

电子-质子的深度非弹性散射 (I)*

曹昌祺 秦旦华
(北京大学物理系)

提 要

本文应用戴逊表示对层子击出图形进行更严格的研究,以考察:这种机制是否确能给出无标度性;如果能够,它是否要求层子质量很小,以及 ν 和 q^2 取大值的具体标准是什么? 结果表明,在 ν 足够大时,层子击出图形能给出无标度性,但最初结果与 Bjorken 的不同,这里得到的是 $W_1 = \nu f_1(x)$, $W_2 = f_2(x)$. 只有借助于击出图形为主(对深度非弹性散射)的假定,应用规范条件,才能压低 W_1 和 W_2 而得到 Bjorken 无标度性. 另外,无标度性的得出,只要求 ν 取大值(按照某些确定的标准),对 q^2 并无限制. 层子质量 M 亦不要求比核子小. 理论上,对于任意的 M 值,只要 ν 足够大,都将得到无标度性.

一、引 言

在用部分子假设来解释电子-质子深度非弹性散射的理论中,有一个共同特点,即核子中与光子作用的那个部分子,在吸收光子后,不再与其余的部分子相互作用. 例如费曼^[1]、Bjorken 和 Paschos^[2] 的简单理论实际上没有考虑部分子之间的作用. 在 Drell 等^[3] 的理论中,吸收了光子的部分子由于获得了大的横向动量,在截断假定下,自然不能与其他部分子相互作用. Landshoff 等^[4] 论证为主要的“非联接图”所相应的深度非弹性散射过程,正是这种“无末态相互作用”的情况. Drell 和李政道所考虑的图形,同样也属于这种类型.

从层子模型来说,所谓的部分子应当就是正层子和反层子. 吸收光子的那个层子既然不再与核子中其他层子相互作用,那么当然它也不可能再与其他层子结合成普通的强子. 这样一来,伴随着无标度性的出现,层子应当已经被击出. 于是产生了一个严重的问题,为何层子没有观察到? 因此,我们认为,对电子-核子深度非弹性散射的研究还远没有完结. 不仅需要“击出型”图形作进一步的研究,还应研究其他的可能性.

本文的主要目的是,应用戴逊表示对击出图形进行更严格的研究,以考察:在层子模型中这种机制是否确能给出无标度性;如果能够,它对层子质量有何要求,以及 ν 和 q^2 取大值的具体标准是什么? 为何在 q^2 甚小时(特别在换用某些新的无标度变量后)就已观察到无标度性?

* 1974 年 6 月 13 日收到.

二、层子击出图形与戴逊表示的应用

我们取规格化体积为 $(2\pi)^3$, 这时结构张量 $W_{\mu\nu}$ 为¹⁾

$$W_{\mu\nu} = (2\pi)^6 \frac{p_0}{M_p} \int (d^3 p_X) \langle p | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | p \rangle \delta(q + p - p_X), \quad (1)$$

$(d^3 p_X)$ 代表相空间元 (包括自旋求和), J_μ 为除过 e 的电流算符, M_p 为核子质量, 上式中核子的自旋是经过平均的.

层子或者反层子击出的图形如图 1 所示. 图中 p' 为被击出的层子的动量, X_1 代表各种可能的“强子和层子”的集合 (它们之间是有相互作用的). 设层子质量为 M , 电荷为 Z , 则相应的流矩阵元为

$$\langle X | J_\nu(0) | p \rangle = iZ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{p_0}} \bar{u}(p') \gamma_\nu \langle X_1 | \phi(0) | p \rangle. \quad (2)$$

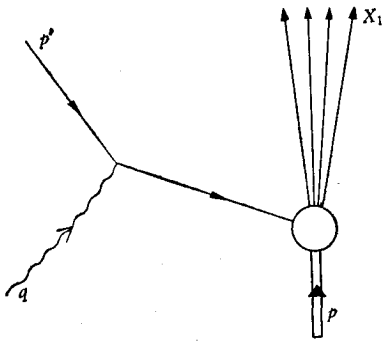


图 1

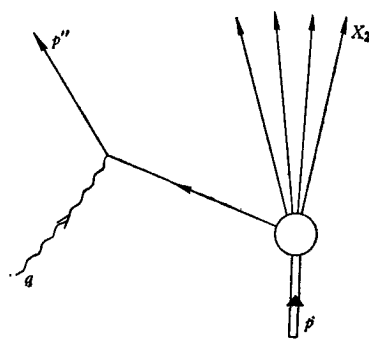


图 2

图 2 为反层子击出图形, 设 p'' 为被击出的反层子的动量, 相应的流矩阵元为

$$\langle X | J_\nu(0) | p \rangle = -iZ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{p_0}} \langle X_2 | \bar{\phi}(0) | p \rangle \gamma_\nu v(p''). \quad (3)$$

于是得出, 相应于击出图形的 $W_{\mu\nu}$ 为

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^{(1)} + W_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (4)$$

其中 $W_{\mu\nu}^{(1)}$ 和 $W_{\mu\nu}^{(2)}$ 分别为正层子和反层子击出图形的贡献²⁾. 它们可以化为

$$W_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{Z^2}{2\pi} \frac{p_0}{M_p} \int d^3 p' d^4 x \left(\gamma_\mu \frac{i \not{p}' - M}{2p_0} \gamma_\nu \right)_{\alpha\beta} \langle p | \bar{\phi}_\alpha(0) \phi_\beta(x) | p \rangle e^{i(q-p')x}, \quad (5)$$

$$W_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{Z^2}{2\pi} \frac{p_0}{M_p} \int d^3 p'' d^4 x \left(\gamma_\nu \frac{i \not{p}'' + M}{2p_0} \gamma_\mu \right)_{\alpha\beta} \langle p | \phi_\beta(x) \bar{\phi}_\alpha(0) | p \rangle e^{i(p''-q)x}.$$

为了应用戴逊表示来研究(5)式, 我们先看下列振幅:

1) 本文用 $\mu = 1, 2, 3, 4$ 度规, $p \cdot k = p \cdot k - p_0 k_0$. 旋量规格化条件是 $\bar{u}u = 1$.

2) 本来, 三种类型层子电荷不同, 应分别写出再求和. 这里的写法是简单化的写法.

$$\begin{aligned}\chi_c(k, p) &= (2\pi)^3 \frac{p_0}{M_p} \int d^4x e^{-ikx} \langle p | \{ \phi(x), \bar{\phi}(0) \} | p \rangle, \\ \chi_F(k, p) &= (2\pi)^3 \frac{p_0}{M_p} \int d^4x e^{-ikx} \langle p | T \phi(x) \bar{\phi}(0) | p \rangle.\end{aligned}\quad (6)$$

$\chi_c(k, p)$ 为反对易子 $\{ \phi(x), \bar{\phi}(0) \}$ 的矩阵元的傅里叶变换, 此反对易子在类空间隔为零, 故 $\chi_c(k, p)$ 可以表成戴逊表示:

$$\chi_c(k, p) = (2\pi i) \int_S d^4k' \int dm^2 \varepsilon(k_0 - k'_0) \delta((k - k')^2 + m^2) \rho(k', p, m^2). \quad (7)$$

S 为一有限区域, 说明见文献[6], 此处从略. $\rho(k', p, m^2)$ 可用层子的 γ 矩阵展开:

$$\rho(k', p, m^2) = \gamma_\mu T_\mu^{(1)} + \gamma_5 \gamma_\mu T_\mu^{(2)} + 1 \cdot T^{(3)} + \gamma_5 T^{(4)} + \sigma_{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(5)}.$$

在(6)式的各个振幅中, 核子的自旋都已作了平均, 故核子自旋自由度不能提供新的矢量, 独立矢量只有两个, 即 k' 和 p . 我们知道, 由两个独立矢量作不成赝矢量也作不成赝标量, 故 $T_\mu^{(2)}$ 和 $T^{(4)}$ 必须为零. $T_{\mu\nu}^{(5)}$ 也只有一项, 因为两个矢量只能作出一个张量. 于是 $\rho(k', p, m^2)$ 可表为

$$\not{p} T_1 + \not{k}' T_2 - i M T_3 + \frac{1}{2M} (\not{p} \not{k}' - \not{k}' \not{p}) T_4,$$

其中 T_i 等为 p, k', k'^2 和 m^2 的函数. 通过下面的考虑, 我们还可以给出对 T_i 的进一步限制.

