmatrix} \alpha & m & n \\ \beta & 2k^2 & p \\ \gamma & p & 2l^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_\theta = \begin{vmatrix} 2h^2 & \alpha & n \\ m & \beta & p \\ n & \gamma & 2l^2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2h^2 & m & \alpha \\ m & 2k^2 & \beta \\ n & p & \gamma \end{vmatrix}, \tag{39}$$

那么由(2)—(4)式可得

$$v_{r_0} = \frac{\Delta_r}{\Delta}, \quad v_{\theta_0} = \frac{\Delta_\theta}{\Delta}, \quad v_{z_0} = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{40}$$

积分(9)式可得密度函数如下：

$$D = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Psi dv_r dv_\theta dv_z = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\Delta}} e^{-\sigma}. \tag{41}$$

至此，星系的力学参量只剩下Φ和H(或σ)要加以研究，以后我们的主要工具是修正的通解(30)—(38)式，(26)—(29)式，以及下面的泊松方程[1]：

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -4\pi G\rho, \tag{42}$$

其中G为引力常数，ρ为物质密度，有时我们近似地认为

$$\rho_* = m \cdot D, \tag{43}$$

其中m为恒星的平均质量.

下面讨论一些简单的应用.

一、轴对称星系

如果一个星系的力学参量都与θ无关，我们就称其为轴对称星系. 轴对称星系的通解公式化为

$$\begin{aligned} &h^2 = d_1 + c_1 z + \bar{c}_2 z^2, \quad k^2 = h^2 + \bar{b}_1 r^2, \quad l^2 = d_2 + \bar{c}_2 r^2, \\ &m = 0, \qquad n = -c_1 r - 2\bar{c}_2 rz, \qquad p = 0, \\ &\alpha = \dot{d}_1 r + \dot{c}_1 rz, \qquad \beta = \bar{b}_3 r, \qquad \gamma = d_3 + \dot{d}_2 z - \dot{c}_1 r^2. \end{aligned} \tag{44}$$

在轴对称星系中可以求出H和Φ的通解，而且可以得到许多古典结果[4]. 这里仅举林得布莱得(Lindblad)公式作为例子[1].

定理　在椭球分布的轴对称星系中，下述公式成立：

$$\frac{B}{B-A} = \frac{h^2}{k^2}.$$

证明　星系自转常数的定义是 $A = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{\theta_0}}{r} - \frac{dv_{\theta_0}}{dr}\right)$, $B = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_{\theta_0}}{r} + \frac{dv_{\theta_0}}{dr}\right)$. 所以，$B - A = -\frac{v_{\theta_0}}{r} = -\frac{\bar{b}_3}{2k^2}$, $B = -\frac{1}{2}\frac{\bar{b}_3 h^2}{k^4}$. 由此得出 $\frac{B}{B-A} = \frac{h^2}{k^2}$.

因为在我们的理论中引力起着决定性的作用，所以下述结果是很自然的，但因它的证明较长，这里从略[4].

定理　如果一个椭球分布星系的Φ与θ无关，那么它一定是轴对称的.

二、稳定星系

如果一个星系的参量都与t无关，我们称其为稳定星系. 用上面的结果可以简单地

证明稳定星系的张德拉塞卡定理[2].

定理　满足椭球分布律且又具有自转的有限稳定星系的参量 Φ 与 θ 无关.

证明　在稳定星系中,由(36)式,(37)式和(38)式推出 $\alpha=0,\ \beta=b_3r,\ \gamma=d_3$. 方程(29)化为

$$b_3\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+d_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0.$$

由此得到

$$d_3\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&d_3\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}+nb_3\Phi'_n=0,\\&d_3\frac{\partial\Phi'_n}{\partial z}-nb_3\Phi_n=0.\end{aligned}\right\}\quad(n=1,2,\cdots)$$

若 $d_3\neq 0$, 则 $\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}=0$, 而且

$$\Phi_n=A_n\cos\frac{nb_3}{d_3}z+B_n\sin\frac{nb_3}{d_3}z,$$

$$\Phi'_n=A'_n\cos\frac{nb_3}{d_3}z+B'_n\sin\frac{nb_3}{d_3}z.$$

当 z 改变 $\frac{d_3}{b_3}2\pi$ 时, Φ 保持不变. 这与星系的有限性矛盾! 所以, $d_3=0$.

因为星系具有自转,即 $v_{\theta_0}\neq 0$, 由(40)式得到 $\Delta_\theta\neq 0$,再由(39)式得到 $b_3\neq 0$. 因此, $\Phi_n=\Phi'_n=0(n=1,2,\cdots)$. 所以, $\Phi=\Phi_0(r,z)$.

根据上述定理,应用张德拉塞卡的论证方法,可以得到一个有演化意义的结果. 它说明一个星系不能静止不动,而必然有其产生、发展和灭亡的过程.

定理　不存在满足椭球分布律且又具有自转的稳定星系.

证明　在上述定理推导过程中除默认坐标系是惯性系外并没有其它的限制. 现在我们假设存在一个满足椭球分布律且又具有自转的稳定星系. 任取两个相对静止的惯性系,由上述定理,在这两个坐标系看来这个星系都是轴对称的. 这样, 引力势 Φ 对于任何直线 (z 轴) 都具有对称性, Φ 只能是常数. 由方程(42)得到 $\rho=0$. 这个矛盾就证明了我们的命题.

