

核子电磁形状因子的渐近行为 与 Callan-Symanzik 方程*

安 瑛 吴詠时 戴元本
(中国科学院物理研究所)

提 要

本文论证了对赝标介子与核子耦合的理论, 齐次 Callan-Symanzik 方程可用来得到电磁形状因子的渐近行为。由此得到这个理论中核子电磁形状因子的微扰论领头项, 并讨论了较一般的情形。

—

核子电磁形状因子多年来一直是实验和理论研究的一个课题。对 Sachs 磁形状因子 $G_M(q^2)$, 实验给出 $G_M(q^2) \sim 1/(q^2)^2$ 的规律。电磁形状因子随动量传递 q^2 而很快地减小, 这在复合粒子的模型中得到一定的解释^[1]。在点模型的场论中, Appelquist 和 Primack^[2] 曾经用一种迭代方法把赝标耦合理论的微扰论各阶中含 $\ln q^2$ 阶次最高的领头项加起来。还有一些作者讨论过矢量耦合理论的电磁形状因子^[3]。最近, Callan 和 Symanzik^[4] 从理论的可重正化性出发, 提出了一个方程。这个方程通常用于研究顶角函数在标度变换 $p_i \rightarrow \lambda p_i$ 下的渐近行为, 这时粒子的动量 p_i 远离质壳。本文证明它可用于质壳形状因子。

二

我们考虑一个 π 介子与核子的赝标耦合模型, 强相互作用拉氏函数为

$$\begin{aligned} L_{\text{int}} = & -ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi + h(\bar{\psi}\psi)^2 - i(Z_1 - 1)\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi \\ & + (Z_4 - 1)h(\bar{\psi}\psi)^2 + \delta m Z_2 \bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}\delta\mu^2 Z_3 \bar{\psi}\psi - (Z_2 - 1)\bar{\psi}(\hat{\partial} + m)\psi \\ & - \frac{1}{2}(Z_3 - 1)(\partial_\mu\bar{\psi}\partial_\mu\psi + \mu^2\bar{\psi}\psi). \end{aligned} \quad (1)$$

到电磁作用的最低阶, 质子在质壳 m 上的重整化的电磁顶角为

$$\Gamma_\mu(q, m, \mu; g, h) = \Gamma_{\mu 0}(q, m, \mu, \Lambda; g_0, h_0) Z_2 \left(g, h; \frac{m^2}{\mu^2}, \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right), \quad (2)$$

其中 $\Gamma_{\mu 0}$ 为未进行耦合常数重整化、但已进行质量重整化的正规化顶角, Λ 为切断常数,

* 1974年2月5日收到。

g_0, h_0 为未重整化的耦合常数. 固定 g_0, h_0, q 和 Λ , 对上式取导数 $m\partial/\partial m + \mu\partial/\partial\mu$, 就得到 Callan-Symanzik 方程

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_h \frac{\partial}{\partial h} - 2\gamma \right] \Gamma_\mu = \Delta \Gamma_\mu, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_g &= g \left(m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \ln (Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2}), \quad \beta_h = h \left(m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \ln (Z_4^{-1} Z_3), \\ \gamma &= \left(m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \ln Z_2^{1/2}, \quad \Delta \Gamma_\mu = Z_2 \left(m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \Gamma_{\mu 0}. \end{aligned} \quad (4)$$

令 $q = \lambda q_0$, 由量纲分析,

$$\frac{\partial}{\partial m} \Gamma_{\mu 0}(q, m, \mu, \Lambda; g_0, h_0) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial (\lambda^{-1} m)} \Gamma_{\mu 0}(q_0, \lambda^{-1} m, \lambda^{-1} \mu, \lambda^{-1} \Lambda; g_0, h_0). \quad (5)$$

在微扰论各阶中, Λ 在上式右边仅以 $\ln(\lambda^{-2} \Lambda^2/q_0^2)$ 的形式出现. 因此, 如果 $\Gamma_{\mu 0}(q_0, m, \mu, \Lambda; g_0, h_0)$ 在 $m, \mu \rightarrow 0$ 时没有 $\ln m^2, \ln \mu^2$ 或更强的奇异, 则由(4)和(5)式, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\Delta \Gamma_\mu$ 在微扰论的各阶中为 $O(\lambda^{-1})$, 与 Γ_μ 比较可以忽略.