从时空弱反演不变性, 不难得出 χ_c 应满足下述条件:

$$\chi_c(k, p) = B \tilde{\chi}_c(k, p) B^{-1}, \quad (8)$$

其中 B 为时间反演矩阵, 在狄拉克表象中可以取为 $i\gamma_1\gamma_3$.

从条件(8)式立即得出 $\rho(k', p, m^2)$ 中张量项对 χ_c 的贡献必须为零, 即 χ_c 可表为

$$\chi_c(k, p) = 2\pi \int d^4k' dm^2 \varepsilon(k_0 - k'_0) \delta((k - k')^2 + m^2) (i \not{p} T_1 + i \not{k}' T_2 + M T_3). \quad (9)$$

另外, 通过对 χ_c 定义式(即(6)第一式)取厄米共轭, 可以得出 χ_c 还需满足下列条件:

$$\gamma_4 \chi_c^\dagger(k, p) \gamma_4 = \chi_c(k, p), \quad (10)$$

将(9)式代入后, 得出 T_1, T_2 和 T_3 皆为实数.

为了将(6)式中的编时振幅也通过 ρ 表示出来, 需要先考察它在大 k 时的渐近行为.

定义

$$\chi_p(x) = (2\pi)^3 \frac{p_0}{M_p} \langle p | T \phi(x) \bar{\phi}(0) | p \rangle, \quad (11)$$

它的傅里叶变换即为 $\chi_F(k, p)$. 从层子模型(核子为三个层子以及正反层子对所组成的束缚态)看来, $\chi_p(0)$ 应该为一有限值. 因为核子电磁形式因子在 $q=0$ 点的值是由 $\chi_p(0)$ 决定的.

由(6)式不难得出

$$\int d^4k \chi_F(k, p) = (2\pi)^4 \chi_p(0).$$

于是从 $\chi_p(0)$ 的有限性, 即得 k 大时, $\chi_F(k, p)$ 应足够快地趋于零.

另外, 设量子数相同于两个层子的状态的最低不变质量为 M_1 , 量子数相同于四个层

子的状态的最低不变质量为 M_2 , 根据目前的实验情况, 可以认为下式是成立的:

$$M_1 + M_2 > 2M_p. \quad (12)$$

在这些条件下, 编时振幅 χ_F 可表示为

$$\chi_F(k, p) = \int d^4k' dm^2 \frac{\rho(k', p, m^2)}{(k - k')^2 + m^2 - i\varepsilon}, \quad (13)$$

相应地, 推迟振幅和超前振幅¹⁾可表为

$$\begin{aligned} \chi_r(k, p) &= \int d^4k' dm^2 \frac{\rho(k', p, m^2)}{(k - k')^2 + m^2 - i\zeta(k_0 - k'_0)\varepsilon}, \\ \chi_a(k, p) &= \int d^4k' dm^2 \frac{\rho(k', p, m^2)}{(k - k')^2 + m^2 + i\zeta(k_0 - k'_0)\varepsilon}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\rho(k', p, m^2) = \beta T_1 + \hat{k}' T_2 - i M T_3. \quad (15)$$

仿照文献[7]的考虑, 从 $\int \chi_F(k, p) d^4k$ 为有限值的假设出发, 并假定谱函数 $\rho(k', p, m^2)$ 当 $m^2 \rightarrow \infty$ 时不是在正负之间振荡的(也就是说, 对于 ρ 的每一个分量 $\rho_{\alpha\beta}$, 都存在一个 $M_{\alpha\beta}^2$, 当 $m^2 > M_{\alpha\beta}^2$ 时, $\rho_{\alpha\beta}$ 或者恒正, 或者恒负), 就可以导出 $\rho(k', p, m^2)$ 满足三个求和条件:

$$\begin{aligned} \int \rho(k', p, m^2) d^4k' dm^2 &= 0, \\ \int m^2 \rho(k', p, m^2) d^4k' dm^2 &= 0, \\ \int k'_0 \rho(k', p, m^2) d^4k' dm^2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

通过求迹以及乘 γ_μ 后再求迹, 由(16)式还可得出 T_i 的求和条件.

有了(13)和(14)式, 就可将(5)式右方用 ρ 表示出来. 因为 $\langle p | \bar{\psi}_a(0) \psi_\beta(x) | p \rangle$ 和 $\langle p | \psi_\beta(x) \bar{\psi}_a(0) | p \rangle$ 可表为

$$\begin{aligned} \langle p | \bar{\psi}_a(0) \psi_\beta(x) | p \rangle &= -\langle p | T \psi_\beta(x) \bar{\psi}_a(0) | p \rangle + \langle p | \theta(x_0) \{ \psi_\beta(x), \bar{\psi}_a(0) \} | p \rangle, \\ \langle p | \psi_\beta(x) \bar{\psi}_a(0) | p \rangle &= \langle p | T \psi_\beta(x) \bar{\psi}_a(0) | p \rangle + \langle p | \theta(-x_0) \{ \psi_\beta(x), \bar{\psi}_a(0) \} | p \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

得到的结果是

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{Z^2}{(2\pi)^3} \int d^4p' d^4k' dm^2 \text{Sp} [\gamma_\mu (-i\hat{p}' + M) \gamma_\nu i \rho(k', p, m^2)] \\ &\quad \times \theta(-p'_0 + q_0 + k'_0) \delta((p' - q - k')^2 + m^2) \theta(p'_0) \delta(p'^2 + M^2), \\ W_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{Z^2}{(2\pi)^3} \int d^4p' d^4k' dm^2 \text{Sp} [\gamma_\nu (-i\hat{p}' + M) \gamma_\mu i \rho(k', p, m^2)] \\ &\quad \times \theta(p'_0 + q_0 - k'_0) \delta((p' + q - k')^2 + m^2) \theta(-p'_0) \delta(p'^2 + M^2). \end{aligned} \quad (18)$$

从这里可以看出, 应用戴逊表示的优点, 不仅在于它是经过证明的, 而且层子线的动量 p' 只含在一些已知的因子中, 因此可能将对 p' 的积分解析地积出来. 不过, 直接对上

1) 它们分别等于, 将(6)第二式中的 $T\psi(x)\bar{\psi}(0)$ 换成 $\theta(x_0)\{\psi(x), \bar{\psi}(0)\}$ 和 $-\theta(-x_0)\{\psi(x), \bar{\psi}(0)\}$ 后的结果.

式进行这种积分并不方便, 不如将 $W_{\mu\nu}$ 与向前康普顿散射的吸收部分(虚部)联系起来, 然后利用费曼参量化积分方法来进行计算。

三、向前康普顿散射的吸收部分与结构函数

如所周知, 结构张量 $W_{\mu\nu}$ 可以通过向前康普顿散射的吸收部分表示出来。我们将证明, 击出图形所贡献的部分 $W_{\mu\nu}^{(1)}$ 和 $W_{\mu\nu}^{(2)}$, 也可通过相应的向前康普顿散射图形的吸收部分来表示。这种图形有两个, 如图 3 和图 4 所示。图 5 和图 6 所示的并非新的图形, 因为只要把图中伸出的“层子套”拧过来, 图 5 就与图 4 一样, 图 6 就与图 3 一样。这一点在写出各图相应的 S 矩阵之后, 能更清楚地看出。

