

随机海洋声信道下的噪声场时空相关函数*

许 祯 傭

提 要

本文把传播的随机时变网络模型用于水声信道,建立了噪声辐射场的时空相关函数的一般表示式.讨论了时变、多径、色散水声信道下噪声场时空相关函数的时变、起伏与衰落.

一、噪声场相关函数传播的一般表示式

在海洋声信道下,在 $\mathbf{r}_0$ 处有 $S(t)$ 噪声源辐射,则它所引起的噪声场 $p(\mathbf{r}, t)$ 应满足微分方程:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\mathbf{r}, t) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)S(t), \quad (1)$$

以及其它定解条件,包括时变的海面边界条件等.上式中 $c(\mathbf{r}, t)$ 为海洋媒质的时变声速,且

$$c(\mathbf{r}, t) = c_0(\mathbf{r}) + \Delta c(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\Delta c}{c_0} \ll 1.$$

在实际的条件下, $\Delta c(\mathbf{r}, t)$ 是 t 慢变化的随机过程,其功率谱密度一般是分布在 10 赫以下.海洋信道其它边界条件,诸如起伏的海表面也是甚低频的随机过程.因此在 $\mathbf{r}_0$ 处有简谐源辐射时,当其频率 $\omega \gg \omega_0$, ω_0 为 $\Delta c(\mathbf{r}, t)$ 以及起伏海面有效最高频率时,则其场响应有如下形式:

$p(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, i\omega, t)\exp(-i\omega t)$, 其中 $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 是 t 缓慢变化的随机场,它满足方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 H(\mathbf{r}, i\omega, t)\exp(-i\omega t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(\mathbf{r}, i\omega, t)\exp(-i\omega t) \\ = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

以及其它一切定解条件,包括随机起伏的海面边界条件.

显然,形如 $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 的解可以作为传播过程的时变网络的时变频率响应.

对于平稳随机噪声源 $S(t)$ 有如下的随机变换式:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) dF(\omega),$$

其中 $F(\omega)$ 为 ω 的正交增量过程,若 $S(t)$ 为平稳的高斯过程,则 $F(\omega)$ 为 ω 的 Wiener 过程.

* 1974 年 8 月 2 日收到.

对方程(2)两边乘以随机微分元 $dF(\omega)$, 并对 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 可证

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\mathbf{r}, i\omega, t) \exp(-i\omega t) dF(\omega) \quad (3)$$

满足波动方程(1)与一切定解条件, 包括起伏的海面边界条件, 所以(3)式是噪声源 $S(t)$ 辐射条件下的噪声场。

从(3)式可以看出, 这时 $p(\mathbf{r}, t)$ 一般是非平稳的, 虽然 $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 常常是平稳的。

由(3)式可以计算噪声场时空相关函数 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t)$:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t) = E[p(\mathbf{r}_1, t)p^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)],$$

符号 E 表示对统计系综求平均, 星号 $*$ 表示共轭。利用(3)式, 可得

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t) &= E[p(\mathbf{r}_1, t)p^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\mathbf{r}_1, i\omega_1, t) H^*(\mathbf{r}_2, i\omega_2, t + \tau) \exp[i(\omega_2 - \omega_1)t] \\ &\quad \times \exp(i\omega_2\tau) E[dF(\omega_1)dF^*(\omega_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

若 $F(\omega)$ 为 ω 的可微正交增量过程, 则

$$dF(\omega) = f(\omega)d\omega,$$

且

$$E[dF(\omega_1)dF^*(\omega_2)] = E[f(\omega_1)f^*(\omega_2)]d\omega_1d\omega_2 = E|f(\omega_1)|^2\delta(\omega_1 - \omega_2)d\omega_1d\omega_2,$$

其中 $E|f(\omega_1)|^2$ 是噪声源 $S(t)$ 的功率谱密度 $S(\omega)$ 。用上式代入(4)式, 则得

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\mathbf{r}_1, i\omega, t) H^*(\mathbf{r}_2, i\omega, t + \tau) \times \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (5)$$

由(5)式看出 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t)$ 也是 t 的随机过程。在大多数情况下, $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 是平稳与各态历经的, 因此 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t)$ 也是平稳与多态历经的。

据(5)式可以求得 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t)$ 的各阶矩。

噪声场平均时空相关函数 $\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$:

$$\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = E\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t) = \langle \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t) \rangle,$$

符号 $\langle \rangle$ 表示对时间求均值。因 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t)$ 的各态历经性, 故算符 E 与 $\langle \rangle$ 可互换。