当有些外线粒子在质壳上时, 未重整化顶角在质量趋于零时一般是可能有对数发散的. 对于赝标耦合理论, Appelquist 和 Primack 曾经论证^[2], 当介子质量 $\mu \rightarrow 0$ 时没有通常的红外发散. 我们指出, 相似的论证可以用来说明: 在赝标耦合理论中, m 和 μ 同时趋于零时, 未重整化的电磁顶角也是有限的. 如果在一个费曼图形中加进一根介子内线, 同时在图形中也增加了两根核子内线. 通常的 $\mu \rightarrow 0$ 时的红外发散发生在此介子线的动量 $k \rightarrow 0$, 而与之相联的核子线 p_1, p_2 在质壳附近时. 在 $p_1^2 \approx p_2^2 \approx -m^2$ 附近, 加进一根介子线后的振幅具有如下的形式:

$$\int d^4 k (\dots) \frac{1}{k^2 + \mu^2} \cdot \frac{\hat{k} \gamma_5}{2p_1 \cdot k + k^2} (\dots) \frac{\gamma \hat{k}}{2p_2 \cdot k + k^2} (\dots).$$

上式中略去的因子在 $k \rightarrow 0$ 时就是原来的振幅. 不难看出, 上式中的积分, 即使在 m 和 μ 同时趋于零时, 在 $k = 0$ 附近也是收敛的. 在下节中我们将用具体图形的微扰论表达式来验证这一结论.

图形内部的 φ^4 顶点也不会引起发散, 这可以由 Kinoshita 的工作^[5]看出来.

上面的讨论不适用于核子内线和介子内线的自能插入图. 根据文献 [5] 中的一般结论, 在进行质量重整化以后, $m, \mu \rightarrow 0$ 时, 核子内线只出现 $i\beta_1 \ln(p_1^2/\Lambda^2)$, 介子内线只出现 $k^2 \ln(k^2/\Lambda^2)$ 型的奇异因子. 这些因子不影响对内线动量积分的收敛性.

容易看到, 本节中的讨论可以推广到其它一些过程, 例如核子的高能大角度散射 ($s \rightarrow \infty, s/t = \text{常数}$).

三

Nakanishi^[6] 给出相应于任意费曼图的微扰论振幅的费曼参数公式. (参阅文献[2]的附录 A, 我们采用了那里的有关记号, 但是度规不同.) 它把振幅表示为一些项的和. 在

我们所讨论的情形下, 即 $m = \mu = 0$ 的赝标耦合理论中核子的电磁顶角, 典型的一项 (“纯 Y 项”) 为

$$M_0 = \frac{(-i)^N}{(-16\pi^2 i)^n} (N - 2n - 1)! \int_0^\infty dx_1 \cdots dx_N \delta\left(1 - \sum_i x_i\right) \frac{\prod_i (-i) \gamma \cdot Y_i \Gamma_i}{U^2 (q^2 W^2 / U)^{N-2n}}, \quad (6)$$

其中 n 为独立的闭合圈数, N 为内线数, x_i 为相应内线的费曼参数, Y_i 仅相应于核子内线, Γ_i 为该内线出发的顶角 ($g\gamma_5 \boldsymbol{\tau}$ 或 $-e\gamma_\mu$). 其它项可由上式得到, 例如含 α 个因子 X_{ik} 的项, 当 $N - 2n - \alpha > 0$ 时, 可由上式把 $(N - 2n - 1)! / (q^2 W^2 / U)^{N-2n}$ 换为 $(N - 2n - \alpha - 1)! / 2^\alpha (q^2 W^2 / U)^{N-2n-\alpha}$, 同时把 α 对 $(Y_i)_\mu (Y_k)_\nu$ 换为 $X_{ik} \delta_{\mu\nu}$ 而得到. U , X_{ik} 及 W^2 是内线费曼参数 x_i 的函数, Y_i 是 x_i 和外线动量 p, p' 的函数, 由费曼图得到它们的规则, 详见文献[2]的附录 A.

