第25卷 第3期 物 理 学 报 Vol. 25, No. 3
1976年5月 ACTA PHYSICA SINICA May, 1976

生成坐标方法与原子核集体运动(II)
偶-偶原子核的多极激发和对激发*

徐躬耦 王顺金 刘敦桓 杨亚天 毛铭德
(兰 州 大 学)

提　　要

本文进一步讨论了运用生成坐标方法研究原子核集体运动的问题，并以统一的方式具体研究了球形核和变形核的多极激发以及正常核和超导核的对激发.

一、引　　言

在文献[1]中，我们把生成坐标方法作为在子空间内求解多体问题薛定谔方程的近似方法进行了一般讨论. 本文将进一步具体讨论运用生成坐标方法给出原子核集体运动模型的理论基础[2].

在核结构理论中，自洽场是处理问题的出发点. 核子在自洽场中的运动表述原子核的独立粒子运动形态，而残余作用导致组态混合，给出了原子核的集体运动形态.

在某一给定的单粒子势场的表象中，粒子的产生算子和消灭算子为 b_p^+, b_p. 在自洽场表象中，粒子的产生算子和消灭算子为 a_p^+, a_p. 它们之间可以用保持反互易关系不变的正则变换联系起来，此正则变换则由变分原理确定.

保持反互易关系不变的正则变换群是相当广泛的，其中一个子群是齐次的线性变换群，即 O_{2n} 群[3]，它的任意元素为

$$g(\alpha, \beta) = \exp\left\{i \sum_{pq} (\bar{\alpha}_{pq} J_{pq} + \bar{\beta}_{pq} P_{pq}^+ + \beta_{pq} P_{pq})\right\}, \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} &J_{pq} = b_p^+ b_q, \ P_{pq}^+ = b_p^+ b_q^+, \ P_{pq} = b_q b_p, \\ &\bar{\alpha}_{pq} = \alpha_{qp}, \quad \beta_{pq} = -\beta_{qp}, \end{aligned} \tag{2}$$

α_{pq}, β_{pq} 均为复数. 此 O_{2n} 群相应于通常用以导出 HFB 方程的正则变换. 只由 J_{pq} 构成的子群是 U_n 群，相应于通常用以导出 HF 方程的正则变换. 只由 $J_{pp} + J_{\bar{p}\bar{p}}$, $P_{p\bar{p}}^+$, $P_{p\bar{p}}$ 构成的子群是 $SU_2(1) \otimes SU_2(2) \otimes \cdots \otimes SU_2\left(\frac{n}{2}\right)$, 相应于通常用以给出 BCS 解的正则变换. 对于上述这些变换群，粒子的产生算子和消灭算子并不具有确定的粒子数和角动量量子数，这给进一步考虑问题带来了困难. 为了使构成集体自由度算子的单粒子算子具

* 1974年8月19日收到.

有确定的量子性质，正则变换群应该和哈密顿量的对称群 S 可以互易. 这种正则变换群的无穷小生成算子应是由一个产生算子和一个消灭算子所构成的双线性式，还应是偶宇称的标量；原子核内存在着两类核子，为了使单粒子算子具有确定的电荷数，应考虑分别表述两类核子的群的直积. 我们采用这种保持确定的粒子数、电荷数、宇称和角动量量子数的自洽场表象，作为讨论集体运动的出发点. 对形变和对关联等集体效应，则用生成坐标方法作进一步的处理.

二、原子核的集体多极激发

在文献 [1] 中已指出子空间的选择是生成坐标方法的关键问题. 用一个群来生成一个子空间，群的无穷小生成算子同时是表述集体自由度的算子. 这种选择应满足下述要求:

1. 为了反映能够在一个多自由度体系中单独考虑相应于某种集体自由度的运动形态这一物理事实，由群 G 生成的子空间应当是哈密顿量 H 的近似的不变子空间;

2. 为了保持守恒定律，由群 G 生成的子空间应当是哈密顿量的对称群 S 的不变子空间;

3. 为了反应集体运动形态的特征，表述集体自由度的算子应相应于许多单粒子组态的激发，这些互相混合的单粒子组态应当有近乎均匀的分布，而且彼此之间应有一定的位相关联;

4. 表征集体自由度的算子的具体形式应由动力学方程来确定.