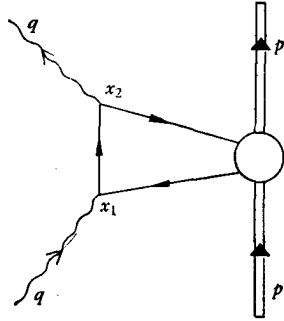


图 3

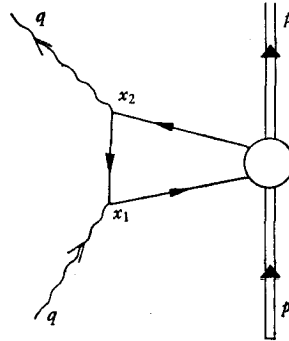


图 4

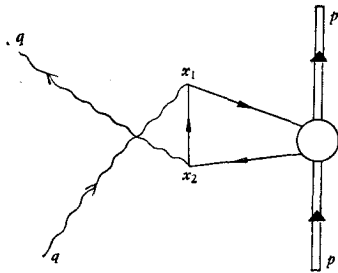


图 5

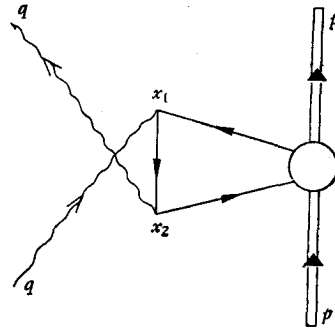


图 6

相应于图 3 的 S 矩阵元为

$$\langle S \rangle^{(1)} = \frac{Z^2 e^2}{4q_0 (2\pi)^3} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \text{Sp} [\gamma_\nu \varepsilon_\nu S_F(x_2 - x_1) \gamma_\mu \varepsilon_\mu \langle p | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | p \rangle] e^{iq(x_1 - x_2)}, \quad (19)$$

如果将 S 矩阵元表成

$$\langle S \rangle = -i(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \left(\frac{M_p}{p_0} \right) \frac{1}{2q_0} \frac{e^2}{(2\pi)^6} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu M_{\mu\nu}, \quad (20)$$

其中 p_i 与 p_f 代表初态和末态的总动量, 则相应于(19)式的 $M_{\mu\nu}$ 为

$$M_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{Z^2 p_0}{2\pi M_p} \int d^4 p' d^4 x \text{Sp} \left[\gamma_\nu \frac{i \not{p}' - M}{p'^2 + M^2 - i\varepsilon} \gamma_\mu \langle p | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | p \rangle \right] e^{-i(p' - q)x}, \quad (21)$$

对于图 4, 相应的 $M_{\mu\nu}$ 为

$$M_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{Z^2 p_0}{2\pi M_p} \int d^4 p' d^4 x \text{Sp} \left[\frac{\gamma_\mu (i \not{p}' - M)}{p'^2 + M^2 - i\varepsilon} \gamma_\nu \langle p | T \phi(x) \bar{\phi}(0) | p \rangle \right] e^{-i(p'+q)x}, \quad (22)$$

由此可见, $M_{\mu\nu}^{(2)}$ 和 $M_{\mu\nu}^{(1)}$ 的差别仅在于 $\nu \leftrightarrow \mu, q \leftrightarrow -q$.

下面证明, 在物理区, $W_{\mu\nu}^{(1)}$ 与 $M_{\mu\nu}^{(1)}$ 之间有简单的关系:

$$W_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \text{abs } M_{\mu\nu}^{(1)}, \quad W_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{\pi} \text{abs } M_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (23)$$

为此, 先将积分表示式(13)代入(21)式, 得出

$$M_{\mu\nu}^{(1)} = i \frac{Z^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p' d^4 k' dm^2 \frac{F_{\mu\nu}(p', p, k')}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)[(p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon]}, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(p', p, k') &= -\text{Sp} [\gamma_\nu (i \not{p}' - M) \gamma_\mu (i \not{p} T_1 + i \not{k}' T_2 + M T_3)] \\ &= 4(p'_\mu p_\nu + p_\mu p'_\nu) T_1 + 4(p'_\mu k'_\nu + k'_\mu p'_\nu) T_2 \\ &\quad - 4\delta_{\mu\nu}(p' \cdot p T_1 + p' \cdot k' T_2 - M^2 T_3). \end{aligned} \quad (25)$$

$F_{\mu\nu}$ 对 μ, ν 是对称的, 故 $M_{\mu\nu}^{(2)}$ 仅需通过 $q \rightarrow -q$ 的代换即可由 $M_{\mu\nu}^{(1)}$ 求得.

如前所述, T_1, T_2 和 T_3 为实函数, 故求 $M_{\mu\nu}^{(1)}$ 的吸收部分时, 只须将因子 $F_{\mu\nu}$ 看作实数来取(24)式右方的虚部即可.

(24)式中对 p_0 的积分, 不难通过下半平面或者上半平面的闭合回路求出. 按上述说明取出虚部, 再将它改写成协变形式, 即可求得

$$\begin{aligned} \text{abs } M_{\mu\nu}^{(1)} &= -\frac{Z^2}{8\pi^2} \int d^4 p' d^4 k' dm^2 F_{\mu\nu}(p', p, k') [\theta(-p'_0 + q_0 + k'_0) \\ &\quad \times \delta((p' - q - k')^2 + m^2) \theta(p'_0) \delta(p'^2 + M^2) \\ &\quad + \theta(p'_0 - q_0 - k'_0) \delta((p' - q - k')^2 + m^2) \theta(-p'_0) \delta(p'^2 + M^2)]. \end{aligned} \quad (26)$$

上式第一项仅在

$$q_0 + k'_0 \geq M + m$$

时才可能不为零; 第二项仅在

$$q_0 + k'_0 \leq -(M + m)$$

时才可能不为零, 两项不能同时存在. 它们分别相当于色散关系中所谓的 s 道和 u 道的吸收部分. 对于我们研究的深度非弹性散射的物理区, 只有第一项存在. 将此结果同(18)式比较, 即得(23)第一式.

通过 $q \rightarrow -q$ 的代换, 由(26)式即得

$$\begin{aligned} \text{abs } M_{\mu\nu}^{(2)} &= -\frac{Z^2}{8\pi^2} \int d^4 p' d^4 k' dm^2 F_{\mu\nu}(p', p, k') \\ &\quad \times [\theta(-p'_0 - q_0 + k'_0) \delta((p' + q - k')^2 + m^2) \theta(p'_0) \delta(p'^2 + M^2) \\ &\quad + \theta(p'_0 + q_0 - k'_0) \delta((p' + q - k')^2 + m^2) \theta(-p'_0) \delta(p'^2 + M^2)]. \end{aligned} \quad (27)$$

在此式中, 对深度非弹性散射的物理区, 不为零的是第二项, 也就是说, (26)式中相应于 u 道的吸收部分现在成了 s 道的吸收部分. 通过比较即得(23)第二式.

于是, 下面的任务就是计算 $M_{\mu\nu}^{(1)}$.

先进行张量结构的分解。 $M_{\mu\nu}$ 的张量结构共有四项, 即

$$M_{\mu\nu}^{(i)} = G_1^{(i)} \delta_{\mu\nu} + \frac{G_2^{(i)}}{M_p^2} p_\mu p_\nu + \frac{G_3^{(i)}}{M_p^2} (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + \frac{G_4^{(i)}}{M_p^2} q_\mu q_\nu, \quad (28)$$

将(24)式代入左方, 然后依次在上式两侧乘以 $\delta_{\mu\nu}$, $p_\mu p_\nu$, $q_\mu p_\nu$ 和 $q_\mu q_\nu$, 即可分解出张量结构中各个不变函数, 下面只列出上标 $i=1$ 的结果, 为了简单起见, 并将上标符号(1)略去。