首先用这些公式研究图 1 中有顶角插入的图形. 依规则^[2],

$$U = (x_1 + x_2 + z_2)(x_3 + x_4 + z_1) + x_2(x_1 + z_2). \quad (7)$$

依规则^[2], W^2 可由图 2 得到

$$W^2 = x_4[z_2(x_2 + x_3) + x_3(x_1 + x_2)]. \quad (8)$$

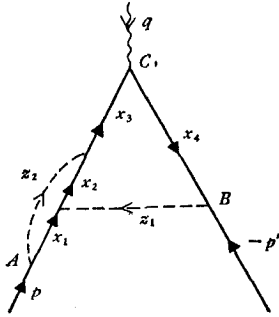


图 1

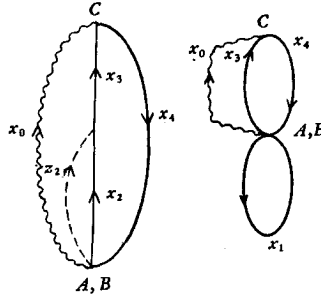


图 2

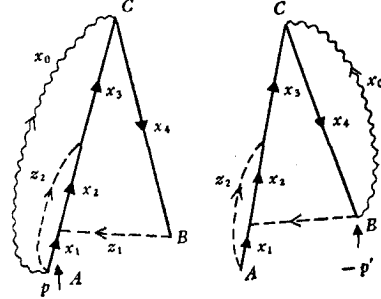


图 3

依规则^[2], Y_i 可由图 3 得到

$$\begin{aligned} UY_1 &= -p[z_2(x_4 + z_1) + z_2(x_2 + x_3) + x_2x_3] - p'x_2x_4, \\ UY_2 &= p[-z_2(x_4 + z_1) + x_1x_3] + p'[x_4(x_1 + z_2)], \\ UY_3 &= -p[z_2(x_4 + z_1) + x_1(x_2 + x_4 + z_1) + x_2(x_4 + z_1)] \\ &\quad + p'[x_4(x_1 + z_2 + x_2)], \\ UY_4 &= p[z_2(x_2 + x_3) + x_3(x_1 + x_2)] \\ &\quad - p'[(x_1 + x_2 + z_2)(x_3 + z_1) + x_2(x_1 + z_2)]. \end{aligned} \quad (9)$$

又由文献[2]中的规则可得

$$\begin{aligned} UX_{12} &= x_3 + x_4 + z_1, UX_{13} = -x_2, UX_{14} = -x_2, \\ UX_{23} &= x_1 + z_2, UX_{24} = x_1 + z_2, UX_{34} = x_1 + x_2 + z_2. \end{aligned} \quad (10)$$

由(6)式, 顶角函数 Γ_μ 中的纯 Y 项为

$$\frac{g^4}{(16\pi^2)^2} \int_0^\infty dx_1 \cdots dx_4 dz_1 dz_2 \delta(1 - \sum x_i - \sum z_i) \frac{1}{(q^2 W^2)^2} \gamma \cdot Y_4 \gamma_\mu \gamma \cdot Y_3 \gamma \cdot Y_2 \gamma \cdot Y_1. \quad (11)$$

W^2 有下列一阶零点:

(i) $x_4 = 0$, (ii) $z_2 = x_3 = 0$, (iii) $x_2 = x_3 = 0$, (iv) $z_2 = x_1 = x_2 = 0$.