我们把表述原子核的集体多极激发的算子 $Q_{\lambda\mu}$ 一般地写为[1)]

$$Q_{\lambda\mu} = \sum_{pm_pqm_q} C_{pq}^{(\lambda)} \langle j_q m_q \lambda\mu | j_p m_p \rangle a_{pm_p}^{+} a_{qm_q} \delta(\pi_p \pi_q, (-)^{\lambda}), \tag{3}$$

其中 p, q 分别表示角动量投影量子数 m_p, m_q 以外的所有量子数，$C_{pq}^{(\lambda)}$ 是实的待定系数，具有通常多极矩的约化矩阵元的性质，它有如下的归一化条件:

$$\frac{1}{2\lambda+1} \sum_{\mu} \langle \Phi(0) | Q_{\lambda\mu}^{+} Q_{\lambda\mu} | \Phi(0) \rangle = 1, \tag{4}$$

$Q_{\lambda\mu}$ 具有通常的多极矩的对称性. 如果 $Q_{\lambda\mu}$ 在大量的单粒子状态间具有近乎均匀的分布，则可以证明 $Q_{\lambda\mu}$ 近似地构成一阿贝耳群的代数. 它和哈密顿量的对称群 S 一起构成一群 G，并以 S 为其子群.

为简明起见，本文限于讨论偶-偶核问题，并且暂不考虑多极激发和对激发之间的耦合，仅对两类激发分别地进行研究. 设 $|\Phi(0)\rangle$ 是偶宇称的角动量为零的态，且设 $|\Phi(0)\rangle$ 为填充满费密能 ε_F 以下诸能级的态. 因 $s|\Phi(0)\rangle = |\Phi(0)\rangle$，故由群 G 生成的子空间内的任意态矢量可写为

$$|\Phi(\alpha)\rangle = \exp\left\{ i \sum_{\mu} \bar{\alpha}_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} \right\} |\Phi(0)\rangle. \tag{5}$$

---

1) 由于原子核内存在两类核子，实际上还需考虑核子的同位旋坐标，并分别考虑 $T=0$ 的多极矩算子和 $T=1$ 的多极矩算子.

运用文献 [1] 中所述的计算方法,可求得

$$\langle \Phi(\alpha'_\lambda)|\Phi(\alpha''_\lambda)\rangle \approx \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\mu (\bar\alpha'_{\lambda\mu}-\bar\alpha''_{\lambda\mu})(\alpha'_{\lambda\mu}-\alpha''_{\lambda\mu})\right\}. \tag{6}$$

而 $\langle \Phi(\alpha'_\lambda)|H|\Phi(\alpha''_\lambda)\rangle$ 可在可变平均势场中进行计算,

$$\frac{\langle \Phi(\alpha'_\lambda)|H|\Phi(\alpha''_\lambda)\rangle}{\langle \Phi(\alpha'_\lambda)|\Phi(\alpha''_\lambda)\rangle} = \Big\langle \Phi(0)\Big|\exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_\mu(\alpha'_{\lambda\mu}-\alpha''_{\lambda\mu})Q^+_{\lambda\mu}\right\} \cdot H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)\cdot\exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_\mu(\bar\alpha'_{\lambda\mu}-\bar\alpha''_{\lambda\mu})Q_{\lambda\mu}\right\}\Big|\Phi(0)\Big\rangle, \tag{7}$$

$$H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right) = \exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_\mu(\alpha'_{\lambda\mu}+\alpha''_{\lambda\mu})Q^+_{\lambda\mu}\right\}\cdot H\cdot\exp\left\{\frac{i}{2}\sum_\mu(\bar\alpha'_{\lambda\mu}+\bar\alpha''_{\lambda\mu})Q_{\lambda\mu}\right\}. \tag{8}$$

