

关于复合场论的微扰展开式*

何祚庥 张肇西 黄 涛

(中国科学院高能物理研究所)

提 要

本文根据以 Bethe-Salpeter 波函数所定义的渐近条件为基础的复合场论而导出了相互作用表象中相应的微扰展开式,应用这一展开式讨论了层子模型计算方法中如何选择费曼图的问题。

一、引 言

我们在文献[1]中建立了一个以 Bethe-Salpeter 方程(以下简称 B-S 方程)为基础的复合场论。这一场论体系是在海森堡表象中构成的。本文将进一步研究这一场论体系的 S 矩阵在相互作用表象中的微扰展开式。

一般地说,用相互作用表象描述的场论体系必须引入相互作用的“绝热撤除”和“绝热引入”的概念,而当相互作用撤除时,两个粒子就要分离,束缚态就不存在。因此,在相互作用表象里是很难建立起束缚态的概念的,除非能找出一种办法使构成束缚态的这部分相互作用不被撤除。但由于已在海森堡表象里建立起物理态的概念和相应的 S 矩阵,并且能把相应的 S 矩阵元表示成为一系列基本场算符的 T 乘积在真空态上的平均值。这就有可能利用表象变换理论将这些场算子 T 乘积在真空态上的平均值变成相应的相互作用表象中的微扰展开式。但这样做就要碰到以下三个问题: 1) 如何定义相互作用表象中态矢的完备集; 2) 在相互作用表象中的完备集和以前在海森堡表象中定义的完备集是否同处于同一个希耳伯空间; 3) 是否有联系两完备集的么正变换。对于第一个问题的回答比较容易,在相互作用表象中希耳伯空间的完备态矢只能取自由哈密顿的本征态,即由裸粒子所张的空间组成完备集,在此完备集中不包含束缚态。对于第二和第三个问题的回答却是比较困难的。在通常的量子力学中,这两组态矢所张的空间将具有同样大小,但在量子场论中却不一定具有同样大小。相反,有一些人的研究表明这两者所张的空间(真空态除外)不在同一区域^[2]。对于后两个问题,我们这里暂不做理论上的探讨,而仅仅假定这两组态矢所张的空间是在同一区域并具有相同的大小,从而存在一个么正变换 V 能把两组完备集联系起来,或至少能近似地用么正变换把这两组完备集联系起来。因而有

$$|\text{裸粒子}\rangle \simeq V |\text{物理粒子}\rangle \quad (1.1a)$$

* 1974 年 9 月 4 日收到。

和

$$\sum_{\text{裸粒子}} |\text{裸粒子}\rangle \langle \text{裸粒子}| \simeq \sum_{\text{物理粒子}} |\text{物理粒子}\rangle \langle \text{物理粒子}| = 1, \quad (1.1b)$$

其中物理粒子是指具有“入”态或“出”态的稳定粒子和稳定的束缚态¹⁾。当然,如果基本场不存在稳定的渐近态,那末其“入”态或“出”态将在物理粒子集合中被排除。

现在当我们有了如(1.1)式的假定以后,这就有可能将以前用基本场的内插场 T 乘积的真空态平均值所表示的 S 矩阵元 [见(2.1)式] 转换到相互作用表象,从而给出相应的微扰展开式。正由于这一点,我们引进了假定式(1.1)。

在第二节中我们将具体给出这一 S 矩阵的展开式,给出相应费曼图的规则,并将这里给出的费曼规则和以前在层子模型^[3]研究中曾经用过的“结构模型协变场论方法”^[4]进行比较。在第三节中,我们分别就一些具体过程导出在层子模型中相应的 S 矩阵元的近似计算公式。此外,为今后应用到具体问题的方便,我们在附录中给出了在动量表象中的费曼规则的说明。

二、 S 矩阵的微扰展开式

在文献[1]中,曾给出束缚态 S 矩阵元的公式:

$$\begin{aligned} \langle p'_1 \zeta'_1 \cdots p'_m \zeta'_m | p_1 \zeta_1 \cdots p_n \zeta_n \rangle &= I_{p'_1 \zeta'_1 \cdots p'_m \zeta'_m; p_1 \zeta_1 \cdots p_n \zeta_n} \\ &+ \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_{2m} d^4 x_1 \cdots d^4 x_{2n} \chi_{p'_1 \zeta'_1}(y_1 y_2) \cdots \chi_{p'_m \zeta'_m}(y_{2m-1}, y_{2m}) \\ &\cdot G(y_1 \cdots y_{2m}; x_1 \cdots x_{2n}) \chi_{p_1 \zeta_1}(x_1 x_2) \cdots \chi_{p_n \zeta_n}(x_{2n-1}, x_{2n}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $\chi_{p\zeta}$ 是动量为 p , 自旋为 ζ 的介子波函数, $\bar{\chi}_{p\zeta}$ 是共轭波函数, 这些波函数满足自旋 1/2 的正反粒子所组成的 B-S 方程²⁾。格林函数 $G(y_1 \cdots y_{2m}; x_1 \cdots x_{2n})$ 定义如下:

$$\begin{aligned} G(y_1 \cdots y_{2m}; x_1 \cdots x_{2n}) &= (\bar{O} + \bar{I})_{y_1 y_1} \cdots (\bar{O} + \bar{I})_{y_{2m-1} y_{2m}} \langle 0 | T(N(\Psi(y_1) \bar{\Psi}(y_2)) \cdots N(\Psi(y_{2m-1}) \bar{\Psi}(y_{2m})) \\ &\cdot N(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) \cdots N(\Psi(x_{2n-1}) \bar{\Psi}(x_{2n})) | 0 \rangle (\bar{O} + \bar{I})_{x_1 x_2} \cdots (\bar{O} + \bar{I})_{x_{2n-1} x_{2n}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $N(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) \equiv T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) - \langle 0 | T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) | 0 \rangle$, 即扣除不相联结的图的贡献。下面将略去符号 N , 但抛去那些不相联结的图。算子 $\bar{O}$ 和 $\bar{I}$ 是 B-S 方程的算子,

在这里 $\bar{O}_{x_1 x_2} \equiv \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} + m_1 \right) \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_{2\nu}} + m_2 \right)$, $\bar{I}$ 是积分算符, 且有 $(\bar{O} + \bar{I})_{x_1 x_2} \chi_{p\zeta}(x_1 x_2) = 0$ 。从(2.1)式和(2.2)式可以看出是如何求出函数 G 。由(2.2)式可知, 主要是将(2.2)式中的

$$\begin{aligned} R(y_1 \cdots y_{2m}; x_1 \cdots x_{2n}) &= \langle 0 | T(\Psi(y_1) \bar{\Psi}(y_2) \cdots \Psi(y_{2m-1}) \bar{\Psi}(y_{2m}) \phi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \cdots \Psi(x_{2n-1}) \bar{\Psi}(x_{2n})) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

变换到相互作用表象, 从而给出微扰展开式。定义相互作用表象的场量 $\phi(x)$ 通过么正变

1) S. D. Drell, T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 1738. 在这一文献中提到希望能有反映假定式(1.1)的量子场论, 本文可以说是具体实现 Drell 和李政道猜测的方案之一。

2) 这里只限于讨论由正反层子组成介子的情况, 但不难推广到三个层子组成重子或质子、中子组成氦核等其它情况。

换 U 和海森堡表象场量 $\Psi(x)$ 相联系式是

$$\Psi(x) = U(0, t)\phi(x)U(t, 0). \quad (2.4)$$

定义海森堡表象真空态 $|0\rangle$ 和相互作用表象真空态 $|0\rangle$ 的联系式是¹⁾

$$|0\rangle = U(0, -\infty)|0\rangle = U(0, \infty)|0\rangle, \quad (2.5)$$

其中

$$U(t, t_0) = T\left(e^{-i\int_{t_0}^t H_I(t)dt}\right). \quad (2.6)$$

这意味着在海森堡表象里假定了算子集合 $\{\Psi(x)\}$ 是完备的, 而在相互作用表象里, 算子集合 $\{\phi(x)\}$ 也是完备的. 么正变换 $U(0, t)$ 给出了两个算符完备集合之间的联系. 注意这里并没有要求建立两组基矢或态的完备集合之间的具体联系, 虽然由 (2.4) 式将表明这种联系必然存在. 在进行表象变换后, 就有

$$\begin{aligned} & R(y_1 \cdots y_{2m}; x_1 \cdots x_{2n}) \\ &= \langle 0 | T(\phi(y_1)\bar{\phi}(y_2) \cdots \phi(y_{2m-1})\bar{\phi}(y_{2m})\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2) \cdots \phi(x_{2n-1})\bar{\phi}(x_{2n})S) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中

$$S = U(\infty, -\infty). \quad (2.8)$$

将 (2.7) 式代入 (2.2) 式, 再将 G 代入 (2.1) 式, 将这一表达式和通常的点粒子 S 矩阵进行比较, 可以看出这里的 S 矩阵实际上只是将两个粒子的平面波换成 B-S 波函数, 并在该算符的表示式中多了一个积分算符 $\bar{I}$ 或 $\bar{I}$.