在奇点 (i) $x_4 = 0$ 处, (11) 式的分母有二阶零点. 由 $i\hat{p}u(p) = 0$ 及 $p'^2 = 0$, 在 UY_1 和 UY_3 中只有 p' 项有贡献, 故由 (9) 式, (11) 式的分子在 $x_4 = 0$ 处有二阶零点. 因此, 积分是收敛的. 含一个 X_{ij} , 例如 X_{12} 的项的贡献为

$$2 \frac{g^4}{(16\pi^2)^2} \int_0^\infty dx_1 \cdots dx_4 dz_1 dz_2 \delta(1 - \sum x_i - \sum z_i) \frac{1}{U^4 q^2 W^{q^2}} \gamma \cdot UY_4 \gamma_\mu \gamma \cdot UY_3 UX_{12}. \quad (12)$$

在 $x_4 = 0$ 处, 上式分母有一阶零点, 分子 UY_3 亦有一阶零点, 故积分也收敛. 相似地可以证明在 $z_2 = x_3 = 0$ 或 $x_2 = x_3 = 0$ 处积分是收敛的. $z_2 = x_1 = x_2 = 0$ 是原图的一个闭合圈的参数为零, 由构成 U 和 UY_i 的规则可知: 它也是 U 和 UY_i 的零点. (12) 式在此点对数式发散. 然而, 这是一个紫外发散, 它被正规化项所抵消: 在考虑正规化项后, (12) 式中的因子 $1/(q^2 W^{q^2})$ 为

$$\frac{1}{q^2 W^{q^2}} - \frac{1}{q^2 W^{q^2} + U z_2 \Lambda^2} \quad (13)$$

所代替, 上式中两项相消的结果使积分成为收敛的. 容易看出, 在两个奇异重迭的区域 (例如 $x_1 = x_2 = x_3 = z_2 = 0$), 图 1 的振幅也不发散.

我们还考虑了核子和介子的最低阶自能插入图, 所有这些四阶图在 $m = \mu = 0$ 时都是有限的.

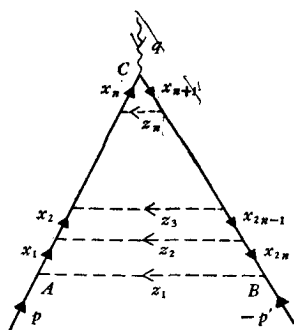


图 4

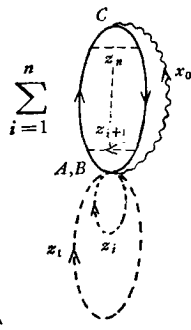


图 5

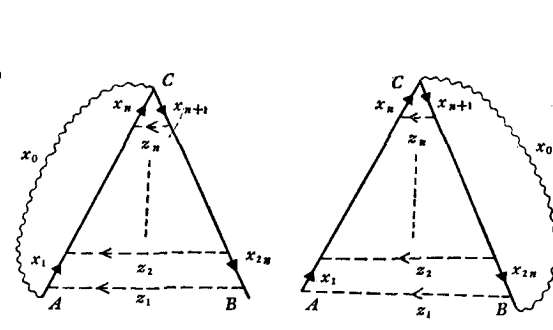


图 6

现在考虑如图 4 的梯形图. 它的 W^{q^2} 和 Y_i 分别由图 5 和图 6 得到. Γ_μ 的纯 Y 项为

$$(-1)^n (n-1)! \frac{g^{2n}}{(16\pi^2)^n} \int_0^\infty \prod dx_i \prod dz_i \delta(1 - \sum x_i - \sum z_i) \times \frac{\prod_{i=n+1}^{2n} \gamma \cdot UY_i \gamma_\mu \prod_{i=1}^n \gamma \cdot UY_i}{U^{n+2} (q^2 W^{q^2})^n}, \quad (14)$$

W^{q^2} 的零点有两类:

(i) 原图 4 的一个闭合圈的参数为零, 它也是 U , UY_i 和部分 UX_{ij} [此圈不属于 $C(i, i)$] 的零点. 这种奇点引起的发散是紫外发散, 和前面的情况一样, 它被正规化项所抵消 (实际上只有振幅的 X_{12} 项在 $x_n = y_n = z_n = 0$ 处有对数发散).

(ii) 由 A (或 B) 到 C 的一条路径上的参数为零, 其中最短 (含内线数最少) 的路径为

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad (15')$$

或

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2n} = 0; \quad (15'')$$

次短的路径为

$$x_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, m), \quad x_m = 0, \quad y_j = 0 \quad (j = m+1, \cdots, n) \quad (16)$$

(其中 $m = 2, \cdots, n$) 以及将上式中 $y \leftrightarrow x$ 的情形.