按 $i(\alpha'_{\lambda\mu}-\alpha''_{\lambda\mu})$ 展开并保留到二次项,有

$$\frac{\langle \Phi(\alpha'_\lambda)|H|\Phi(\alpha''_\lambda)\rangle}{\langle \Phi(\alpha'_\lambda)|\Phi(\alpha''_\lambda)\rangle} = V^{(\lambda)}\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right) - i\sum_\mu U^{(\lambda)}_\mu\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)\cdot\frac{\alpha'_{\lambda\mu}-\alpha''_{\lambda\mu}}{2} - \sum_{\mu\nu}U^{(\lambda)}_{\mu\nu}\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)\cdot\frac{\alpha'_{\lambda\mu}-\alpha''_{\lambda\mu}}{2}\cdot\frac{\bar\alpha'_{\lambda\nu}-\bar\alpha''_{\lambda\nu}}{2}, \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}
V^{(\lambda)}\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right) &= \Big\langle \Phi(0)\Big|H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)\Big|\Phi(0)\Big\rangle_L,\\
U^{(\lambda)}_\mu\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right) &= \Big\langle \Phi(0)\Big|Q^+_{\lambda\mu}H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)+H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)Q^+_{\lambda\mu}\Big|\Phi(0)\Big\rangle_L,\\
U^{(\lambda)}_{\mu\nu}\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right) &= \Big\langle \Phi(0)\Big|Q^+_{\lambda\mu}H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)Q_{\lambda\nu}+\frac{1}{2}\Big[Q^+_{\lambda\mu}Q_{\lambda\nu}H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)\\
&\quad + H\left(\frac{\alpha'_\lambda+\alpha''_\lambda}{2}\right)Q^+_{\lambda\mu}Q_{\lambda\nu}\Big]\Big|\Phi(0)\Big\rangle_L.
\end{aligned} \tag{10}$$

根据文献 [1],可求得等效哈密顿量为

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{H}}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} &= \left[\hat V^{(\lambda)} - \frac{1}{4}\sum_\mu \hat U^{(\lambda)}_{\mu\mu} - \frac{1}{16}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial^2\hat U^{(\lambda)}_{\mu\nu}}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}\partial\alpha_{\lambda\nu}}\right]\\
&\quad + \frac{i}{4}\sum_\mu\left[\frac{\partial}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}}\hat U^{(\lambda)}_\mu + \hat U^{(\lambda)}_\mu\frac{\partial}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}}\right] - \frac{1}{8}\sum_{\mu\nu}\left[\frac{\partial\hat U^{(\lambda)}_{\mu\nu}}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}}\frac{\partial}{\partial\alpha_{\lambda\nu}}\right.\\
&\quad \left. + \frac{\partial\hat U^{(\lambda)}_{\mu\nu}}{\partial\alpha_{\lambda\nu}}\frac{\partial}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}}\right] - \frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}\hat U^{(\lambda)}_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}\partial\alpha_{\lambda\nu}},
\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat V^{(\lambda)} &= \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_\mu\frac{\partial^2}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}\partial\alpha_{\lambda\mu}}\right\}V^{(\lambda)}(\alpha_\lambda),\\
\hat U^{(\lambda)}_\mu &= \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_\mu\frac{\partial^2}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}\partial\alpha_{\lambda\mu}}\right\}U^{(\lambda)}_\mu(\alpha_\lambda),\\
\hat U^{(\lambda)}_{\mu\nu} &= \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_\mu\frac{\partial^2}{\partial\bar\alpha_{\lambda\mu}\partial\alpha_{\lambda\mu}}\right\}U^{(\lambda)}_{\mu\nu}(\alpha_\lambda).
\end{aligned} \tag{12}$$

等效哈密顿量(11)式中第一项表示相应于 $Q_{\lambda\mu}$ 这个集体自由度的势能,它是实标量,并且是 $C^{(\lambda)}_{pq}$ 及 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的函数. 因它是标量,故只能是由 $\alpha_{\lambda\mu}$ 构成的不变量的函数. 以

$\lambda=2$ 为例，由 $\alpha_{2\mu}$ 构成的独立的不变量只有两个，可选为

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu}\bar{\alpha}_{2\mu}\alpha_{2\mu}=\beta^2,\\&\sum_{\mu_i\mu}\langle 2\mu_1 2\mu_2|2\mu_3\rangle\alpha_{2\mu_1}\alpha_{2\mu_2}\bar{\alpha}_{2\mu_3}=-\sqrt{\frac{2}{35}}\beta^3\cos 3\gamma,\end{aligned}\tag{13}$$

这里 β，γ 是通常的表征原子核固有形变的量．又因为每出现一个 $\alpha_{2\mu}$，即伴随一个因子 i，而势能应当是实标量，故只能是 $\alpha_{2\mu}$的偶函数，即只能是 β^2 及 $\beta^6\cos^2 3\gamma$ 的函数．势能极小值在 β，γ 平面内的位置确定了原子核基态是球形核或轴对称变形核或非轴对称变形核．