仔细分析 (2.7) 式中的 R 函数, 将 S 算符展开, 写出微扰展开式, 画出相应的费曼图, 可以看出 R 函数的费曼图总可以分拆成三部分, 即入射的和出射的双粒子格林函数 K 以及 (2.1) 式中所需要的 G 函数²⁾, 即有

$$\begin{aligned} & R(y_1 \cdots y_{2m}; x_1 \cdots x_{2n}) \\ &= \langle 0 | T(\phi(y_1)\bar{\phi}(y_2) \cdots \phi(y_{2m-1})\bar{\phi}(y_{2m})\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2) \cdots \phi(x_{2n-1})\bar{\phi}(x_{2n})S) | 0 \rangle \\ &= \int d^4y'_1 \cdots d^4y'_{2m} d^4x'_1 \cdots d^4x'_{2n} K(y_1 y_2; y'_2 y'_1) \cdots K(y_{2m-1} y_{2m}; y'_{2m} y'_{2m-1}) \\ &\quad \cdot G(y'_1 \cdots y'_{2m}; x'_1 \cdots x'_{2n}) K(x'_{2n-1} x'_{2n}; x_{2n} x_{2n-1}) \cdots K(x'_1 x'_2; x_2 x_1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中

$$K(y_1 y_2; x_2 x_1) \equiv \langle 0 | T(\Psi(y_1)\bar{\Psi}(y_2)\Psi(x_2)\bar{\Psi}(x_1)) | 0 \rangle.$$

具体说来, 一部分是和初态束缚态相联结的格林函数 K , 另一部分是和末态束缚态波函数相联结的格林函数 K , 第三部分是凡除去可划入上两部分格林函数内以外的所剩余的部分 G . 举例来说, 在介子和介子散射的情形, 最简单的 R 函数的图形如图 1. 由图 1 可以看出, 和 $y_1 y_2; y_3 y_4; x_1 x_2; x_3 x_4$ 相联系的内部介子线都可以归之于和束缚态相联系的格林函数 K 里面, 而剩下的不能再分拆的图形如图 2 所示.

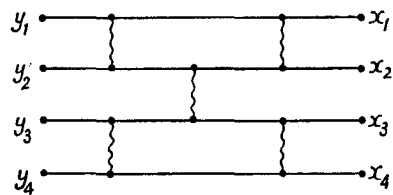
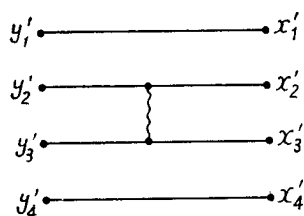


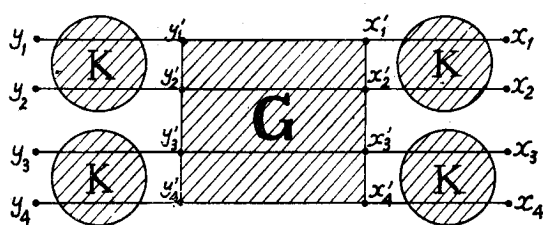
图 1 两个束缚态介子散射的 R 函数的一个简单的图形

1) 这里把不导致任何可以观察效应的相因子从略.

2) 这样分拆成三部分总是能做到的. 分出入射和出射双粒子格林函数的原因是考虑到所处理问题的渐近态是相应于双粒子束缚态.

至于(2.9)式中的 G 就是所有不可分拆图形的总和. 对于不可分拆的图形可定义如下: “在 R 函数中, 任意切割和束缚态波函数相联通的一对内线都不能再把费曼图形分拆成两部分, 其中与波函数相联的部分归之于格林函数 K , 而剩下的部分, 与未切割的图不相同的图形, 称为不可分拆的图形.” 例如, 如果再对图 2 中和束缚态波函数相联通的一对内线再进行切割, 只可能把图 2 的端点 $y'_1, y'_2, \dots$ 等位置移动了一下, 其图形仍和原来相等. 而图 1 经切割后就会得到如图 2 的图形. 所以图 1 是可分拆的, 图 2 是不可分拆的. 如上所述, 如果我们继续不断地将 R 函数中每个费曼图都拆成三部分, 并把这些图都加起来, 即能写成(2.9)式, 亦即用费曼图表示出来(如图 3).

图 2 在图 1 中不可分拆部分, 即 G

$$R =$$
图 3 分拆成三部分的 R 函数的费曼图

利用类似的方法, 对于任何物理过程都可以进行同样的手续, 得到相应的(2.9)式. 将(2.9)式代入(2.2)式, 并利用 B-S 方程格林函数的公式

$$\begin{aligned} (\bar{O} + \bar{I})_{y_1 y_2} K(y_1 y_2; y'_1 y'_2) &= \delta^4(y_1 - y'_1) \delta^4(y_2 - y'_2), \\ K(x'_1 x'_2; x_2 x_1) (\bar{O} + \bar{I})_{x_1 x_2} &= \delta^4(x'_1 - x_1) \delta^4(x'_2 - x_2), \end{aligned} \quad (2.10)$$

那末就可以得到 $G \equiv G$. 也就是说, 由(2.9)式分出的代表不可分拆的图形 G 正是(2.2)式所定义的格林函数 G .