(15') 式也是 $UY_i (i > n)$ 的 p 项 UY_i^{qp} 的零点. (15'') 式是 $UY_i (i \leq n)$ 的 p' 项 $UY_i^{q'p'}$ 的零点. (16) 式是 $UY_i^{qp} (n < i \leq 2n - m)$ 的零点.

由 $-ip'u(p') = 0$ 及 $p^2 = 0$, 对 $i = 2n, 2n-2, \cdots, n+2$ (或 $n+1$), UY_i 中只有 p 项有贡献. 由此得到(14)式中的分子在点(15')处至少有 $n/2$ (或 $(n+1)/2$) 阶零点, 因此积分是收敛的.

现在考虑含 α 个 X_{ij} 的项, 与(14)式比较, 分母的零点减少 α 阶, 而分子的零点最多减少 α 阶 (少了 2α 个 Y_i 因子), 所以积分也是收敛的.

相似地可以证明, 对(16)式和其它更长的路径的情况, 积分更是收敛的. 此外还可以证明, 奇异的重迭不引起发散.

现在考虑广义梯形图(介子线有交叉). 它也有如梯形图的 (i), (ii) 两类奇点, 对这些奇点的讨论是类似的, 而一点区别是现在可以有一条由 A (或 B) 到 C 的路径包含内线数 $< n$. 考虑一个最不利的情况如图 7. 它的 W^{q^2} 和 UY_i 由图 8 和图 9 给出. 最短的路径为 $x_n = z_n = 0$, 它是 W^{q^2} 的零点, 但同时也是除 $i = n$ 外的其它 $UY_i^{q'p'}$ 的零点. 因此, (14) 式中分子至少有 $(n-1)$ 阶零点, 故积分是收敛的. 容易看出, 对其它情况积分更是收敛的.

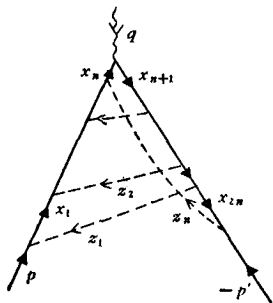


图 7

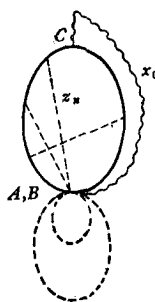


图 8

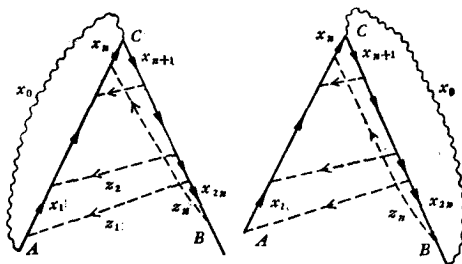


图 9

广义梯形图还有另一类奇点, 以图 10 中的四阶图为例. 在 $x_2 = x_3 = 0$ 处 W^{q^2} 有一阶零点, 但 $Y_1^{q'p'}$ 及 Y_4^{qp} 在此处也有一阶零点, 积分是收敛的.

我们还检验了有内部核子闭合圈的图, 它在 $m = \mu = 0$ 时也不发散.

四

根据上述讨论, (3) 式中的 $\Delta\Gamma_\mu$ 项可以忽略. 定义 $t = \ln \lambda = 1/2 \ln (q^2/q_0^2)$, 由量纲分析, 齐次方程化为

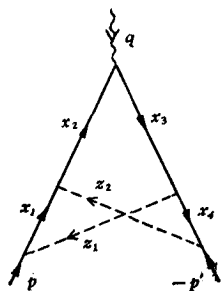


图 10

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_h \frac{\partial}{\partial h} - 2\gamma \right] \Gamma_\mu(q; g, h) = 0. \quad (17)$$