如果是球形核，势能在 $\alpha_{\lambda\mu}=0$ 处有极小值．把 $\hat{V}^{(\lambda)}$，$\hat{U}^{(\lambda)}_{\mu}$ 及 $\hat{U}^{(\lambda)}_{\mu\nu}$ 在 $\alpha_{\lambda\mu}=0$ 附近展开，近似地有

$$\begin{aligned}&\hat{V}^{(\lambda)}=a_0-\frac{2\lambda+1}{4}(a_{11}^{(\lambda)}+2a_{20}^{(\lambda)})+(a_{11}^{(\lambda)}+2a_{20}^{(\lambda)})\sum_{\mu}\bar{\alpha}_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu},\\&\hat{U}^{(\lambda)}_{\mu}=0,\\&\hat{U}^{(\lambda)}_{\mu\nu}=(a_{11}^{(\lambda)}-2a_{20}^{(\lambda)})\delta_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}&a_0=\langle\Phi(0)|H|\Phi(0)\rangle_L,\\&a_{11}^{(\lambda)}=\frac{1}{2\lambda+1}\sum_{\mu}a_{11}^{(\lambda)\mu},\quad a_{11}^{(\lambda)\mu}=\langle\Phi(0)|Q^+_{\lambda\mu}HQ_{\lambda\mu}|\Phi(0)\rangle_L,\\&a_{20}^{(\lambda)}=\frac{-1}{4(2\lambda+1)}\left\langle\Phi(0)\left|\sum_{\mu}(Q^+_{\lambda\mu}Q_{\lambda\mu}H+HQ^+_{\lambda\mu}Q_{\lambda\mu})\right|\Phi(0)\right\rangle_L.\end{aligned}\tag{15}$$

这样，等效哈密顿量 (11) 式化为

$$\begin{aligned}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{H}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}=&\left(a_0-\frac{2\lambda+1}{2}a_{11}^{(\lambda)}\right)+(a_{11}^{(\lambda)}+2a_{20}^{(\lambda)})\sum_{\mu}\bar{\alpha}_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}\\&-\frac{1}{4}(a_{11}^{(\lambda)}-2a_{20}^{(\lambda)})\sum_{\mu}\frac{\partial^2}{\partial\bar{\alpha}_{\lambda\mu}\partial\alpha_{\lambda\mu}},\end{aligned}\tag{16}$$

这正是 $(2\lambda+1)$ 维各向同性谐振子的哈密顿量．使 $\delta=\frac{-2a_{20}^{(\lambda)}}{a_{11}^{(\lambda)}}$，并作如下变换：

$$\begin{aligned}&\hat{C}^+_{\lambda\mu}=\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\alpha_{\lambda\mu}-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_{\lambda\mu}},\\&\hat{C}_{\lambda\mu}=\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\bar{\alpha}_{\lambda\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial\alpha_{\lambda\mu}},\end{aligned}\tag{17}$$

则等效哈密顿量化为

$$\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{H}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}=\left[a_0-\frac{2\lambda+1}{2}(a_{11}^{(\lambda)}-\omega^{(\lambda)})\right]+\omega^{(\lambda)}\sum_{\mu}\hat{C}^+_{\lambda\mu}\hat{C}_{\lambda\mu},\tag{18}$$

$$\omega^{(\lambda)}=a_{11}^{(\lambda)}\sqrt{1-\delta^2}.\tag{19}$$

如基态关联很弱，即 $\delta\ll 1$，则对于各个振动态最佳子空间的选择都决定于 $a_{11}^{(\lambda)}$ 的极小值．将 $a_{11}^{(\lambda)}$ 对 $C^{(\lambda)}_{ni}$ 在归一化条件 (4) 式下变分，具体计算给出

$$\sum_{n'i'}\{(\varepsilon_n-\varepsilon_i)\delta_{ni;n'i'}+\mathscr{V}^{(\lambda)}_{ni;n'i'}\}C^{(\lambda)}_{n'i'}=\omega^{(\lambda)}C^{(\lambda)}_{ni},\tag{20}$$

其中

$$\mathscr{V}^{(\lambda)}_{ni;n'i'} = \frac{1}{2\lambda+1} \sum_{\mu m_n m_i m_{n'} m_{i'}} (-)^{\lambda-\mu} \langle j_{n'} m_{n'} \lambda - \mu | j_{i'} m_{i'} \rangle \langle j_i m_i \lambda \mu | j_n m_n \rangle$$

$$\cdot [\langle i' m_{i'}; n m_n | \mathscr{V} | n' m_{n'}; i m_i \rangle - \langle n m_n; i' m_{i'} | \mathscr{V} | n' m_{n'}; i m_i \rangle], \quad (21)$$