利用(5)式可得

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(\mathbf{r}_1, i\omega, t) H^*(\mathbf{r}_2, i\omega, t + \tau) \exp(i\omega\tau) d\omega \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) E[H(\mathbf{r}_1, i\omega, t) H^*(\mathbf{r}_2, i\omega, t + \tau)] \exp(i\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

因 $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 的各态历经性, 故其中

$$E[H(\mathbf{r}_1, i\omega, t) H^*(\mathbf{r}_2, i\omega, t + \tau)] = \langle H(\mathbf{r}_1, i\omega, t) H^*(\mathbf{r}_2, i\omega, t + \tau) \rangle.$$

关于 $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau, t)$ 其他各阶中心矩此处不再探讨。

二、时变、多径、色散水声信道下的噪声场时空相关函数

我们所要考虑的水声信道, 是一个时变起伏的海面边界、随机起伏的媒质声速, 以及存在着反射系数为 $V_1(\theta)$ 的海底边界的信道。

在通常的关于海面起伏的限制条件下,起伏的海面可以看成具有反射系数为 $V(\theta)$ 的反射面,以及附加在镜向的随机起伏的声散射. 因此声信道的随机频率响应 $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 可以表示为具有随机振幅与随机相位的简正波之和,且 $H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 的规则分量可以认为是相应于海面反射数为 $V(\theta)$ 以及海底反射系数为 $V_1(\theta)$, 媒质声速为 $c_0(\mathbf{r})$ 的点源辐射解.

$H(\mathbf{r}, i\omega, t)$ 可写为如下形式:

$$H(\mathbf{r}, i\omega, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^N u_n(Z_s, \omega) u_n(Z_R, \omega) \exp[ik_n(\omega)r] \times \exp[\rho_n(\mathbf{r}, \omega, t) + i\varphi_n(\mathbf{r}, \omega, t)] \exp[-\alpha(\omega)r]. \quad (7)$$

上式是采用柱坐标,且取 $\mathbf{r}_0$ 为 $\mathbf{r}_0(0, \varphi, Z_s)$, $\mathbf{r}$ 为 $\mathbf{r}(r, \varphi, Z_R)$, N 为简正波的总数, $u_n(Z, \omega)$ 为第 n 号简正波的激发函数, $\alpha_n(\omega)$ 为其指数衰减系数, $\rho_n(\mathbf{r}, \omega, t)$ 为其随机振幅的自然对数, $\varphi_n(\mathbf{r}, \omega, t)$ 为其随机相位.

根据(6)式,并以(7)式的随机传播网络表达式代入,可得

$$\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n(\omega) H_i(\omega) Q_{ni}(-i, -i, 1, -1) \times \exp[i(k_n(\omega)r_1 - k_i(\omega)r_2)] \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (8)$$

$$\text{其中 } H_n(\omega) = \frac{A}{\sqrt{r}} u_n(Z_s, \omega) u_n(Z_R, \omega) \exp[-\alpha_n(\omega)r] \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$Q_{ni}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ 为随机变量 $[\rho_n(\mathbf{r}_1, \omega, t), \rho_i(\mathbf{r}_2, \omega, t + \tau), \varphi_n(\mathbf{r}_1, \omega, t), \varphi_i(\mathbf{r}_2, \omega, t + \tau)]$ 的联合特征函数. 若此四元随机变量构成高斯随机矢量,则有

$$Q_{ni}(V_1, V_2, V_3, V_4) = \exp - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 K_{pq} V_p V_q, \quad (9)$$

其中 K_{pq} 为其四元变量的相关矩阵的相应元素,且 $K_{pq} = K_{qp}$. 关于上述诸量 K_{pq} , 在传播起伏中有大量实验数据与理论工作.

对于 $n \neq j$ 时上述诸量 K_{pq} , 除了 $K_{11} = E\rho_n^2, K_{22} = E\rho_j^2, K_{33} = E\varphi_n^2, K_{44} = E\varphi_j^2$, 其余的 K_{pq} 都为零. 所以

$$Q_{n \neq j}(-i, -i, +1, -1) = \exp \frac{1}{2} [K_{11} + K_{22} - K_{33} - K_{44}] \\ = \exp \frac{1}{2} [E\rho_n^2 + E\rho_j^2 - E\varphi_n^2 - E\varphi_j^2]. \quad (10)$$

以 $Q_{n \neq j}(\omega, r)$ 表 $Q_{n \neq j}(-i, -i, 1, -1)$, 则 $Q_{n \neq j}(\omega, r) = Q_{n \neq j}(-i, -i, 1, -1) \geq 0$ 若只考虑随机媒质的声速起伏的影响, 则有 $E\rho_n^2 = E\varphi_n^2, E\rho_j^2 = E\varphi_j^2$, 得 $Q_{n \neq j}(\omega, r) = 1$.