$$\begin{aligned} G_1 &= i \frac{4Z^2}{(2\pi)^4} \int d^4p' d^4k' dm^2 \frac{-(p \cdot p')T_1 + M^2T_3}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)} \\ &\quad + i \frac{4Z^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p' d^4k' dm^2}{M_p^2(q^2 + v^2)} [q^2(p \cdot k')(p \cdot p') + M_p v(q \cdot k')(p \cdot p') \\ &\quad - M_p^2(q \cdot k')(q \cdot p') + M_p v(p \cdot k')(q \cdot p')] \\ &\quad \times \frac{T_2}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)}, \\ G_2 &= -i \frac{8Z^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p' d^4k' dm^2}{q^2 + v^2} [M_p v(q \cdot p') + q^2(p \cdot p')] \\ &\quad \times \frac{T_1}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)} \\ &\quad + i \frac{4Z^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p' d^4k' dm^2}{M_p^2(q^2 + v^2)^2} [M_p^2 q^2(q^2 + v^2)(p' \cdot k') \\ &\quad + M_p^2(2v^2 - q^2)(q \cdot k')(q \cdot p') + 3q^4(p \cdot k')(p \cdot p') \\ &\quad + 3q^2 M_p v(q \cdot k')(p \cdot p') + 3q^2 M_p v(p \cdot k')(q \cdot p')] \\ &\quad \times \frac{T_2}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)}, \\ G_3 &= i \frac{4Z^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p' d^4k' dm^2}{q^2 + v^2} [M_p^2(q \cdot p') - M_p v(p \cdot p')] \\ &\quad \times \frac{T_1}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)} \\ &\quad + i \frac{4Z^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p' d^4k' dm^2}{(q^2 + v^2)^2} [(2v^2 - q^2)(q \cdot k')(p \cdot p') \\ &\quad + \frac{3}{M_p} v q^2(p \cdot k')(p \cdot p') + (2v^2 - q^2)(p \cdot k')(q \cdot p') \\ &\quad - 3M_p v(q \cdot k')(q \cdot p') + M_p v(q^2 + v^2)(k' \cdot p')] \\ &\quad \times \frac{T_2}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)}, \\ G_4 &= i \frac{4Z^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p' d^4k' dm^2}{(q^2 + v^2)^2} [(2v^2 - q^2)(p \cdot k')(p \cdot p') - 3M_p v(q \cdot k')(p \cdot p') \\ &\quad + 3M_p^2(q \cdot k')(q \cdot p') - 3M_p v(p \cdot k')(q \cdot p') - M_p^2(q^2 + v^2)(k' \cdot p')] \\ &\quad \times \frac{T_2}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$v = -\frac{1}{M_p} (p \cdot q). \quad (30)$$

(29)式里包含对 p' 的积分,只有下述两种形式:

$$I_1 = \int d^4 p' \frac{f \cdot p'}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)}, \quad (31)$$

$$I_2 = \int d^4 p' \frac{1}{(p'^2 + M^2 - i\varepsilon)((p' - q - k')^2 + m^2 - i\varepsilon)}.$$

由于 p' 只包含在这样简单的因子中,故可以先将对 p' 的积分解析地积出。 I_1 和 I_2 虽然都是发散积分,但并不引起实质性困难,因为我们实际需要的只是 G_i 的虚部,亦即 I_1 和 I_2 的实部。如下面将见到的,它们并不发散。因此,我们在进行(31)式的积分时,先把 p' 的积分区域限制在一个有限的范围,例如四维大球 $p_0'^2 + \mathbf{p}'^2 \leq E^2$ 以内,在取出实部后,再令 E^2 趋于无穷。

应用费曼参量化积分方法^[8],可以求出

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2} f \cdot (q + k') \left[\ln \frac{E^2 + m^2}{m^2} + \frac{m^2}{E^2 + m^2} - 1 \right] - i \frac{\pi^2}{4} f \cdot (q + k')$$

$$+ \frac{i\pi^2}{2} f \cdot (q + k') \int_0^1 dz \frac{z^2[(1-z)(q+k')^2 + m^2 - M^2]}{z(1-z)(q+k')^2 + zm^2 + (1-z)M^2 - i\varepsilon}, \quad (32)$$

其中 z 为一积分参量。从(32)式即可看出,只有最后一项才对实部有贡献,这就证实了上面所说的,发散并不出现在 $\text{Re } I_1$ 中。

为了计算 $\text{Re } I_1$, 我们来考察(32)式最后一项的分母

$$y \equiv z(1-z)(q+k')^2 + zm^2 + (1-z)M^2 \quad (33)$$

在 $0 \leq z \leq 1$ 区间有根的条件。不难看出, y 在区间 $0 \leq z \leq 1$ 或者无根或者有两个根(参见图7)。通过普通的计算可以求出,在 $0 \leq z \leq 1$ 有根的条件是

$$(q+k')^2 < -(M+m)^2, \quad (34)$$

而两个根为

$$z_1 = \frac{(q+k')^2 + m^2 - M^2 + \sqrt{((q+k')^2 + m^2 + M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2(q+k')^2}, \quad (35)$$

$$z_2 = \frac{(q+k')^2 + m^2 - M^2 - \sqrt{((q+k')^2 + m^2 + M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2(q+k')^2}.$$

在条件(34)式成立的情况下,(32)式中的积分可以化为

$$\int_0^1 dz \frac{z^2(2z - z_1 - z_2)}{(z - z_1 + i\varepsilon)(z - z_2 - i\varepsilon)},$$

于是立即可求出

$$\text{Re } I_1 = \frac{\pi^2}{2} f \cdot (q + k')(z_1^2 - z_2^2) \theta(-(q+k')^2 - (M+m)^2)$$

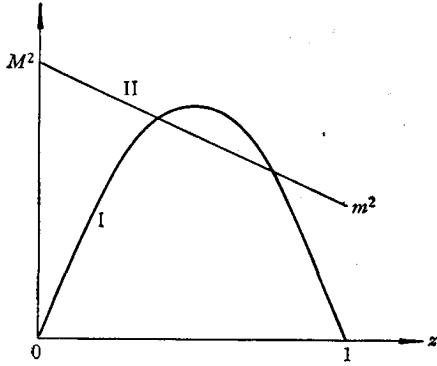


图 7

I: $-z(1-z)(q+k')^2$,
II: $zm^2 + (1-z)M^2$

$$= \frac{\pi^3}{2} f \cdot (q + k') \left[1 + \frac{m^2 - M^2}{(q + k')^2} \right] \frac{\sqrt{((q + k')^2 + m^2 + M^2)^2 - 4m^2M^2}}{(q + k')^2} \times \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2). \quad (36)$$

对于 I_2 和 $\text{Re } I_2$ 可同样进行计算, 结果为

$$I_2 = i\pi^2 \left[\ln \frac{E^2 + m^2}{m^2} + \frac{m^2}{E^2 + m^2} - 1 \right] + i\pi^2 \int_0^1 dz \frac{z[(1 - 2z)(q + k')^2 + m^2 - M^2]}{z(1 - z)(q + k')^2 + zm^2 + (1 - z)M^2 - i\varepsilon}, \quad (37)$$

$$\text{Re } I_2 = \pi^3 \frac{\sqrt{[(q + k')^2 + m^2 + M^2]^2 - 4m^2M^2}}{(q + k')^2} \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2). \quad (38)$$

有了(36)和(38)式, 即可得出 $\text{Im } G_i$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \text{Im } G_1 &= \frac{Z^2}{8\pi} \int d^4k' dm^2 [M_p \nu - (p \cdot k')] T_1 K + \frac{Z^2}{4\pi} \int d^4k' dm^2 M^2 T_3 \bar{K} \\ &\quad + \frac{Z^2}{8\pi} \int \frac{d^4k' dm^2}{M_p^2(q^2 + \nu^2)} [-M_p^2(q^2 + \nu^2)(q \cdot k') \\ &\quad + 2M_p \nu(q \cdot k')(p \cdot k') + q^2(p \cdot k')^2 - M_p^2(q \cdot k')^2] T_2 K, \\ \text{Im } G_2 &= -\frac{Z^2}{4\pi} \int \frac{d^4k' dm^2}{q^2 + \nu^2} [M_p \nu(q \cdot k') + q^2(p \cdot k')] T_1 K \\ &\quad + \frac{Z^2}{8\pi} \int \frac{d^4k' dm^2}{M_p^2(q^2 + \nu^2)^2} [M_p^2(2\nu^2 - q^2)(q \cdot k')^2 + 3q^4(p \cdot k')^2 \\ &\quad + 6q^2 M_p \nu(p \cdot k')(q \cdot k') + M_p^2 q^2(q^2 + \nu^2)k'^2] T_2 K, \\ \text{Im } G_3 &= \frac{Z^2}{8\pi} \int \frac{d^4k' dm^2}{q^2 + \nu^2} [M_p^2(q^2 + \nu^2) + M_p^2(q \cdot k') - M_p \nu(p \cdot k')] T_1 K \\ &\quad + \frac{Z^2}{8\pi} \int \frac{d^4k' dm^2}{M_p(q^2 + \nu^2)^2} [-M_p^2 \nu(q^2 + \nu^2)(q \cdot k') \\ &\quad - M_p q^2(q^2 + \nu^2)(p \cdot k') - 3M_p^2 \nu(q \cdot k')^2 + 3q^2 \nu(p \cdot k')^2 \\ &\quad + 2M_p(2\nu^2 - q^2)(p \cdot k')(q \cdot k') + M_p^2 \nu(q^2 + \nu^2)k'^2] T_2 K, \\ \text{Im } G_4 &= \frac{Z^2}{8\pi} \int \frac{d^4k' dm^2}{(q^2 + \nu^2)^2} [3M_p^2(q \cdot k')^2 - M_p^2(q^2 + \nu^2)k'^2 \\ &\quad + 2M_p^2(q^2 + \nu^2)(q \cdot k') - 2M_p \nu(q^2 + \nu^2)(p \cdot k') \\ &\quad - 6M_p \nu(q \cdot k')(p \cdot k') + (2\nu^2 - q^2)(p \cdot k')^2] T_2 K, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} K &= \left[1 + \frac{m^2 - M^2}{(q + k')^2} \right] \frac{\sqrt{((q + k')^2 + m^2 + M^2)^2 - 4m^2M^2}}{(q + k')^2} \\ &\quad \times \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2), \\ \bar{K} &= \frac{\sqrt{((q + k')^2 + m^2 + M^2)^2 - 4m^2M^2}}{(q + k')^2} \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2). \end{aligned} \quad (40)$$