这正是 Tamm-Dancoff 方法给出的结果. 这个方程组的许多组解中, $C^{(\lambda)}_{ni}$ 近乎均匀分布的解是我们所需要的表征集体自由度 $Q_{\lambda\mu}$ 的解. 如果给出主要贡献的组态近乎简并,即 $\varepsilon_n - \varepsilon_i \approx \varepsilon$, 则这方程组的解恰好使残余作用 $\mathscr{V}$ 的矩阵元对角化. 所以在这种情形下如果残余作用近似地为 $\sum_\mu Q^\dagger_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu}$ 型作用, 集体自由度即为 $Q_{\lambda\mu}$. 如果基态关联虽然较弱,但不能完全略去,则可按微扰论计算基态关联所引起的修正. Jancovici 及 Schiff[4] 曾用生成坐标方法处理球形核的多极振动,给出 RPA 结果. 实际上基态关联较弱时用微扰论算出的结果正与 RPA 方法所给出的集体振动态的结果相当.

对于变形核的情形,现以 $\lambda = 2$ 为例来讨论. 如通常那样变换到本体坐标系中去考虑. 如原子核的 β 振动和 γ 振动的振幅不大,可以将 $\hat{V}^{(2)}$, $\hat{U}^{(2)}_\mu$ 及 $\hat{U}^{(2)}_{\mu\nu}$ 近似地写为

$$\begin{aligned} &\hat{V}^{(2)} - \frac{1}{4}\sum_\mu \hat{U}^{(2)}_{\mu\mu} = V(\beta, \gamma), \\ &\hat{U}^{(2)}_\mu = 0, \\ &\hat{U}^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2B}\delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $V(\beta, \gamma)$是缓慢变化的函数, B 是常量. 于是 (11) 式化为

$$\begin{aligned} \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathscr{H}} \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} = &-\frac{1}{2B}\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right. \\ &\left. - \sum_{\kappa=1,2,3}\frac{R^2_\kappa}{4\beta^2\sin^2\left(\gamma - \kappa\dfrac{2\pi}{3}\right)}\right\} + V(\beta, \gamma), \end{aligned} \quad (23)$$

这正是 A. Bohr 集体运动模型的结果[5].

如 β 振动和 γ 振动的零点能很小,可以完全略去,而且假定原子核的固有形变是轴对称的,则基态转动带能量为

$$E_I = V(\beta, C^{(2)}_{pq}) + \frac{I(I+1)}{6B\beta^2}, \quad (24)$$

它是 β 及 $C^{(2)}_{pq}$ 的函数. 集体算子 $Q_{2\mu}$ 的系数 $C^{(2)}_{pq}$ 及平衡形变参量 β 由能量的变分原理确定.

如果原子核的形变很大, 转动激发能对基态能量而言可以忽略不计, 则对于这个转动带的最佳子空间的选择可以从基态能量的极小值来确定. 这样确定的 $C^{(2)}_{pq}$ 及 β, 相应于 HF 解的结果. 如果转动激发能较小,但不能完全略去, 则可以按微扰论来处理: 因为有 $C^{(2)}_{pq}$ 的归一化条件,只要 I 不是很大, $C^{(2)}_{pq}$ 的变化的影响可以忽略不计, $C^{(2)}_{pq}$ 可以近似地取基态之值. 形变 β 则直接影响转动能量, 故需要由能量 E_I 的变分原理确定. 这样, 平衡形变 β_I 是 I 的函数,这相应于可变转动惯量模型所给出的结果.

三、原子核的集体对激发

A. Bohr[6] 及 Bès[7] 等对照多极激发讨论了对激发问题，在他们的工作中迳取对力中的 P^+, P 作为相应的集体自由度. 在本文中我们将更普遍地考虑表征这种对激发的集体自由度，并运用变分原理指出在特定情况下归结为上述结果. 因为对激发问题与多极激发问题非常相似，所以采取与前节相似的方式叙述，不作详细讨论，但随时指出其中差异之处.