把上面所探讨的结果总结起来, 可见束缚态 S 矩阵的微扰展开式的费曼规则是: 在 S 矩阵的展开式中, 除了要用束缚态 B-S 方程波函数代替通常费曼图中相应的一对平面波的外线外, 而在选择和函数 G 相对应的图形时仅能取不可分拆的图形.

下面将给出一些具体例子, 表明上述规则是怎样应用到具体问题的, 同时为了今后方便地应用到较复杂的问题, 我们将在附录中给出较具体的费曼规则.

在进一步应用到具体问题以前, 我们首先将这里的结果和 1965—1966 年间研讨层子模型时^[3]所提出的“结构模型协变场论方法”^[4]作一比较. 文献[4]给出的这一协变场论方法的基本精神是:

1) 给出所有可能的费曼图形.

2) 根据通常场论的费曼规则, 写出 S 矩阵元的公式, 其中复合粒子外线仍沿用通常点粒子的费曼规则, 但对复合粒子分解成基础粒子的顶点却用顶角函数

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 + p_2) \Gamma(p_1 p_2), \\ (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 + p_2) \bar{\Gamma}(p_2, p_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

分别描写初态和末态.

3) 利用顶角函数和相对论波函数间的关系

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2P_0}}\Gamma(p_1p_2) &= -S_F^{-1}(p_1)\chi(p_1, p_2)S_F^{-1}(p_2), \\ \frac{1}{\sqrt{2P_0}}\bar{\Gamma}(p_2p_1) &= -S_F^{-1}(p_2)\bar{\chi}(p_2, p_1)S_F^{-1}(p_1),\end{aligned}\quad (2.12)$$

而得到 S 矩阵元的微扰展开式.

将上述语言换到坐标表象来表示, 也就是有

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{p}'_1\zeta'_1\cdots\mathbf{p}'_m\zeta'_m|\mathbf{p}_1\zeta_1\cdots\mathbf{p}_n\zeta_n\rangle \\ &= \int d^4y_1\cdots d^4y_{2m}d^4x_1\cdots d^4x_{2n}d^4u_1\cdots d^4u_{2m}d^4v_1\cdots d^4v_{2n}\bar{\Gamma}_{p\zeta}(u_2u_1)K_0(u_1u_2; y_2y_1) \\ &\quad \cdots G(u_1\cdots u_{2m}; v_1\cdots v_{2n})\cdots K_0(x_1x_2; v_2v_1)\Gamma_{p\zeta}(v_1v_2).\end{aligned}\quad (2.13)$$

再利用关系式

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{p\zeta}(y_2y_1) &= \int d^4u_1d^4u_2\bar{\Gamma}_{p\zeta}(u_2u_1)K_0(u_1u_2; y_2y_1), \\ \chi_{p\zeta}(x_1x_2) &= \int d^4v_1d^4v_2K_0(x_1x_2; v_2v_1)\Gamma_{p\zeta}(v_1v_2),\end{aligned}\quad (2.14)$$

就可导出 (2.1) 式. (2.14) 式中的 K_0 是指

$$K_0(x_1x_2; y_2y_1) = -\frac{1}{4}S_F(x_1 - y_1)S_F(x_2 - y_2). \quad (2.15)$$

(2.14) 式是很容易证明的, 这只要利用束缚态波函数所满足的微分方程和积分方程以及顶角函数的定义就可导出来, 因为

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\chi_{p\zeta}(y_1y_2) &= \left(\gamma_\mu\frac{\bar{\partial}}{\partial y_{1\mu}} + m_1\right)\langle 0|\mathbf{T}(\Psi(y_1)\bar{\Psi}(y_2))|\mathbf{p}\zeta\rangle\left(\gamma_\mu\frac{\bar{\partial}}{\partial y_{2\mu}} + m_2\right) \\ &= \Gamma_{p\zeta}(y_1y_2),\end{aligned}\quad (2.16)$$

再积分后就得 (2.14) 式.

从以上的比较可以看出, “结构模型协变场论方法”和这里给出的结果基本上是一致的. 但是, 文献[4]所给出的计算方法有两点不明确的地方: 1) 未说清楚应如何选择费曼图. 正如这里所分析的, 对于函数 G 只能取由裸粒子构成的不可分拆的费曼图, 而不是任意可能的费曼图. 所谓费曼图只能是某一微扰展开式的图形的表现, 在没有弄清楚正确的微扰展开式以前是无法正确地给出选图的规则的; 2) 所取的费曼图. 既有裸粒子内线而又同时包含复合粒子的内线, 这也是不明确的. 因为由裸粒子所组成的基矢和由物理粒子所组成的态矢是希耳伯空间中不同的完备集合, 微扰展开式只能取某一完备集合. 我们可以用物理粒子来展开(如通常的色散关系理论), 可以用裸粒子来展开, 当然也可用其它完备集合来展开. 但不能既挑选了由裸粒子展开的费曼图, 又挑选了由物理粒子展开的费曼图, 这样就可能有所重复.