当 $n = j$ 时, 在一般条件下有 $K_{13} = K_{31} = 0, K_{14} = K_{41} = 0, K_{24} = K_{42} = 0, K_{23} = K_{32} = 0$, 则

$$Q_{nn}(-i, -i, 1, -1) = \exp \left[K_{12} + K_{34} + \frac{1}{2} K_{11} + \frac{1}{2} K_{22} - \frac{1}{2} K_{33} - \frac{1}{2} K_{44} \right] \\ = Q_{nn}(\omega, r) \exp[(E\rho_n^2)R_{\rho_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) + (E\varphi_n^2)R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)], \quad (11)$$

其中 $Q_{nn}(\omega, r) = \exp[E\rho_n^2 - E\varphi_n^2]$, $R_{\rho_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 为 ρ_n 的时空相关系数; $R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$

为 φ_n 的时空相关系数. 若只考虑媒质声速起伏的影响时, 有

$$E\rho_n^2 = E\varphi_n^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} k_0^2 \alpha^2 a r,$$

$$R_{\rho_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \exp \frac{1}{a^2} [|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \cos \theta]^2,$$

则

$$Q_{nn}(-i, -i, 1, -1) = \exp \left[\sqrt{\pi} k_0^2 \alpha^2 r \exp \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \cos \theta}{a} \right)^2 \right],$$

其中, $k_0 = \frac{\omega}{c}$, a 为媒质声速起伏的空间相关半径(约 1 米), α^2 为媒质折射率起伏率的二阶中心矩, θ 为向量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 的法线之交角.

但在普遍的表示式里仍用 (11) 式的表示式, 在 $E\rho_n^2$ 及 $E\varphi_n^2$ 较小时 (11) 式中的指数取前两项的展开, 则

$$Q_{nn}(-i, -i, 1, -1) = Q_{nn}(\omega, r) [1 + (E\rho_n^2) R_{\rho_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) + (E\varphi_n^2) R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)]. \quad (12)$$

用 (10) 式与 (12) 式代入 (8) 式, 则得

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \phi_1(r_1, r_2, \tau) + \phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau),$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = & \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) \exp[ik_n(\omega)(r_1 - r_2)] \exp i\omega\tau d\omega \\ & + \sum_{n \neq j} \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n(\omega) H_j(\omega) Q_{nj}(\omega, r) \\ & \times \exp i[k_n(\omega)r_1 - k_j(\omega)r_2] \exp(i\omega\tau) d\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = & \sum_{n=1}^N R_{\rho_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) (E\rho_n^2) \\ & \times \exp[ik_n(\omega)(r_1 - r_2)] \exp[i\omega\tau] d\omega \\ & + \sum_{n=1}^N R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) (E\varphi_n^2) \\ & \times \exp[ik_n(\omega)(r_1 - r_2)] \exp(i\omega\tau) d\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

由 (13) 和 (14) 式可以看出, $\phi_1(r_1, r_2, \tau)$ 是由水声信道中的规则传播所致. 而 $\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 是水声信道中的纯随机传播所致. 由 (13) 式知, $\phi_1(r_1, r_2, \tau)$ 只要多径效应不严重, 噪声场两接收点的距离即使十分大, 噪声场仍可强相关. 而 $\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 是纯随机传播所致, 它随着 $R_{\rho_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 以及 $R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 而衰落. 其空间相关半径通常是很短的. 因此总的噪声场相关函数 $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 的空间相关半径只和传播的规则分量与纯随机分量之比有关.

相关函数 $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 分解为 $\phi_1(r_1, r_2, \tau) + \phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, 在水声信号时空处理中有重要的意义.