以上求出的是正层子击出图形的贡献. 至于反层子击出图形的结果, 只需将(39)和(40)式中的 q 代换成 $-q$, 并在 $\text{Im } G_3$ 前加一个负号即得.

结构函数与 $\text{Im } G_i$ 之间有着简单的关系, 如令

$$W_{\mu\nu} = W_1 \delta_{\mu\nu} + \frac{W_2}{M_p^2} p_\mu p_\nu + \frac{W_3}{M_p^2} (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + \frac{W_4}{M_p^2} q_\mu q_\nu, \quad (41)$$

则结构函数 W_i 与 $\text{Im } G_i$ 之间的关系即为

$$W_i = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G_i. \quad (42)$$

值得注意的是, 在(39)式中, p 不仅出现在各个明显的因子中, 还包含在未知函数 T_i 的宗量内. 为了显示出 $\text{Im } G_i$ 和 W_i 作为 q^2 和 ν 的函数, 我们采取核子静止参考系, 并为方便计, 选取 q 的方向为 x_3 轴. 这时 T_i 等即作为 k'_0 , k'^2 和 m^2 的函数, 它们不包含 q^2 和 ν , 而 $p \cdot k' = -M_p k'_0$ 也与 q^2 和 ν 无关. $q \cdot k'$ 与 q^2 和 ν 的关系为

$$\begin{aligned} q \cdot k' &= |q| k'_3 - q_0 k'_0 \\ &= \sqrt{q^2 + \nu^2} k'_3 - \nu k'_0. \end{aligned}$$

这样, 在(39)和(40)两式的宗量中, 除了积分变量 k' 和 m^2 以外, 就都化成 q^2 和 ν 了.

由于取了核子静止系, k' 的积分范围也较简单, 即只在以 $(k'_0 = M_p, \mathbf{k}' = 0)$ 为顶点的下光锥和以 $(k'_0 = -M_p, \mathbf{k}' = 0)$ 为顶点的上光锥所夹的区域内, 如图 8 所示. 这样, 无论 k'_0 和 $|\mathbf{k}'|$ 都不会大于 M_p , 因此我们很容易比较出 $\text{Im } G_i$ 表

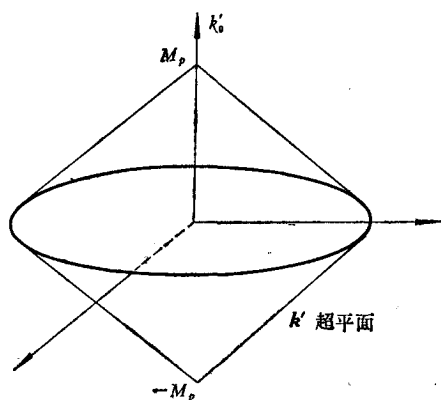


图 8

达式中各项的量级大小, 从而作近似时, 结果的准确度就比较清楚.

四、近似处理和讨论

1. 结构函数具有无标度性的条件

就“击出型”图形来说, 从我们以上所得的结果可以看出, 无标度性的存在与否, 和 q^2 值的大小并无关系¹⁾, 只要求 ν 取大值. 而且对 ν 的大值有明确的标准:

$$1) \quad \frac{M_p}{\nu} \ll 1, \quad (43)$$

即 ν 要比核子质量大得多. 当(43)式满足时,

$$\frac{q^2}{\nu^2}, \quad \frac{|k'_0|}{\nu} \quad \text{和} \quad \frac{|\mathbf{k}'|}{\nu} \quad \text{亦都比 1 小得多.}$$

因为 $\frac{q^2}{\nu^2} = \frac{q^2}{2M_p \nu} \frac{2M_p}{\nu}$, 而 $\frac{q^2}{2M_p \nu}$ 总是小于或等于 1 的. 至于 $|k'_0|$ 和 $|\mathbf{k}'|$, 如上节所述, 都比 M_p 小.

$$2) \quad \frac{M_p^2}{M_p \nu} \ll 1, \quad (44)$$

1) 这里只就“击出型”图形而言, 并未去讨论 q^2 小时, 击出图形是否可能为主的问题.

即 $M_p \nu$ 要比层子质量的平方大得多.

3) 要求 $\rho(k', p, m^2)$ 或 $T_i(k'_0, \mathbf{k}'^2, m^2)$ 当 m^2 大时迅速下降, 并且对于重要的 m^2 值,

$$\frac{m^2}{M_p \nu} \ll 1. \quad (45)$$

$$4) \quad M^2 |T_3| \ll M_p \nu |T_1 + \frac{k'_0 - k'_3}{M_p} T_2|,$$

如果 $|T_3|$ 不比 $|T_1 + \frac{k'_0 - k'_3}{M_p} T_2|$ 大, 则(44)式即可保持此要求成立.

当这些条件满足时, 我们即可以进行下述近似处理. 首先, 由条件 1), 在略去相对量级为 M_p/ν 的小项后, $\text{Im } G_i$ 可以化为

$$\begin{aligned} \text{Im } G_1 &= \frac{Z^2}{8\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p \nu \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) K + \frac{Z^2}{4\pi} \int d^4 k' dm^2 M^2 T_3 \bar{K}, \\ \text{Im } G_2 &= \frac{Z^2}{4\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p k'_- \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) K, \\ \text{Im } G_3 &= \frac{Z^2}{8\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p^2 \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) K, \\ \text{Im } G_4 &= \frac{Z^2}{4\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p^2 \frac{k'_3}{\nu} T_2 K, \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$k'_- = k'_0 - k'_3. \quad (47)$$

其次, 根据条件 1), 2) 和 3), 可将 K 和 $\bar{K}$ 近似地表为

$$K \cong \bar{K} \cong -\theta(-(\mathbf{q} + \mathbf{k}')^2) \cong -\theta(k'_- - M_p x), \quad (48)$$

其中

$$x = \frac{1}{\omega} = \frac{q^2}{2M_p \nu}.$$

这样, 按条件 4) 略去(46)式第一式中含 T_3 的项后, 即得

$$\begin{aligned} \text{Im } G_1 &= -\frac{Z^2}{8\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p \nu \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(k'_- - M_p x), \\ \text{Im } G_2 &= -\frac{Z^2}{4\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p k'_- \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(k'_- - M_p x), \\ \text{Im } G_3 &= -\frac{Z^2}{8\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p^2 \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(k'_- - M_p x), \\ \text{Im } G_4 &= -\frac{Z^2}{4\pi} \int d^4 k' dm^2 M_p^2 \frac{k'_3}{\nu} T_2 \theta(k'_- - M_p x). \end{aligned} \quad (49)$$

于是, 对于结构函数 W_1 和 W_2 , 我们就得到无标度性. 不过还不就是 Bjorken 无标度性¹⁾, 关于这个问题, 下面还要讨论.