对于 (2.1) 式除了可用上述费曼规则给出它的微扰展开式, 当复合粒子的耦合较弱时, 还可以给出另一种形式的费曼规则. 如果复合粒子的耦合较弱, 即当结合能 $E_0 \ll m$, 并有动量传递 $q \gg E_0$ 时 (如在原子或原子核的情况), 就可以略去 (2.2) 式中的积分算子 $\bar{I}$ (因为 $\bar{I}$ 反映着结合能的大小)^[5], 这时 (2.2) 式的 G 函数就和通常的 L-S-Z 场论中该算符的格林函数完全一样. 也就是说, 对这类格林函数的计算可以和通常的场论一样, 而仅

仅把一对平面波的外线换成 B-S 方程束缚态的波函数。但如果要求计算有较高的精确度,要考虑一些高次修正,就必须计算积分算子 I 。

三、束缚态微扰展开式在层子模型上的应用

在本节中我们将应用这一场论来导出层子模型理论中所用的各种公式。

1. 湮灭过程

这里所讨论的如 $\pi \rightarrow \mu\nu$, $V \rightarrow \gamma$ 等过程。问题就归结为计算下列湮灭矩阵元,用标准方法可得

$$\begin{aligned} & \langle 0 \| J(Z) \| p \zeta \rangle \\ &= \int d^4 X d^4 x \langle 0 \| T \left(J(Z) \Psi \left(X + \frac{x}{2} \right) \bar{\Psi} \left(X - \frac{x}{2} \right) \right) \| 0 \rangle (\bar{O} + \tilde{I})_{x_1 x_2} \chi_{p \zeta}(X, x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

令

$$\begin{aligned} J_\mu(Z) &= i \bar{\Psi}(Z) \Gamma_\mu \Psi(Z), \\ \Gamma_\mu &= \begin{cases} \gamma_\mu & \text{对于电磁流,} \\ \gamma_\mu \gamma_5 & \text{对赝矢流.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

将 (3.2) 式代入 (3.1) 式,利用 (2.10) 式,可得

$$\begin{aligned} \langle 0 \| J(Z) \| p, \zeta \rangle &= -i \int d^4 X d^4 x \delta^4(Z - X) \delta^4(x) \text{Sp} \Gamma_\mu \chi_{p \zeta}(X, x) \\ &= -i \text{Sp} \Gamma_\mu \chi_{p \zeta}(Z, 0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

值得注意的是, (3.3) 式的结果在现有理论假设下是严格的。只要该算符表示为 (3.2) 式 (即使存在着中性胶子), 就有 (3.3) 式。这一结果已在文献 [3] 中利用波函数的定义得到。这里借助格林函数也得到同样结果。

2. 跃迁过程

这主要是计算跃迁矩阵元。用标准方法可得

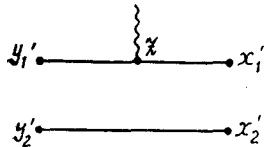
$$\langle p' b \| J(Z) \| p a \rangle = \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 \bar{\chi}_{p' b}(x_2 x_1) G(x_1 x_2; z; y_2 y_1) \chi_{p a}(y_1 y_2), \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{aligned} & G(x_1 x_2; z; y_2 y_1) \\ &= (\bar{O} + \tilde{I})_{x_1 x_2} \langle 0 \| T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) J(z) \Psi(y_2) \bar{\Psi}(y_1)) \| 0 \rangle (\bar{O} + \tilde{I})_{y_1 y_2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

如果将 G 用一系列不可分拆图形来展开, 就有

$$G = G_0 + G_1 + \cdots. \quad (3.6)$$



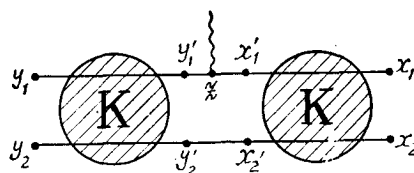
从上一节讨论可知, 最低次不可分拆的图形如图 4。

这里需要回答的是如何从 (3.5) 式给出 G_0 ? 从 (2.9) 式可知, G 函数可由下列式子定义, 即有

$$\begin{aligned} & \langle 0 \| T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) J(z) \Psi(y_2) \bar{\Psi}(y_1)) \| 0 \rangle \\ &= \int K(x_1 x_2; x_2' x_1') G(x_1' x_2'; z; y_2' y_1') K(y_1' y_2'; y_2 y_1) d^4 x_1' d^4 x_2' d^4 y_1' d^4 y_2'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