此方程与核子外线脱离质壳的顶角函数 $\Gamma_\mu(\lambda q_0, \lambda p_0, \lambda p'_0; g, h)(\lambda \rightarrow \infty)$ 所满足的方程一样, 可以用同样的方法讨论. 它的一般解有如下的形式:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(q; g, h) &= \Phi(t + \rho_1(g, h), t + \rho_2(g, h)) \\ &\times \exp \left\{ \int_{(g_1, h_1)}^{(g, h)} 2\gamma(g', h') [c d\rho_1(g', h') + (1-c)d\rho_2(g', h')] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\rho_i (i = 1, 2)$ 是下列方程的两个特解:

$$\left(\beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_h \frac{\partial}{\partial h} \right) \rho = 1, \quad (19)$$

而

$$\rho = \rho_1(g, h), \quad \rho = \rho_2(g, h) \quad (20)$$

确定特征线方程

$$\frac{dg}{\beta_g} = \frac{dh}{\beta_h} = d\rho \quad (21)$$

的一条积分曲线; Φ 为任意函数; $c(g, h)$ 挑选得使 $\gamma[c d\rho_1 + (1-c)d\rho_2]$ 为全微分. 引入 $\bar{g}(g, h, t), \bar{h}(g, h, t)$, 满足

$$\begin{aligned} t + \rho_1(g, h) &= \rho_1(\bar{g}, \bar{h}), \\ t + \rho_2(g, h) &= \rho_2(\bar{g}, \bar{h}). \end{aligned} \quad (22)$$

故 $\bar{g}(g, h, 0) = g, \bar{h}(g, h, 0) = h$. 由(22), (21), 和(20)三式, $\bar{g}, \bar{h}$ 作为 t 的函数满足

$$dt = d\rho_i(\bar{g}, \bar{h}) \quad (i = 1, 2), \quad (23)$$

即

$$\frac{d\bar{g}}{\beta_g(\bar{g}, \bar{h})} = \frac{d\bar{h}}{\beta_h(\bar{g}, \bar{h})} = dt. \quad (24)$$

利用(22)和(23)式, 可将(18)式化为

$$\Gamma_\mu(q; g, h) = \Gamma_\mu(q_0; \bar{g}, \bar{h}) \exp \left\{ -2 \int_0^t \gamma(\bar{g}(t'), \bar{h}(t')) dt' \right\}. \quad (25)$$

在 $\bar{g}^2 \ll 1, \bar{h}^2 \ll 1$ 的区域, 可以利用微扰论展开式:

$$\begin{aligned} \beta_g(\bar{g}, \bar{h}) &\simeq b_1 \bar{g}^3 + b_2 \bar{g}^5 + b_3 \bar{g} \bar{h}^2 + b_4 \bar{g}^3 \bar{h} + \cdots, \\ \beta_h(\bar{g}, \bar{h}) &\simeq b'_1 \bar{h}^2 + b'_2 \bar{h} \bar{g}^2 + b'_3 \bar{g}^4 + \cdots, \\ \gamma(\bar{g}, \bar{h}) &\simeq c_1 \bar{g}^2 + c_2 \bar{g}^4 + \cdots. \end{aligned} \quad (26)$$

选取 q_0 满足 $q_0^2/m^2 \gg 1, (\bar{g}^2/4\pi) \ln(q_0^2/m^2) \ll 1$, 则

$$\Gamma_\mu(q_0; \bar{g}, \bar{h}) \simeq \gamma_\mu(1 + a_1 \bar{g}^2 + \cdots). \quad (27)$$

为了求微扰论各阶中的 $\ln q^2$ 领头项, 取上一展开式的第一项就够了. 这时由(24)式得到

$$\bar{g}^2 = g^2/(1 - 2b_1 g^2 t), \quad (28)$$

代入(25)式, 利用

$$b_1 = 5/16\pi^2, \quad c_1 = 3/32\pi^2 \quad (29)$$

得到

$$\Gamma_\mu(q; g, h) \approx \gamma_\mu \left(1 - \frac{5}{16\pi^2} g^2 \ln \frac{q^2}{q_0^2} \right)^{3/10}. \quad (30)$$

(30)式与文献[2]的结果完全一样.