我们一般地把质子或中子的对激发算子[1)]表为

$$P_{\frac{1}{2}} = \sum_p v_p A_p^+,\quad P_{-\frac{1}{2}} = \sum_p v_p A_p,\quad P_\mu^+ = P_{-\mu}\quad \left(\mu = \pm\frac{1}{2}\right), \tag{25}$$

其中

$$A_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2(2j_p+1)}} \sum_{m_p} (-)^{j_p - m_p} a_{pm_p}^+ a_{p-m_p}^+ \tag{26}$$

是产生角动量为零的、处于能级 p 的一对粒子的算子. v_p 是实的待定系数，它的归一化条件为

$$\sum_p v_p^2 = 1. \tag{27}$$

P_μ 是偶宇称的标量，对时间反演不变，对规范空间的转动有

$$e^{iN\delta\varphi} P_\mu e^{-iN\delta\varphi} = e^{i4\mu\delta\varphi} P_\mu, \tag{28}$$

$$N = \sum_{pm_p} a_{pm_p}^+ a_{pm_p}. \tag{29}$$

如果 P_μ 在大量的单粒子状态间具有近乎均匀的分布，则可以证明 P_μ 近似地具有玻色子算子的性质，P_μ 及 $\left(1 - \frac{2}{\Omega} N\right)$ 构成一李群的代数，这里 Ω 是所考虑的单粒子状态数. 这群与哈密顿量的对称群 S 一起构成一群 G，并以 S 为其子群.

为简明起见，同多极激发一样，只考虑偶-偶核. 由群 G 所生成的态矢量可写为

$$|\Phi(\alpha)\rangle = \exp\left\{i \sum_\mu \bar{\alpha}_\mu P_\mu\right\} |\Phi(0)\rangle, \tag{30}$$

$$\alpha_\mu = \alpha_0 e^{i4\mu\varphi},\quad \bar{\alpha}_\mu = \alpha_{-\mu}. \tag{31}$$

注意到 $|\Phi(\alpha)\rangle$ 是不具有确定粒子数的核态，而我们要考虑的是某一粒子数 n 附近的核态，故使

$$\begin{aligned} n &= \langle \Phi(\alpha) | N | \Phi(\alpha) \rangle \\ &= \sum_{\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_F} 1 + \sum_{\varepsilon_n > \varepsilon_F} \sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\, v_n \alpha_0}{\sqrt{2j_n+1}}\right) - \sum_{\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_F} \sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\, v_n \alpha_0}{\sqrt{2j_i+1}}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

因 v_p 在许多能级间均匀分布，而 α_0 又不很大，考虑到归一化条件 (27) 式，有

$$\sum_n v_n^2 \approx \sum_i v_i^2 \approx \frac{1}{2}. \tag{33}$$

---

1) 这里，我们考虑的是 $T=1$, $T_3=\pm 1$ 的同类核子对的算子，不难推广到 $T=1$, $T_3=0$ 的异类核子对的算子.

运用文献[1]中所述的计算方法进行计算，求得和多极激发完全相似的结果，只要把前节(6—12)式中的 $Q_{\lambda\mu}$ 换成 P_μ，即适用于对激发的情形．但应当注意：(1) 生成算子 P_μ 和 $Q_{\lambda\mu}$ 具有不同的李代数结构；(2) $P_{\mu=\pm\frac{1}{2}}$ 分别表示产生和消灭粒子对的算子，而 $Q_{\lambda\mu=0,\pm1,\cdots\pm\lambda}$ 则只表示磁量子数不同的多极矩算子．

与(11)式相当的表征对激发的等效哈密顿量的第一项表示相应于集体自由度 P_μ 的势能，它是规范空间中的标量，是 v_p, α_μ 的函数．因为它是标量，只能是由 α_μ 组成的独立的不变量的函数．由 α_μ 组成的独立的不变量只有一个，即

$$\frac{1}{2}\sum_\mu \bar{\alpha}_\mu\alpha_\mu = \alpha_0^2, \tag{34}$$

故势能是 α_0^2 的函数．势能的极小值的位置决定了原子核的基态是正常核还是超导核(在规范空间中具有形变的核)．

如果是正常核，势能在 $\alpha_\mu = 0$ 处有极小值，把 $\hat{V}$, $\hat{U}_\mu$ 及 $\hat{U}_{\mu\nu}$ 在 $\alpha_\mu = 0$ 附近展开，由于粒子、空穴的不对称性，$a_{11}^{\mu=\pm\frac{1}{2}}$ 是不相等的，故有

$$\begin{aligned}\hat{V} &= a_0 - \frac{1}{2}(a_{11} + 2a_{20}) + (a_{11} + 2a_{20})\sum_\mu \bar{\alpha}_\mu\alpha_\mu,\\ \hat{U}_\mu &= i(a_{11}^\mu - a_{11}^{-\mu})\bar{\alpha}_\mu,\\ \hat{U}_{\mu\nu} &= (a_{11}^\mu - 2a_{20})\delta_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{35}$$