在以上四个条件中, 比较关键的是条件 2) 和 3). 条件 2) 虽然不要求层子质量比核

1) 指 W_1 和 νW_2 为 x 的函数.

子质量小,但由于实验上在 ν 不太大时已经观察到无标度性,层子质量受到的限制还是很强的. 关于条件 3), 我们可以再作一些具体的说明和进一步的讨论. 首先, 在 $\frac{M^2}{M_p \nu} \ll 1$ 成立的前提下, 由 (40) 式定义的 K 和 $\bar{K}$ 可近似地表为

$$K \cong - \left[1 + \frac{m^2}{(q+k')^2} \right]^2 \theta(-(q+k')^2 - m^2) \\ \cong - \left[1 + \frac{m^2}{\nu(M_{px} - k'_-)} + \frac{m^4}{4\nu^2(M_{px} - k'_-)^2} \right] \theta(-2\nu(M_{px} - k'_-) - m^2), \quad (50)$$

$$\bar{K} \cong - \left[1 + \frac{m^2}{(q+k')^2} \right] \theta(-(q+k')^2 - m^2) \\ \cong - \left[1 + \frac{m^2}{2\nu(M_{px} - k'_-)} \right] \theta(-2\nu(M_{px} - k'_-) - m^2). \quad (51)$$

因此, (46) 式中对 m^2 的积分, 有下述三种形式:

$$\int_0^{m_{\max}^2} T dm^2, \quad \int_0^{m_{\max}^2} m^2 T dm^2 \quad \text{和} \quad \int_0^{m_{\max}^2} m^4 T dm^2,$$

其中

$$T = T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2, \\ m_{\max}^2 = 2\nu(k'_- - M_{px}). \quad (52)$$

在 k' 积分范围的大部分, 即除了 $k'_- \approx M_{px}$ 的边缘区域以外, $m_{\max}^2$ 具有 $M_p \nu$ 的量级. 因此, 具体说来, 条件 3) 要求, 当 $m^2 \rightarrow \infty$ 时, T 应下降得足够快¹⁾, 使得

$$\text{i)} \quad \int_0^\infty T dm^2 \text{ 收敛, 而且当 } m_{\max}^2 \sim 0(M_p \nu) \text{ 时,}$$

$$\int_0^{m_{\max}^2} T dm^2 \cong \int_0^\infty T dm^2;$$

$$\text{ii)} \quad \left| \int_0^{m_{\max}^2} m^2 T dm^2 \right| \ll M_p \nu \left| \int_0^{m_{\max}^2} T dm^2 \right|;$$

$$\text{iii)} \quad \left| \int_0^{m_{\max}^2} m^4 T dm^2 \right| \ll M_p^2 \nu^2 \left| \int_0^{m_{\max}^2} T dm^2 \right|.$$

这样, K 和 $\bar{K}$ 即可用 (48) 式表示.

按第二节所述, 如果 $\int \chi_F(k, p) d^4 k$ 收敛到有限值, 而且谱函数 T_i 在 $m^2 \rightarrow \infty$ 时的行为不是在正负之间振荡的, 那么就有求和条件 (16) 式, 从 (16) 式并可得出, $\int m^2 T d^4 k' dm^2$ 收敛并为零. 因而可以合理地认为, 当 $m^2 \rightarrow \infty$ 时, T 比 $1/m^4$ 更快地趋于零, 于是上面提到的三个积分中前两个即 $\int_0^{m_{\max}^2} T dm^2$ 和 $\int_0^{m_{\max}^2} m^2 T dm^2$ 在 $m_{\max}^2 \rightarrow \infty$ 时都是收敛的, 而第三个 $\int_0^{m_{\max}^2} m^4 T dm^2$ 至多随 $m_{\max}^2$ 线性发散. 因此, 我们可以定义一个平均值 $\langle m^2 \rangle$ 为

1) 如果 m^2 大时 (从某个值直到 $M_p \nu$), T 是平直的, 即几乎为一常数, 则虽然仍可能得到无标度性, 但结果比 (57) 式所表示的还要大一个量级, 即 $W_1 = \nu^2 f_1(x)$, $W_2 = \nu f_2(x)$. 如果 T 随 m^2 的 n 次方发散 ($n > 0$), 则将有 $W_1 = \nu^{n+2} f_1(x)$, $W_2 = \nu^{n+1} f_2(x)$. n 愈大, 离 Bjorken 无标度性愈远.

$$\langle m^2 \rangle = \left| \frac{\int_{M_p \nu}^{M_p \nu} m^2 T dm^2}{\int_{M_p \nu}^{M_p \nu} T dm^2} \right|. \quad (53)$$

在第三个积分为线性发散时,还可定义一个 m_0^2 为

$$m_0^2 M_p \nu = \left| \frac{\int_{M_p \nu}^{M_p \nu} m^4 T dm^2}{\int_{M_p \nu}^{M_p \nu} T dm^2} \right|, \quad (54)$$

其中 $\langle m^2 \rangle$ 和 m_0^2 在 $\nu \rightarrow \infty$ 时保持有限。而上面的条件 ii) 和 iii) 即分别相当于

$$\langle m^2 \rangle \ll M_p \nu \quad (55)$$

和

$$m_0^2 \ll M_p \nu. \quad (56)$$

这样,只要 ν 足够大,条件 3) 总是可以成立的。不过目前的实验结果,要求 $\langle m^2 \rangle$ 和 m_0^2 都甚小。

2. 无标度性和规范不变条件

从(49)和(42)式,得出的结果是

$$\begin{aligned} W_1 &= \nu f_1(x), \\ W_2 &= f_2(x). \end{aligned} \quad (57)$$

也就是说,(39)式的最高项比 Bjorken 的结果要大一个量级(即 ν/M_p 倍),只有最高项消去而取次高项时,才能得到 Bjorken 无标度性。

我们指出,在“击出型”图形为主的前提下,从规范不变条件,可以得出(39)式最高项果然是消去的。

规范不变性要求

$$\begin{aligned} M_p^2 \text{Im } G_1 - M_p \nu \text{Im } G_3 + q^2 \text{Im } G_4 &= 0, \\ M_p \nu \text{Im } G_2 - q^2 \text{Im } G_3 &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

(39)式虽不显然满足(58)式第二式¹⁾,但由于包含未知函数 T_i 的积分,故不能判断这一要求是否满足。但是,只要承认“击出型”图形在深度非弹性散射情况确实是主要的,那么(39)式应在所保留的最大量级上满足(58)式。考虑到最高项可能消去,我们需要对(39)式重作近似,即保留到次高项。这时,(46)和(48)式都要作相应的修改。为节省篇幅起见,结果不详细列出。

将修改后的 $\text{Im } G_i$ 表达式代到规范不变条件中去,就得到两个关系式:

$$\begin{aligned} & \int d^4 k' dm^2 M^2 T_3 \theta(-(q+k')^2 - (M+m)^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 k' dm^2 M_p k'_- T_1 \theta(-(q+k')^2 - (M+m)^2) \\ &+ \int d^4 k' dm^2 \left[k'_3 k'_- + \frac{1}{2} k'^2 - \frac{q^2}{2\nu} k'_3 \right] T_2 \theta(-(q+k')^2 - (M+m)^2) \end{aligned} \quad (59)$$

1) (58)第一式就最大量级来说是满足的。

和

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4 k' dm^2 (q^2 - 2\nu k'_-) \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2) \\
 & = \int d^4 k' dm^2 2m^2 \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2) \\
 & \quad + \int d^4 k' dm^2 \frac{q^4}{2M_p \nu^2} k'_- T_2 \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2). \quad (60)
 \end{aligned}$$

(59)式给出含 T_3 的积分项与含 T_1 和 T_2 的积分项的关系,它将代替前述条件 4),而与我们所讨论的最高项消去的问题无关. 将(60)式对 q^2 作微商后,可以得出

$$\begin{aligned}
 & \int d^4 k' dm^2 \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2) \\
 & = \int d^4 k' dm^2 \left[-\frac{q^2}{\nu} k'_- - k'^2 - (M + m)^2 + 2m^2 \right] \\
 & \quad \times \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \delta(-(q + k')^2 - (M + m)^2) \\
 & \quad + \int d^4 k' dm^2 \frac{q^4}{2M_p \nu^2} k'_- T_2 \delta(-(q + k')^2 - (M + m)^2) \\
 & \quad - \int d^4 k' dm^2 \frac{q^2}{M_p \nu^2} k'_- T_2 \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2). \quad (61)
 \end{aligned}$$

由于

$$\delta(-(q + k')^2 - (M + m)^2) \simeq \frac{1}{2\nu} \delta(k'_- - M_p x), \quad (62)$$

故(61)式表明,

$$\int d^4 k' dm^2 \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2)$$

已由于抵消而降低了一个量级. 将(61)式代入(60)式,可以得出,对于

$$\int d^4 k' dm^2 \frac{k'_-}{M_p} \left(T_1 + \frac{k'_-}{M_p} T_2 \right) \theta(-(q + k')^2 - (M + m)^2)$$

也有类似的结果. 这样,就得到了 Bjorken 无标度性.