一般情形下求次领头项比较麻烦. 但是, 如果忽略有四 π 介子顶角的图形, 则 $\beta_h = 0$; 或者, 如果四 π 介子顶角在减除点为零, 则 $h \sim g^4$, β_h 项也可以忽略. 这时有

$$\beta_g \simeq b_1 g^3 + b_2 g^5. \quad (31)$$

由(24)式和(25)式得

$$\begin{aligned} \bar{g}^2 &= \frac{g^2}{(1 - 2b_1 g^2 t) + g^2 \frac{b_2}{b_1} \ln(1 - 2b_1 g^2 t)}, \\ \Gamma_\mu(q; g) &\approx \gamma_\mu \left(\frac{\bar{g}^2}{g^2} \right)^{-c_1/b_1} \left(\frac{b_1 + b_2 \bar{g}^2}{b_1 + b_2 g^2} \right)^{\frac{c_1}{b_1} - \frac{c_2}{b_2}} (1 + a_1 \bar{g}^2) \\ &\approx \gamma_\mu (1 - 2b_1 g^2 t)^{c_1/b_1} \left\{ 1 + g^2 (1 - 2b_1 g^2 t)^{-1} \left[a_1 - 2c_2 g^2 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{b_2 c_1}{b_1^2} (\ln(1 - 2b_1 g^2 t) + 2b_1 g^2 t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

将 $\Gamma_\mu(\lambda q_0; g, h)$ 与质子脱离质壳的电磁顶角函数 $\Gamma_\mu(\lambda q_0, \lambda p_0, \lambda p'_0; g, h)$ 比较, 后者也满足与(25), (27)式相应的方程, 但它的展开式系数 a_1 和 $\Gamma_\mu(\lambda q_0; g, h)$ 的不一样, 所以两者的领头项是相同的, 但次领头项不一样.

五

由(33)式可以看到, 在赝标耦合理论中, 微扰论领头项和次领头项求和给出的电磁形状因子和实验的规律是不相似的. (33)式原来是在 $\bar{g}^2 \ll 1$, 即 $1 - 2b_1 g^2 t \gg g^2$ 的条件下得到的, 如所熟知的, 在 $2b_1 g^2 t \approx 1$ 时它有一个非物理的奇点. 因此, 超出 $1 - 2b_1 g^2 t \gg g^2$ 的范围运用微扰论领头项求和, 就得到不合理的结果. 离开微扰论来研究方程(25)的一个可能性是, 假定 $\bar{g}, \bar{h}$ 有一个紫外稳定的不动点 (g_f, h_f) , 即

$$\begin{aligned} d\bar{g}/dt|_{g_f, h_f} &= \beta_g(g_f, h_f) = 0, \\ d\bar{h}/dt|_{g_f, h_f} &= \beta_h(g_f, h_f) = 0, \\ t \rightarrow \infty \text{ 时, } \bar{g}(t) &\rightarrow g_f, \bar{h}(t) \rightarrow h_f. \end{aligned} \quad (34)$$

此时, (25)式可以改写为

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(q; g, h) &= \left(\frac{q^2}{q_0^2} \right)^{-\gamma(g_f, h_f)} \exp \left\{ -2 \int_0^t [\gamma(\bar{g}(t'), \bar{h}(t')) - \gamma(g_f, h_f)] dt' \right\} \\ &\quad \times \Gamma_\mu(q_0; g_f, h_f). \end{aligned} \quad (35)$$

如果上式中的积分在 $t \rightarrow \infty$ 时收敛或对数地 $\rightarrow \infty$, 则 Γ_μ 近似地有幂次的行为. 电磁形状因子的实验要求 $\gamma(g_f, h_f) \approx 2$; 但是, 电子-核子深度非弹性散射的实验要求 $\gamma(g_f, h_f) \approx 0$, 这两个要求是矛盾的 (而且 $\gamma(g_f, h_f) = 0$ 的要求对赝标理论看来不能满足^[7]. 另一个可能性是方程(24)有一个极限环, 这时它的积分曲线在 $t \rightarrow \infty$ 时趋于沿 $(\bar{g}, \bar{h})$ 平面上一个闭合圈打转. 在这种情况下, $\Gamma_\mu(q; g, h)$ 将有无穷次振荡的行为, 与实验也是不符合的. 因此, 至少在赝标理论的范围内, 点模型场论不容易对实验的规律给出自然的解释.