当 G 取 G_0 图时, 相应的 R 函数如图 5。由于在图 6 中由点 z 和两边 K 相联结的层子线只

能是一根内线, 即 S_F . 这一 S_F 将归并到两边的双粒子格林函数 K 内, 因而对于线段 $y'_1 z$ 和 $z x'_1$ 将由 $\delta^4(y'_1 - z)$ 和 $\delta^4(z - x'_1)$ 来表示. 在图 6 下面的一根内线从 R 函数来看只是一个 $-\frac{1}{2} S_F$. 为了能在两边的 K 函数中各自分到一个 $-\frac{1}{2} S_F$, 这里

图 5 和 G_0 相应的 R_0 函数的费曼图

采用和文献 [4] 相类似的办法, 即引进一个因子 S_F^{-1} , 定义

$$\begin{aligned} \int d^4 x_2 S_F(x_3 - x_2) S_F^{-1}(x_2 - x_1) &= \delta^4(x_3 - x_1), \\ \int d^4 x_2 S_F^{-1}(x_3 - x_2) S_F(x_2 - x_1) &= \delta^4(x_3 - x_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

由 (3.8) 式可知

$$S_F(x_4 - x_1) = \int S_F(x_4 - x_3) S_F^{-1}(x_3 - x_2) S_F(x_2 - x_1) d^4 x_2 d^4 x_3. \quad (3.9)$$

也就是将一个 S_F 拆成两个 S_F 和一个 S_F^{-1} 的乘积, 这样就可以将图 5 和图 6 中 $y'_2 x'_2$ 用 S_F^{-1} 来表示. 由 S_F 的定义

$$S_F(x_1 - x_2) = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} e^{ip(x_1 - x_2)},$$

可知

$$S_F^{-1}(x_1 - x_2) = -\frac{i}{2(2\pi)^4} \int d^4 p (i\hat{p} + m) e^{ip(x_1 - x_2)}. \quad (3.10)$$

因此函数 G_0 就表示为

$$G_0(x'_1 x'_2; z; y'_2 y'_1) = \delta^4(y'_1 - z) \delta^4(z - x'_1) \gamma_\mu(-z) S_F^{-1}(x'_2 - y'_2). \quad (3.11)$$

进一步还可以求出许多高次图, 如在脉冲近似下可取一系列的图(见图 6). 由这些

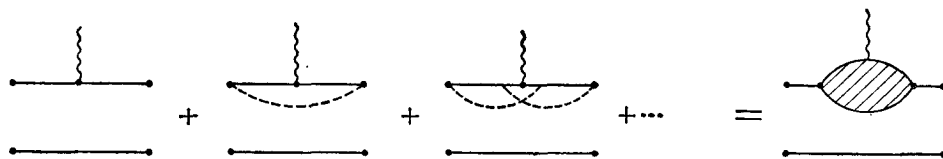
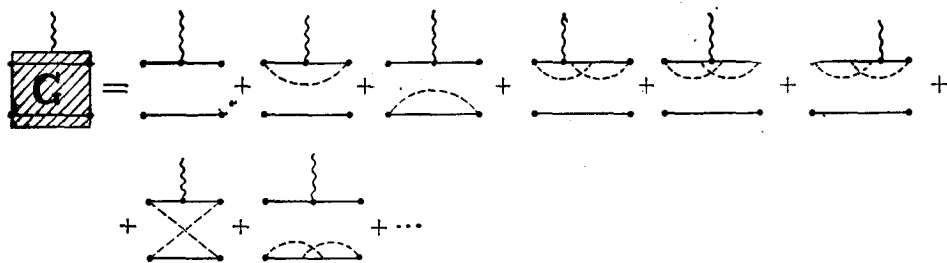
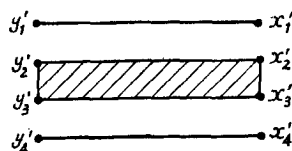


图 6 脉冲近似下可能取的费曼图

图求和就可得到在层子模型计算中引进的层子形状因子和反常磁矩等^[3]. 值得注意的是, 这里的形状因子并不在层子的质壳上, 没有质壳条件, 所包含的项要较为复杂些. 至于更普遍的情况将是很复杂的, 如图 7 所表示的展开式.

3. 复合粒子散射

对于两个复合粒子的散射是 Mandelstam 方法所不能严格处理的一个问题^[6], 因为那里无法较精确地定义两个复合粒子的“入”态和“出”态, 而这里可以较精确地定义. 对于散射过程的 G 函数, 可以用图 8 来表示(即图 3 中的 G 部分). 在脉冲近似下, 函数 G 可近似地表示为图 9 中的费曼图, 其中 $y'_2 y'_3 x'_3 x'_2$ 部分代表双层子间或正反层子间的散射振幅.