其中 a_0, a_{11}^μ, a_{11} 及 a_{20} 与(15)式完全相似，但应将其中的 $Q_{\lambda\mu}$ 换成 P_μ．这时，等效哈密顿量为

$$\begin{aligned}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{H}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} = a_0 - a_{11} + (a_{11} + 2a_{20})\sum \bar{\alpha}_\mu\alpha_\mu\\ - \frac{1}{2}\sum_\mu(a_{11}^\mu - a_{11}^{-\mu})\bar{\alpha}_\mu\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}_\mu} - \frac{1}{4}(a_{11} - 2a_{20})\sum_\mu\frac{\partial^2}{\partial\bar{\alpha}_\mu\partial\alpha_\mu}\end{aligned} \tag{36}$$

或

$$\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{H}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_{11}(\sqrt{1-\delta^2} - 1) + \sum_\mu \omega^\mu \hat{C}_\mu^+\hat{C}_\mu, \tag{37}$$

其中 δ, $\hat{C}_\mu^+$, $\hat{C}_\mu$ 仍如(17)式所示，而

$$\omega^\mu = a_{11}\sqrt{1-\delta^2} + \frac{1}{2}(a_{11}^\mu - a_{11}^{-\mu}), \tag{38}$$

两类声子的振动能量是不相等的．

我们可以像求等效哈密顿量那样求出对于平均粒子数 n 的增减量的等效算子，

$$\hat{\Delta} = 2(\hat{C}_+^+\hat{C}_+ - \hat{C}_-^+\hat{C}_-). \tag{39}$$

利用这一等效算子，(37)式可改写为

$$\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{H}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_{11}(\sqrt{1-\delta^2} - 1) + \frac{a_{11}^+ - a_{11}^-}{4}\hat{\Delta} + a_{11}\sqrt{1-\delta^2}\sum_\mu \hat{C}_\mu^+\hat{C}_\mu, \tag{40}$$

其中 $\frac{a_{11}^+ - a_{11}^-}{4}\hat{\Delta} \approx \varepsilon_F\hat{\Delta}$，考虑到这一项后，就化为通常分析对振动时所用的谐振公式．

如果原子核的基态关联很弱，$\delta \ll 1$，则最佳子空间的选择仅决定于 $\omega^\mu = a_{11}^\mu$ 的极小值．按变分原理确定的 v_p 和由 Tamm-Dancoff 方法给出的结果一致．如果给出主要贡献的激发组态近乎简并，则这样确定的 v_p 恰好使残余作用的矩阵元对角化．在这种情形

下，如果残余作用为 $\sum_\mu P_\mu^+ P_\mu$ 型对力作用，集体自由度的算子即为 P_μ. 如果基态关联较弱，但不能完全略去，则可按微扰论计算基态关联所引起的修正. Ripka 及 Padjen[8] 曾用生成坐标方法处理正常核的对振动，给出 RPA 结果. 实际上，这里按微扰论给出的结果与 RPA 中给出的集体对振动结果相当.

在超导核的情形，可以变换到规范空间中的本体坐标系去考虑. 如果原子核的对振动的振幅不大，可将势能极小值附近的 $\hat{V}$, $\hat{U}_\mu$ 及 $\hat{U}_{\mu\nu}$ 近似地表为

$$
\begin{aligned}
&\hat{V}-\frac{1}{4}\sum_\mu \hat{U}_{\mu\mu}-\frac{1}{16}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial^2 \hat{U}_{\mu\nu}}{\partial\bar{\alpha}_\mu\partial\alpha_\nu}=V(\alpha_0),\\
&\hat{U}_\mu \;=i4\mu U_1(\alpha_0)e^{-i4\mu\varphi},\\
&\hat{U}_{\mu\nu}=U_2(\alpha_0)\delta_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{41}
$$

其中 $V(\alpha_0)$, $U_1(\alpha_0)$ 及 $U_2(\alpha_0)$ 都是缓慢变化的函数. 于是等效哈密顿量化为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{H}}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}=&-\frac{1}{8}U_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_0^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_0}+\frac{U_2}{\alpha_0}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\\
&+\left[V(\alpha_0)+\frac{1}{2}\frac{U_1}{\alpha_0}\hat{\Delta}+\frac{U_2}{32\alpha_0^2}(\hat{\Delta})^2\right],
\end{aligned}
\tag{42}
$$

其中

$$
\hat{\Delta}=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}
\tag{43}
$$

表征规范空间中的转动. (42) 式和 Bès[7] 等用推转模型导出的结果相似，但这里出现有 $\hat{\Delta}$ 的线性项. 由于粒子、空穴的不对称性，等效哈密顿量中必然会出现与费密能 ε_F 有关的 $\hat{\Delta}$ 的线性项.