现在讨论交换中性矢量粒子的情形. 以量子电动力学为例(交换矢量介子与此类似, 不难推广). 由最低阶辐射修正的计算即可发现, 未重整化的顶角 $\Gamma_{\mu_0}(q, m, \mu; g)$ 当光子质量 $\mu \rightarrow 0$ 时是红外发散的, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $\Delta\Gamma/\Gamma$ 不再是 $O(\lambda^{-1})$, 而是 $O(1)$. 因此, 与交换赝标介子的情形不同, 此时 $\Delta\Gamma$ 项当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时不能丢掉. 这种情形下如何用 Callan-Symanzik 方程研究顶角的渐近行为是值得进一步研究的. 在矢量模型中, 红外发散部分在微扰论各阶中起支配作用, 顶角的这一部分项的渐近行为已有人讨论过^[3]. 在此我们仅指出, 它可以用 Lévy-Sucher 的传播子近似方法^[6]很快地算出来.

顶角 n 阶辐射修正的红外发散部分的领头项, 来自一切有 n 条虚光子线的广义梯形图(见图 11)中所有 $k_i (i = 1, \dots, n)$ 都很小的区域. 在此区域中, 依费曼规则写出这些图对顶角部分的贡献时, 在费米子传播子的分子中可忽略一切 k_i , 而对其分母可使用 Lévy-Sucher 近似, 即忽略传播子分母中所有的 k_i^2 和 $k_i k_j$ 等二次项. 运用文献 [8] 中的恒等式 (A4), 最后可得顶角辐射修正的红外发散部分的主要项, 即顶角高能渐近行为的领头项是

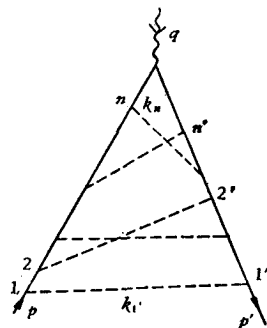


图 11

$$\Gamma_{\mu}(p, p') \approx \gamma_{\mu} \exp \left\{ -\frac{g^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2 \right\}. \quad (36)$$

参 考 文 献

- [1] J. S. Ball, F. Zachariasen, *Phys. Rev.*, **170** (1968), 1541;
M. Ciafaloni, P. Menotti, *Phys. Rev.*, **173** (1968), 1575;
D. Amati, L. Caneschi, R. Jengo, *Nuovo Cimento*, **58A** (1968), 783;
D. Amati, R. Jengo, H. R. Rubinstein, G. Veneziano, M. A. Virasoro, *Phys. Lett.*, **27B** (1968), 38.
- [2] T. Appelquist, J. R. Primack, *Phys. Rev.*, **D1** (1970), 1144.
- [3] R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **48** (1968), 292.
- [4] K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.*, **18** (1970), 227;
C. G. Callan, *Phys. Rev.*, **D2** (1970), 1541;
A. Sirlin, *Phys. Rev.*, **D5** (1971), 2132.
- [5] T. Kinoshita, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 650.
- [6] N. Nakanishi, *Progr. Theor. Phys., Suppl.*, **18** (1961), 1.
- [7] D. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **30** (1973), 1343.
- [8] M. Lévy, J. Sucher, *Phys. Rev.*, **186** (1969), 1656.

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ELECTROMAGNETIC FORM-FACTORS OF THE NUCLEON AND CALLAN-SYMANZIK EQUATION

AN YING WU YONG-SHI DAI YUAN-BEN

(Institute of Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

It is shown that for the model in which nucleons couple with pseudo-scalar mesons, the homogeneous Callan-Symanzik equation can be used to investigate the asymptotic behavior of electromagnetic form-factors of the nucleons. In this way, the leading-logarithm terms in the perturbation theory of electromagnetic form-factors of the nucleon in this model are calculated, and some more general cases are discussed.