不过,现在当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, $R \equiv \sigma_s/\sigma_T$ 看来将不趋于零. 因从(58)式, W_1 和 W_2 亦可用 $\text{Im } G_3$ 和 $\text{Im } G_4$ 表示

$$\begin{aligned}
 W_1 & = -\frac{1}{\pi M_p^2} (M_p \nu \text{Im } G_3 - q^2 \text{Im } G_4), \\
 W_2 & = -\frac{1}{\pi} \frac{q^2}{M_p \nu} \text{Im } G_3.
 \end{aligned} \quad (63)$$

本来,当最高项不消去时,由(49)式不难看出

$$\frac{\text{Im } G_4}{\text{Im } G_3} \sim o\left(\frac{M_p}{\nu}\right). \quad (64)$$

因此 W_1 中第二项比起第一项来可以忽略,于是有

$$\frac{W_2}{W_1} \cong \frac{q^2}{\nu^2}, \quad (65)$$

亦即

$$R \cong 0. \quad (66)$$

现在, $\text{Im } G_3$ 最高项已经消去, $\text{Im } G_3$ 与 $\text{Im } G_4$ 具有相同的量级, 因而不再能得出 (65) 式, 除非 $\text{Im } G_4$ 的最高项也消去。但我们找不出这种消去的根据。这样看来, 自旋为 $1/2$ 的部分子, R 也并不一定趋于零。

3. Rittenberg 和 Rubinslein 曾指出^[9], 若换用新的无标度性变量

$$x_w = \frac{q^2 + a^2}{2M_p\nu + M_p^2}$$

($a^2 \lesssim 0.5 \text{ GeV}^2$), 则无标度性成立的范围可扩大到很小的 q^2 值, 直到 $q^2 = 0$ 即实光子的情况。在我们这里, 由于假定了 $\nu \gg M_p$, 而对 q^2 并无限制, 故

$$x_w \cong \frac{q^2 + a^2}{2M_p\nu}. \quad (67)$$

从我们对“击出型”图形的计算结果, 可以给 (67) 式以某种依据¹⁾。因为, 在上面求得的结果中, 无标度性变量是从 $\theta(-(q+k')^2 - (M+m)^2)$ 和 $\delta(-(q+k')^2 - (M+m)^2)$ 两因子定出的。当 q^2 小时, (62) 式需修改为

$$\delta(-(q+k')^2 - (M+m)^2) \cong \frac{1}{2\nu} \delta\left(k'_- - \frac{q^2 + k_1'^2 + k_2'^2 + (m+M)^2}{2\nu}\right),$$

同样

$$\theta(-(q+k')^2 - (M+m)^2) \cong \theta\left(k'_- - \frac{q^2 + k_1'^2 + k_2'^2 + (m+M)^2}{2\nu}\right).$$

由于 $k_1'^2$ 和 $k_2'^2$ 以及 $(m+M)^2$ 都局限在不大的范围, 故若近似将 $k_1'^2 + k_2'^2 + (m+M)^2$ 用一个平均值代替, 即可得到如 (67) 式的无标度性变量, 而

$$a^2 = \overline{k_1'^2 + k_2'^2 + (m+M)^2}. \quad (68)$$

不过, 从 Rittenberg 等人给出的 a^2 值, 要求 M 和 m 非常小。

4. 以上讨论表明, 我们在戴逊表示基础上所作的理论处理, 与 Bjorken 等人的简单理论^[2]有着重要的差异, 因在简单理论中, 直接得出的就是 Bjorken 无标度性, 规范条件是自动满足的, R 近似为零。

为了更确切地将两者进行比较, 我们将本文中的表达式 (18) 也转到“无穷大动量参考系”中来考察。在此系中, (18) 式的结果, 可以用简单理论的语言表述为: 在“无穷大动量参考系”中, 核子等效于一群自由的部分子集合, 每个部分子的纵向动量 $k'_{||} = x'p$, x' 只在 0 与 1 之间, $k'_\perp$ 的最大值是有限的。电子与这些等效部分子间的散射是定域的和不相干的。不同的是, 它们之间的散射不是弹性的, 部分子在吸收虚光子的同时还放出一个等效玻色子 (参见图 9), 它的质量就是谱函数中的参量 m 。这就是 (18) 式与简单理论间的基本区别。

下面对此进行说明。简单理论所给出的图象如图 10 所示。单个部分子对结构张量的贡献为

1) 仅当“击出型”图形在 ν 大而 q^2 小时仍为主的前提下, 这里的论证才成立。

$$\begin{aligned}
 w_{\mu\nu} &= (2\pi)^6 \frac{k'_0}{M} \int d^3p' \frac{1}{2} \sum_{r,s} \langle k', r | J_\mu(0) | p', s \rangle \langle p', s | J_\nu(0) | k', r \rangle \delta^4(q + k' - p') \\
 &= -\frac{Z^2}{4M} \int d^4p' \text{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p}' - M) \gamma_\nu (i\hat{k}' - M)] \theta(p'_0) \delta(p'^2 + M^2) \delta^4(q + k' - p').
 \end{aligned}
 \quad (69)$$

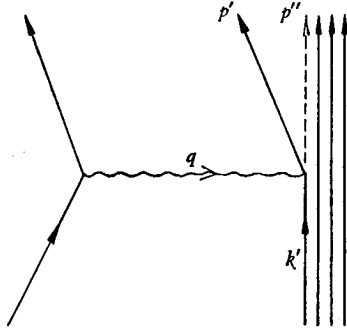


图 9

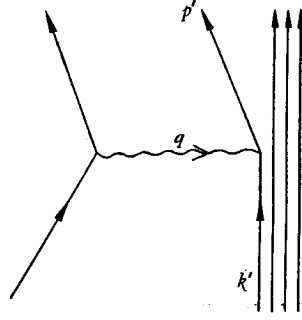


图 10

简单理论假定 $k_{||} = x'p$, $0 < x' < 1$, 而 $k_{\perp}$ 很小. 于是 $k'_0 = \sqrt{M_0^2 + k_{||}^2 + k_{\perp}^2} \cong x'p_0$, 即

$$k' \cong x'p, \quad 0 < x' < 1, \quad (70)$$

但 k'^2 仍等于 $-M^2$. 如用 $F(x')$ 表示部分子具有成分 x' 的密度 ($F(x')$ 相应于文献[2]中的 $\sum p(N)N f_N(x')$), 则

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} &= \int_0^1 w_{\mu\nu} F(x') dx' \\
 &= -\frac{Z^2}{4M} \int d^4p' \int_0^1 dx' \text{Sp} [\gamma_\mu (i\hat{p}' - M) \gamma_\nu (i\hat{k}' - M)] F(x') \theta(p'_0) \delta(p'^2 + M^2) \delta^4(q + k' - p') \\
 &= \frac{Z^2}{M} \int_0^1 dx' [q_\mu k'_\nu + k'_\mu q_\nu + 2k'_\mu k'_\nu - \delta_{\mu\nu} (q \cdot k')] F(x') \delta(q^2 + 2k' \cdot q),
 \end{aligned}
 \quad (71)$$