在 (13), (14) 式中每号简正波都是色散的, 即其简正波相速度随频率而异:

$$k_n(\omega) = \frac{\omega}{c_n(\omega)} = \frac{\omega}{c_n(\omega_n)} + \omega \frac{c_n(\omega_n) - c_n(\omega)}{c_n(\omega)c_n(\omega_n)},$$

其中的 ω_n 是 $c_n(\omega_n)$ 为最大值时之值, 以 c_n 表 $c_n(\omega_n)$ 之, 则

$$k_n(\omega) = \frac{\omega}{c_n} + \Delta k_n(\omega),$$

而

$$\Delta k_n(\omega) = \omega \frac{c_n(\omega_n) - c_n(\omega)}{c_n(\omega)c_n(\omega_n)} \geq 0.$$

$$\exp[ik_n(\omega)(r_1 - r_2)] = \exp\left[\frac{i\omega}{c_n}(r_1 - r_2)\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [i\Delta k_n(\omega)(r_1 - r_2)]^n,$$

因 $\Delta k_n(\omega)(r_1 - r_2)$ 一般在感兴趣的范围内是小于 1 的, 取级数前两项就够了, 即

$$\exp[ik_n(\omega)(r_1 - r_2)] \simeq \exp\left[\frac{i\omega}{c_n}(r_1 - r_2)\right] \left[1 - i\omega \frac{\Delta k_n(\omega)}{\omega}(r_1 - r_2)\right]. \quad (15)$$

同样可得

$$\begin{aligned} \exp[ik_n(\omega)r_1 - k_j(\omega)r_2] &= \left\{ \exp i\omega \left[\frac{c_j - c_n}{c_j c_n} r_1 - \frac{1}{c_j} (r_2 - r_1) \right] \right\} \\ &\times \left\{ 1 + i\omega [(\Delta k_n(\omega) - \Delta k_j(\omega))r_1 - \Delta k_j(\omega)(r_2 - r_1)] \frac{1}{\omega} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

将 (15) 式, (16) 式代入 (13) 式, (14) 式, 经整理可得

$$\begin{aligned} \phi_1(r_1, r_2, \tau) &= \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \phi'_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) \\ &+ \sum_{n \neq j} \sum \phi_{nj}^+(\tau - \tau_{nj}) - \phi_{nj}^-(\tau - \tau_{nj}) + \phi_{nj}'^+(\tau - \tau_{nj}) \\ &+ \phi_{nj}'^-(\tau - \tau_{nj}) + \eta_{nj}'^+(\tau - \tau_{nj}) - \eta_{nj}'^-(\tau - \tau_{nj}), \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_{nj} &= \frac{c_n - c_j}{c_n c_j} r_1 + \frac{1}{c_j} (r_2 - r_1), \\ \phi_n(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_n(\tau) &= (r_2 - r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) \Delta k_n(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{nj}^+(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) [H_n(\omega) H_j(\omega)]^+ Q_{nj}(\omega, r) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{nj}^-(\tau) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) [H_n(\omega) H_j(\omega)]^- Q_{nj}(\omega, r) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{nj}'^+(\tau) &= (r_2 - r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) [H_n(\omega) H_j(\omega)]^+ Q_{nj}(\omega, r) \\ &\times \Delta k_j(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{nj}'^-(\tau) &= - (r_2 - r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) [H_n(\omega) H_j(\omega)]^- Q_{nj}(\omega, r) \\ &\times \Delta k_j(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{nj}^+(\tau) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) [H_n(\omega) H_j(\omega)]^+ [\Delta k_n(\omega) - \Delta k_j(\omega)] r \\ &\quad \times Q_{nj}(\omega, r) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \eta_{nj}^-(\tau) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) [H_n(\omega) H_j(\omega)]^- [\Delta k_n(\omega) - \Delta k_j(\omega)] r \\ &\quad \times Q_{nj}(\omega, r) \exp(i\omega\tau) d\omega,\end{aligned}$$

当 $i > n$ 时前面取正号; 当 $i < n$ 时前面取负号。上式中,

$$\begin{aligned}[H_n(\omega) H_j(\omega)]^+ &= \begin{cases} H_n(\omega) H_j(\omega) & \text{当 } \left[\frac{\omega}{H_n(\omega) H_j(\omega)} \geq 0 \right], \\ 0 & \text{当 } \left[\frac{\omega}{H_n(\omega) H_j(\omega)} < 0 \right], \end{cases} \\ [H_n(\omega) H_j(\omega)]^- &= \begin{cases} H_n(\omega) H_j(\omega) & \text{当 } \left[\frac{\omega}{H_n(\omega) H_j(\omega)} \leq 0 \right], \\ 0 & \text{当 } \left[\frac{\omega}{H_n(\omega) H_j(\omega)} > 0 \right]. \end{cases}\end{aligned}$$