图7 G 的普遍的展开式图8 图3中的 G 部分图9 脉冲近似下散射过程中的 G

虽然图9按束缚态散射过程来说是不可分拆的图形,但对两层子间的相互作用却包括了全部的可能的费曼图形,只不过这里的散射振幅并不在质壳上.把这些脉冲近似下的各散射振幅加起来,就可得相加性原则.值得注意的是,这里推导出这些结果时不一定要将相互作用分为超强和次强两部分,再令次强相互作用写成等效哈密顿函数的形式.

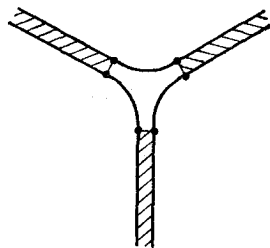
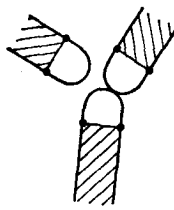
附 录

关于束缚态微扰展开式的费曼规则

为了计算的方便,以下给出动量空间的费曼规则:

1. 所有费曼图将由外线和不可分拆图形所组成.在不可分拆图形里,其内线是基本场的“收缩”,但要略去每一复合粒子的基本场量间的“自收缩”的费曼图[因为(2.2)式中真空平均值实际上是 N 乘积的复合场算符间的“收缩”,其中要扣去 $\langle 0|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2))|0\rangle$ 的项].

例如,对于 $\rho \rightarrow \pi\pi$ 的过程中,最低次费曼图可以有附录图1(a)的图形,但不能有附录图1(b)的图形.

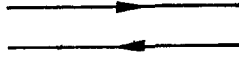
(a) $\rho \rightarrow \pi\pi$ 过程的最低次的费曼图

(b) 要略去的费曼图形

附录图1

2. 费曼图的外线有下列两种情况:

1) 稳定的简单粒子如光子、轻子等用简单的图线来表示,如附录图2和3.



附录图 2 正反费米子



附录图 3 光子

每一条代表费米子产生的外线贡献一个因子:

$$\sqrt{\frac{m}{E}} \bar{u}_r(\mathbf{p}), \quad (\text{A.1})$$

其中 $\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$; 每一条代表费米子消失的外线贡献一个因子:

$$\sqrt{\frac{m}{E}} u_r(\mathbf{p}); \quad (\text{A.2})$$

每一条代表反费米子产生的外线贡献一个因子:

$$\sqrt{\frac{m}{E}} \bar{v}_r(\mathbf{p}), \quad (\text{A.3})$$

其中有 $\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = -\delta_{rs}$; 每一条代表反费米子消失的外线贡献一个因子:

$$\sqrt{\frac{m}{E}} v_r(\mathbf{p}); \quad (\text{A.4})$$

每一条代表光子产生和消失的外线贡献一个因子:

$$\frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega}}. \quad (\text{A.5})$$

所有这些规则都和通常情况相同。

2) 复合粒子如 π 介子、 ρ 介子等介子族用右边黑影双线条来表示, 如附录图 4。



附录图 4 复合粒子

每一个代表复合粒子产生的外线贡献一个因子:

$$(2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \bar{\chi}_{p_1}(p_2, p_1), \quad (\text{A.6})$$

每一个代表复合粒子消失的外线贡献一个因子:

$$(2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \chi_{p_1}(p_1, p_2), \quad (\text{A.7})$$

其中波函数 $\chi_{p_1}(p_1, p_2)$ 的定义如下:

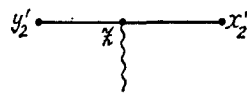
$$\chi_{p_1}(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2)) | p_1 \rangle = e^{iPx} \chi_{p_1}(x). \quad (\text{A.8})$$

$$(2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \chi_{p_1}(p_1, p_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} \chi_{p_1}(x_1, x_2), \quad (\text{A.9})$$

$$\chi_{p_1}(p_1, p_2) = \chi_{p_1}(p) = \int dx e^{-iPx} \chi_{p_1}(x). \quad (\text{A.10})$$

并满足正交归一化条件^[1]:

$$\int d^4p \bar{\chi}_{p', \nu}(p) \hat{Q}(p, p') \chi_{p, \nu}(p) = \delta_{\nu \mu}, \quad (\text{A.11})$$