假定对振动的零点能量很小，可以忽略不计，则基态对转动带的能量为

$$
E_\Delta=V(\alpha_0)+\frac{1}{2}\frac{U_1}{\alpha_0}\Delta+\frac{1}{32}\frac{U_2}{\alpha_0^2}\Delta^2.
\tag{44}
$$

我们可以分别对各个对转动态按变分原理确定最佳子空间的选择. 这样确定的集体算子 P_μ 中的系数 v_p 及 α_0 均随核子数而变化，因而对转动的转动惯量 $\frac{16\alpha_0^2}{U_2}$ 亦随核子数的变化而变化.

四、结　论

现在的原子核理论都是建立在单粒子运动的基础上的，所以表述单粒子运动的表象的选择是很重要的问题. 最佳的表象是自洽场表象. 但是，表述单粒子运动的算子以及由它们构成的表述集体运动的算子都应具有确定的粒子数、电荷数、宇称和角动量等量子数，所以我们应当选用能保持这些量子数的自洽场表象，并在此基础上研究原子核的集体运动.

用生成坐标方法研究原子核的集体运动，关键问题在于选定相应的集体自由度. 这是一个物理问题，集体自由度依赖于核子间的残余作用，也依赖于原子核的状态. 当主要的那些激发组态近乎简并时，集体自由度基本上决定于残余作用. 这是 A. Bohr 等进

行直观分析给出的，在本文中从一般原理肯定了这些分析结果.

运用生成坐标方法研究原子核的集体运动时，可以用可变平均势场表象进行计算.这就使得能够以统一的方式处理球形核和变形核的多极激发以及正常核和超导核的对激发. 在本文中我们对两类核的集体运动分别进行了具体研究，从理论上给出了集体模型的结果.

运用生成坐标方法研究原子核的不同类型的集体运动，只在于表述这些集体自由度的算子的差异，故可以按统一的方式进行处理. 这样就有可能研究两种集体自由度的相互影响，如转动对于成对关联的破坏所引起的从超导核到正常核的相变，以及粒子数（规范空间中的转动）对于多极形变的影响所引起的从变形核到球形核的相变. 对于这些很有意义的问题尚待进一步研究.

参 考 文 献

[1] 徐躬耦，中国科学，**6** (1974), 567.
[2] D. L. Hill, J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, 89 (1953), 1102;
J. J. Griffin, J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **108** (1957), 311;
R. E. Peierls, J. Yoccoz, *Proc. Phys. Soc.* (London), **A70** (1957), 381.
[3] K. T. Hecht, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **23** (1973), 123.
[4] B. Jancovici, D. H. Schiff, *Nucl. Phys.*, **58** (1964), 678.
[5] A. Bohr, *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **26** (1952), No. 14.
[6] A. Bohr, Compt. Rend. du Cong. Int. de Physique Nuclèaire, (Paris, 1964);
A. Bohr, Int. Symp. on Nuclear Structure, (Dubna, U. S. S. R., 1968).
[7] D. R. Bès, R. A. Broglia, R. P. J. Perazzo, K. Kumar, *Nucl. Phys.*, **A143** (1970), 1.
[8] G. Ripka, R. Padjen, *Nucl. Phys.*, **A132** (1968), 489.

THE GENERATOR COORDINATE METHOD AND NUCLEAR COLLECTIVE MOTIONS (II)——MULTIPOLE AND PAIRING EXCITATIONS IN EVEN-EVEN NUCLEI

XU GONG-OU WANG SHUN-JIN LIU DUN-HUAN
YANG YA-TIAN MAO MING-DE
(Lanzhou University)

ABSTRACT

Nuclear collective motions are further studied using the generator coordinate method. Multipole excitations of both spherical and deformed nuclei as well as pairing excitations of both normal and superconducting nuclei are investigated in a unified way.