其中 k' 由(70)式所示. (71)式所给出的 W_1 和 W_2 为¹⁾

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{Z^2}{2M} x F(x), \\
 W_2 &= \frac{M_p Z^2}{M\nu} x^2 F(x).
 \end{aligned}
 \quad (72)$$

我们再来考察(18)式第一式. 在“大动量参考系”中, p 很接近于光锥, 于是 k' 的积分域 S 即成一个细长的四维扁条, 如图 11 所示 (取 k 的方向为 k_3 轴的方向). 当 $|p| \rightarrow \infty$ 时, 扁条的横截面趋于零, 而 $k'_{\perp}$ 的最大值保持为不大的有限值. 因此

$$k' \cong x'p, \quad -1 < x' < 1. \quad (73)$$

引入 $p'' = q + k' - p'$, (18)式第一式可表为

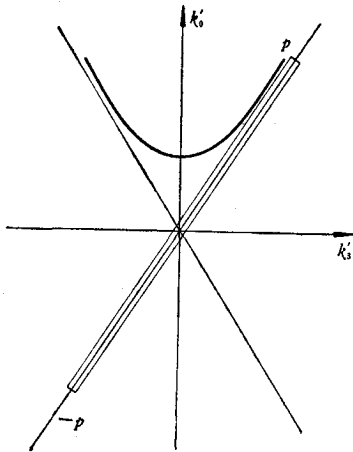


图 11

1) 我们假定了部分子具有确定质量, 如将(72)式中 M 换成 xM_p , 即与文献[2]结果相一致.

$$W_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{Z^2}{4M(2\pi)^3} \int d^4p' d^4p'' d^4k' dm^2 \text{Sp} [\gamma_\mu(i\hat{p}' - M)\gamma_\nu(i\hat{k}'f_1 - Mf_2)] \\ \times \theta(p'_0)\delta(p'^2 + M^2)\theta(p''_0)\delta(p''^2 + m^2)\delta^4(p' + p'' - q - k'), \quad (74)$$

其中

$$f_1 = 4M \left(\frac{1}{x'} T_1 + T_2 \right), \quad f_2 = -4M T_3. \quad (75)$$

在条件(44)式和条件4)满足时,

$$\text{Sp} [\gamma_\mu(i\hat{p}' - M)\gamma_\nu(i\hat{k}'f_1 - Mf_2)] = \text{Sp} [\gamma_\mu i\hat{p}' \gamma_\nu i\hat{k}'f_1 + M^2 \gamma_\mu \gamma_\nu f_2] \\ \cong \text{Sp} [\gamma_\mu i\hat{p}' \gamma_\nu i\hat{k}'] f_1.$$

将此代入(74)式,并对四维扁条体 S 的横截面进行积分,即化得

$$W_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{Z^2}{4M(2\pi)^3} \int d^4p' d^4p'' dm^2 \int_0^1 dx' \text{Sp} [\gamma_\mu i\hat{p}' \gamma_\nu i\hat{k}'] F(x', m^2) \\ \times \theta(p'_0)\delta(p'^2 + M^2)\theta(p''_0)\delta(p''^2 + m^2)\delta^4(p' + p'' - q - k'). \quad (76)$$

上式中 x' 的积分范围本来是在 -1 到 1 之间。但因为 p' 和 p'' 皆为类时矢量,而且 p'_0 和 p''_0 同号,故 $q + k' = p' + p''$ 亦必为类时矢量,即 $(q + k')^2 < 0$ 。以 $k' \cong x'p$ 代入,并略去 k'^2 ,就得到 $x' > x > 0$ 。因此积分限可写成从 0 到 1 。

将(76)式与简单理论的(71)式相对照,不难看出(76)式的确相当于图 10 所描述的图象。只是现在 k'^2 并不等于 $-M^2$,但它的绝对值具有 M_p^2 的量级,因而可以略去。另外,这里的 $F(x', m^2)$ 并不一定恒取正值。

正是由于多出现了这样一个等效玻色子,使得(76)式不象(71)式那样自然满足规范条件,并且在量级上比(71)式要大,而后者正好给出 Bjorken 无标度性。

5. 如果考虑击出的层子还通过强相互作用放出一束强子,那么相应的康普顿散射图形即如图 12 所示。这时,

层子的传播子 $\frac{i\hat{p}' - M}{p'^2 + M^2 - i\varepsilon}$ 应代以

$$\int dM^2 \frac{i\hat{p}' \rho_1(M^2) - M \rho_2(M^2)}{p'^2 + M^2 - i\varepsilon},$$

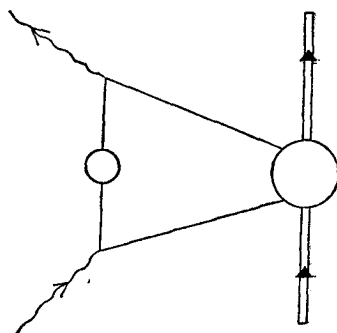


图 12

而条件2)即相应地改为: $\rho_i(M^2)$ 主要集中在有限范围,对于重要的 M^2 值, $\frac{M^2}{M_p^2} \ll 1$ 。

总结上述,我们看到,“击出型”图形是否给出 Bjorken 无标度性,主要取决于谱函数 $\rho(k', p, m^2)$ 对大 m^2 的渐近行为。如果谱函数在 $m^2 \rightarrow \infty$ 时迅速趋于零,是能得到 Bjorken 无标度性的。从层子模型看来, $\rho(k', p, m^2)$ 在 $m^2 \rightarrow \infty$ 时迅速趋于零(例如比 $1/m^4$ 更快)是合理的。另外,我们这里并不要求层子质量比核子质量小,也是与层子模型一致的。但是,谱函数能否象实验结果所要求的那样早就降下来,以及层子质量 M 是否如实验所要求的那样不太大,都还是值得怀疑的问题。此外,能否从强作用本身证明(59)和(60)式成立,也是不清楚的。如果(59)和(60)式对于大的 ν 和 q^2 不能成立,那么“击出型”图形在 ν 和 q^2 大时为主的前提当然就成了问题。在文献[7]中,我们将研究更一般的可能性,并指出,为解释 Bjorken 无标度性,层子击出的机制并不是必需的。

参 考 文 献

- [1] R. P. Feynman, Proceedings of the Third Topical Conference on High Energy Collisions of Hadrons (1969).
- [2] J. D. Bjorken, E. A. Paschos, *Phys. Rev.*, **185** (1969), 1975.
- [3] S. D. Drell, D. J. Levy, T. M. Yan, *Phys. Rev.*, **D1** (1970), 1035.
- [4] P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne, R. D. Short, *Nucl. Phys.*, **B28** (1971), 225;
P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne, *Phys. Reports*, **5C** (1972), 1.
- [5] S. D. Drell, T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 1738.
- [6] F. J. Dyson, *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1460. 又参见其他有关文章, 如: W. Thirring 讲演稿, 见 "Dispersion Relation" 一书.
- [7] 曹昌祺, 物理学报 (待发表).
- [8] 参阅一般量子场论书籍, 例如: 朱洪元, 《量子场论》, §10.3 节.
- [9] V. Rittenberg, H. R. Rubinstein, *Phys. Lett.*, **35B** (1971), 50.

DEEP INELASTIC ELECTRON-PROTON SCATTERING (I)

CAO CHANG-QI QIN DAN-HUA

(Department of Physics, Beijing University)

ABSTRACT

The straton knocked-out diagram is investigated more strictly using the Dyson representation, to clarify: whether the scaling property can indeed be derived from this mechanism and, if so, whether the straton mass is required to be small, and what are the definite criterions for the largeness of ν and q^2 . It is shown that, for large values of ν , the straton knocked-out diagram does lead to a scaling property, but the primary result is $W_1 = \nu f_1(x)$ and $W_2 = f_2(x)$, which differs from that of Bjorken. Only by assuming the knocked-out diagram dominance (for deep inelastic scattering) and using the gauge condition, can W_1 and W_2 be suppressed, thus obtaining the Bjorken scaling. Furthermore, the derivation of scaling merely requires ν to be large (according to some definite criterions), but places no restriction on q^2 . The straton mass M is also not required to be smaller than the nucleon mass. Theoretically, for an arbitrary M , the scaling property can always be derived, provided ν is sufficiently large.