附录图 5 介子跃迁费曼图的 G 部分

其中 $\hat{Q}(p, p')$ 是归一化的权重算符^[1]。

3. 对于 G 图中的内线分为两类。一类是由粒子的收缩而形成的内线, 称为正常内线。另一类是和 G 的端点直接相联结的那些内线, 称为反常内线。对于反常内线又分两种情况: 对于那些从端点到端点的内线称为第一种反常内线; 对于那些只有一个端点的内线称为第二种反常内线。如介子跃迁的附录图 5 中 $x'_1 y'_1$ 是第一种反常内线, $x'_2 z$ 和 zy'_2 是第二种反常内线, 在动量空间中这些内线的贡献是: 每一条第一种反常内线贡献一个因子:

$$(2\pi)^{-4} \int d^4p \bar{\psi}(p) = i(2\pi)^{-4} \int d^4p (i\hat{p} + m); \quad (\text{A.12})$$

每一条第二种反常内线贡献一个因子:

$$(2\pi)^{-4} \int d^4 p; \quad (\text{A.13})$$

每一条费米子正常内线贡献:

$$(2\pi)^{-4} \int d^4 p f_F(p) = i(2\pi)^{-4} \int d^4 p \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}; \quad (\text{A.14})$$

每一条玻色子(如矢量胶子)内线贡献:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \Delta_{F\mu\nu}(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 + m^2}. \quad (\text{A.15})$$

4. 对于顶点函数其贡献是,层子和中性矢量胶子的相互作用顶点贡献一个因子:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p) g \gamma_\mu. \quad (\text{A.16})$$

对于电磁相互作用和弱相互作用顶点贡献一个因子:

$$- (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q) \Gamma_\mu(q), \quad (\text{A.17})$$

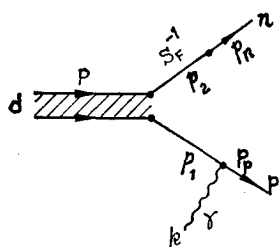
其中

$$\Gamma_\mu(q) = \begin{cases} eQ\gamma_\mu & \text{电磁相互作用,} \\ \frac{G}{\sqrt{2}} (\cos \theta T_- + \sin \theta V_-) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) & \text{弱相互作用.} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

5. 每个 1/2 自旋的基本场所形成的封闭圈贡献一个求迹:

$$- \text{Sp}. \quad (\text{A.19})$$

对于正反 1/2 自旋粒子形成束缚态的情况, 必须注意由束缚态形成的封闭圈的求迹却没有负号。同时需要注意, 我们约定取束缚态中反粒子的动量方向与反粒子线方向相反。



附录图 6 光裂 d 核的最低次费曼图

6. 对于相空间积分, 要取

$$\sum_p \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p. \quad (\text{A.20})$$

下面我们举例来说明上述规则对于

$$\gamma + d \rightarrow p + n$$

的过程, 可以写下附录图 6 的费曼图。

利用上述费曼规则易写出下列跃迁矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle pn | d\gamma \rangle &= eQ \sqrt{\frac{m_n m_p}{E_n E_p}} \bar{u}_s(p_n) \bar{u}_s(p_p) \epsilon \frac{1}{\sqrt{2k_0}} (2\pi)^{-4} \int d^4 p_1 (-) (2\pi)^4 \delta^4(k + p_1 - p_p) \\ &\quad \cdot i(2\pi)^{-4} \int d^4 p_2 (i\hat{p}_2 + m_n) (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) \chi_{p_2}(p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

应注意 (A.21) 式中有一因子 $(i\hat{p}_2 + m_n)$, 当人们将这一因子作用到外中子线时即等于零, 似乎这一图形的贡献是零。但实际上由于 B-S 方程波函数 $\delta^4(p - p_1 - p_2) \chi_{p_2}(p_1 - p_2)$ 有极点 $(i\hat{p}_2 + m_n)^{-1}$, 所以整个图形的贡献并不是零。

参 考 文 献

- [1] 何祚麻、黄涛, 物理学报, **23** (1974), 113; 264.
- [2] L. Van-Hove, *Acad. Roy. de Belgique Bulletin*, **37** (1951), 1055; *Physica*, **21** (1955), 901.
- [3] 1966 年北京暑期物理讨论会上北京基本粒子理论组的论文.
- [4] 中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北京大学理论物理研究室基本粒子理论组, 北京大学学报, **12** (1966), 113.
- [5] A. Klein, C. Zemach, *Phys. Rev.*, **108** (1957), 126.
- [6] S. Mandelstam, *Proc. Roy. Soc.*, **A233** (1955), 248.

ON THE PERTURBATION EXPANSION OF THE QUANTIZED COMPOSITE FIELD THEORY

HE ZUO-XIU ZHANG ZHAO-XI HUANG TAO

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

A perturbation series of a quantized composite field theory which is based upon the asymptotic condition defined by the Bethe-Salpeter wave function is derived from the interaction representation. The problem of choosing graphs describing various processes in the straton model is discussed.