如果我们所考虑的情况 $Z_i \approx Z_R$, 或不考虑 n 与 j 相差很大的简正波相互作用, 那么函数 $[H_n(\omega) H_j(\omega)]^- \approx 0$, 在实际情况下, 几乎都可以这样考虑。因而, 上式中就有 $\phi_{nj}^-(\tau) \approx 0$, $\phi_{nj}^-(\tau) \approx 0$, 以及 $\eta_{nj}^-(\tau) \approx 0$, 公式 (19) 即可简缩为下式:

$$\begin{aligned}\phi_1(r_1, r_2, \tau) &= \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \phi'_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) \\ &\quad + \sum_{n \neq j} \phi_{nj}^+(\tau - \tau_{nj}) - \phi_{nj}'(\tau - \tau_{nj}) + \eta^{++}(\tau - \tau_{nj}).\end{aligned}\quad (18)$$

(17), (18) 式中各函数是由自相关函数的延时及其微商所组成。其中 $\phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right)$ 及 $\phi_{nj}^+(\tau - \tau_{nj})$ 分别在 $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c_n}$ 及 $\tau = \tau_{nj}$ 时取最大值, 且以 $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c_n}$ 及 $\tau = \tau_{nj}$ 为对称。 $\phi'_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right)$ 在 $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c_n}$ 时为零, 且以 $\tau = \frac{r_2 - r_1}{c_n}$ 为奇对称。 $\phi_{nj}'(\tau - \tau_{nj})$ 和 $\eta^{++}(\tau - \tau_{nj})$ 在 $\tau = \tau_{nj}$ 时为零, 且以 $\tau = \tau_{nj}$ 为奇对称。

在 (17) 式中, 可以看出 $\phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right)$ 是传播过程的多径效应所致, 不同的号数 $\phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right)$ 引起相关函数的拖散, $\phi'_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right)$ 是由相应的简正波的色散效应所致, 它引起相关函数畸变, $\phi_{nj}^+(\tau - \tau_{nj})$ 为传播的不同号简正波相互作用所致, 它引起相关函数更大的拖散, $\phi_{nj}'(\tau - \tau_{nj})$ 及 $\eta^{++}(\tau - \tau_{nj})$ 为相应的色散效应所引起的相关函数畸变。其示意图如图 1。

关于水声信道纯随机传播所导致的部分相关函数 $\phi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \tau)$, 经整理得

$$\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \sum_{n=1}^N R_{\rho n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \left[\phi_{\rho n} \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \phi'_{\rho n} \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) \right]$$

$$+ \sum_{n=1}^N R_{\varphi_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \left[\phi_{\varphi_n} \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \phi'_{\varphi_n} \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) \right]. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{\rho_n}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) (E \rho_n^2) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{\varphi_n}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) (E \varphi_n^2) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{\rho_n}(\tau) &= (r_2 - r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) \Delta k_n(\omega) (E \rho_n^2) \exp(i\omega\tau) d\omega, \\ \phi_{\varphi_n}(\tau) &= (r_2 - r_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega} S(\omega) H_n^2(\omega) Q_{nn}(\omega, r) \Delta k_n(\omega) (E \varphi_n^2) \exp(i\omega\tau) d\omega. \end{aligned}$$

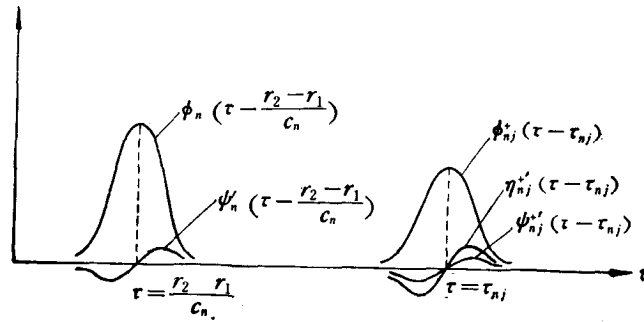


图 1

(17), (18) 和 (19) 式给出了 $\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) + \phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 的普遍而方便的计算公式, 其中各项的物理意义都是十分明晰的。

在水声信号处理方面, 在随机时变信道下, 相关函数 $\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 分解为 $\phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 与 $\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 的叠加有普遍和重要的意义。其中 $\phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 其统计特性是属于平稳随机过程的结果, 设源的带宽为 $\Delta\omega$, 则处理时间 T 只须满足 $\Delta\omega T \gg 1$ 就可使 $\phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 的一切统计性质趋于稳定。而另一方面, $\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 乃属于不平稳随机过程的结果, 在处理 $\phi_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 有关的一切问题里, 要使处理结果稳定, 则需处理时间 T 同时满足 $\Delta\omega T \gg 1$ 及 $T \gg T_0$ 才行, T_0 为媒质与边界起伏的时间相关半径。