可以证明稳定星系的通解公式具有下述形式[4]:

$$\begin{aligned}&h^2=d_1+c_2z^2,\quad k^2=h^2+b_1r^2,\quad l^2=d_2+c_2r^2,\\&m=0,\qquad n=-2c_2rz,\quad p=0,\\&\alpha=0,\qquad \beta=b_3r,\qquad \gamma=0.\end{aligned}\tag{45}$$

三、旋涡星系

我们将证明某些准稳星系一定具有旋涡结构, 从而说明我们的理论与林家翘的理论之间有一定的联系. 由通解(45)式的启发,考查下列形式的准稳星系:

$$h^2=d_1+\bar c_2z^2,\quad k^2=h^2+\bar b_1r^2,\quad l^2=d_2+\bar c_2r^2,$$

$$
\begin{aligned}
&m = 0, \quad n = -2\bar{c}_2 r z, \quad p = 0, \\
&\alpha = \dot{d}_1 r, \quad \beta = b_3 r, \quad \gamma = \dot{d}_2 z.
\end{aligned} \tag{46}
$$

计算表明，可能出现两种情况：

I. $\bar{c}_2 \neq 0$，这种情况是轴对称星系；

II. $\bar{c}_2 = 0$，又可细分为两种情形：

1. $d_1 \neq d_2$. 这种情形下 Φ 与 z 无系，与星系的有限性矛盾；

2. $d_1 = d_2$. 一部分球状次系的三个速度弥散度大致相等[1]. 为计算简单，只讨论下面的例子：

$$
\begin{aligned}
&h^2 = k^2 = l^2 = d_1, \quad m = n = p = 0, \\
&\alpha = \dot{d}_1 r, \quad \beta = \bar{b}_3 r, \quad \gamma = \dot{d}_1 z.
\end{aligned} \tag{47}
$$

将(8)式代入(27)式，得到

$$
\begin{aligned}
H_n &= 2d_1 \Phi_n, \\
H'_n &= 2d_1 \Phi'_n.
\end{aligned} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{48}
$$

上式也满足(26)式和(28)式. 把(8)式和(48)式代入(29)式，得到

$$
\begin{aligned}
&2\dot{d}_1 \Phi_n + 2d_1 \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \dot{d}_1 r \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \dot{d}_1 z \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} - n\bar{b}_3 \Phi'_n = 0, \\
&2\dot{d}_1 \Phi'_n + 2d_1 \frac{\partial \Phi'_n}{\partial t} + \dot{d}_1 r \frac{\partial \Phi'_n}{\partial r} + \dot{d}_1 z \frac{\partial \Phi'_n}{\partial z} + n\bar{b}_3 \Phi_n = 0.
\end{aligned} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{49}
$$

引入辅助函数：

$$
\begin{aligned}
\varphi_n &= d_1 \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_n'^2}, \\
\psi_n &= \operatorname{arc\ tg} \frac{\Phi'_n}{\Phi_n}.
\end{aligned} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{50}
$$

从(49)式的第一式乘以 Φ_n 加上第二式乘以 Φ'_n 可以求出 φ_n，第二式乘以 Φ_n 减去第一式乘以 Φ'_n 可以求出 φ_n. 即

$$
\begin{aligned}
\varphi_n &= \varphi_n\left(\frac{r^2}{d_1}, \frac{z^2}{d_1}\right), \\
\operatorname{tg}\psi_n &= \operatorname{tg}(B_n - C_n).
\end{aligned} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{51}
$$

其中

$$
B_n = B_n\left(\frac{r^2}{d_1}, \frac{z^2}{d_1}\right), \quad C_n = \frac{n\bar{b}_3}{2} \int \frac{dt}{d_1(t)}.
$$

由(50)和(51)式得到

$$
\begin{aligned}
\Phi_n &= \frac{\varphi_0}{d_1} \cos(B_n - C_n), \\
\Phi'_n &= \frac{\varphi_n}{d_1} \sin(B_n - C_n).
\end{aligned} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{52}
$$

最后得到

$$
\Phi_n \sin n\theta + \Phi'_n \cos n\theta = \frac{\varphi_n}{d_1} \sin(n\theta + B_n - C_n), \tag{53}
$$

$$
\Phi = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{d_1} \sin(n\theta + B_n - C_n). \tag{54}
$$

如果 d_1 变化缓慢以致近似为常数，那么 $C_n = \frac{n\bar{b}_3}{2d_1}t$. 取 $\omega_n = \frac{nd_3}{2d_1}$, 就有 $C_n = \omega_n t$. 再简化一步，只研究平面情况，那么(54)式中的第 n 项化为

$$\frac{\varphi_n(r^2/d_1)}{d_1}\sin\left(n\theta - \omega_n t + B_n\left(\frac{r^2}{d_1}\right)\right).$$

上式与林家翘的公式

$$A(r)\exp\{i[\omega t - n\theta + \Phi(r)]\}$$

是一致的[3].

参 考 文 献

[1] 戴文赛，"恒星天文学"，科学出版社(1965).
[2] S. Chandrasekhar, Principles of Stellar Dynamics (1942).
[3] C. C. Lin, Theory of Spiral Structure (1970), 载于 Hong-Yee Chiu 与 A. Muriel 合编的 Galactic Astronomy, Vol. 2 一书中.
[4] 韩念国，星系动力学基本方程组在柱面坐标系中的通解，天文学报(待发表).