对于规一化的噪声场时空相关系数 $R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ 有

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)\Phi_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}} \simeq \frac{\Phi_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\Phi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)}.$$

在 $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \cos \theta \gg a$ 时,

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = R(r_1, r_2, \tau) = \frac{\phi_1(r_1, r_2, \tau)}{\phi_1(r, r, 0)}.$$

a 为媒质起伏的相关半径。以 (18) 和 (19) 式代入上式, 则得

$$\begin{aligned} R(r_1, r_2, \tau) &= \frac{\phi_1(r_1, r_2, \tau)}{\phi_1(r, r, 0) + \phi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)} \\ &= \left[\sum_{n=1}^N \phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \phi'_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \sum_{n \neq j} \phi_{nj}^+(\tau - \tau_{nj}) \right] \end{aligned}$$

$$- \phi_{nj}^{+'}(\tau - \tau_{nj}) - \eta_{nj}^{+'}(\tau - \tau_{nj}) \Big] / \left[\sum_{n=1}^N \phi_n(0) + \phi_{\rho n}(0) + \phi_{\varphi n}(0) \right. \\ \left. + \sum_{n \neq j} \phi_{nj}^{+}(-\tau'_{nj}) - \phi_{nj}^{+'}(-\tau'_{nj}) - \eta_{nj}^{+'}(-\tau'_{nj}) \right], \quad (20)$$

其中 $\tau'_{nj} = \frac{c_n - c_j}{c_n c_j} r_1$, 当 r 足够大时, 使得 $\tau'_{nj} = \frac{c_n - c_j}{c_n c_j} r_1 \gg \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ 时, $\Delta\omega$ 为 $S(\omega)$ 的等效带宽有 $\phi_{nj}^{+}(-\tau'_{nj}) \approx 0$, $\phi_{nj}^{+'}(-\tau'_{nj}) \approx 0$ 以及 $\eta_{nj}^{+'}(-\tau'_{nj}) \approx 0$, 则(20)式又可简化为

$$R(r_1, r_2, \tau) = \left[\sum_{n=1}^N \phi_n \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \phi_n' \left(\tau - \frac{r_2 - r_1}{c_n} \right) + \sum_{n \neq j} \phi_{nj}^{+}(\tau - \tau_{nj}) \right. \\ \left. - \phi_{nj}^{+'}(\tau - \tau_{nj}) - \eta_{nj}^{+'}(\tau - \tau_{nj}) \right] / \left[\sum_{n=1}^N \phi_n(0) + \phi_{\rho n}(0) + \phi_{\varphi n}(0) \right]. \quad (21)$$

由(21)式知, 当 $(r_1 - r_2)$ 相当大时, 相关函数因多径的拖散效应以及起伏效应而衰落, 尤其在相邻号数的简正波的 $\tau_n - \tau_{n-1} \geq \frac{1}{\Delta f}$ 时 (Δf 为源 $S(\omega)$ 的等效带宽) 这种拖散效应使相关系数衰落随着有效简正波数 N 的增加而衰落, 其 $R(r_1, r_2, \tau) \sim \frac{1}{N}$ 而下降. 另外由(21)式还可看出 $R(r_1, r_2, \tau)$ 也随着 $\phi_{\rho n}(0)$, $\phi_{\varphi n}(0)$ 的增加而衰落. 这是因信道随机性所致.

不难看出, 利用本文也可分析回波信号的统计性质.

参 考 文 献

- [1] L. Fortuin, J. A. S. A., 52 (1972), 302—314.
- [2] 许祯镛, 声学学报, 3 (1966), 34—39.
- [3] 许祯镛, “噪声场的统计特性实验研究”, 水声学论文集, 科学出版社 (1965 年).

SPACE-TIME CORRELATION FUNCTION OF A NOISE FIELD IN RANDOM MULTIPATH DISPERSION CHANNELS

XU ZHEN-YONG

ABSTRACT

In this paper a model for underwater acoustic channels is established. By means of this model a general expression is derived for the space-time correlation function produced by a noise source in random multipath dispersion channels.

It is shown that the spread and reduction of the correlation function are caused by the multipath propagation of sound waves and the random properties of the underwater acoustic channels. The effect of the dispersion properties of the channels on the correlation function is also discussed.