

双阱-集团壳模型中的质心运动伪态*

张 竞 上 卓 益 忠

(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文指出了用微观双阱-集团壳模型来研究裂变和重离子反应过程中存在着质心运动伪态问题,推出了分解质心运动伪态波函数的一般表达式,并以 $\text{Be}^8(\alpha-\alpha)$ 为例,说明了伪态的存在,定量地计算了伪态成分以及它对能量矩阵元的修正。

通过 Be^8 核的分析,我们得到的结论是:虽然伪态成分仅占百分之几,但对于微观裂变位垒修正是很明显的,它甚至要超过库仑能对位垒的修正,因此在精确的定量计算中质心运动伪态是必须要考虑的。尤其是在核粒子数增多以及包含高激发态时,质心运动伪态更需仔细考虑。

一、引 言

单阱壳模型中的质心运动伪态问题早有研究^[1],但是,对于集团模型中的质心运动伪态目前尚未见研究。本文讨论了在谐振子近似下双阱集团的集团模型的质心运动伪态问题,并以 Be^8 核的裂变为例进行了定量计算。

目前利用集团模型描述原子核自发裂变及重离子融合反应是微观理论方面的初步尝试^[2]。由于裂变母核或重离子融合成的复合核是一个亚稳的复合系统,它会导致各个集团内态的激发,因此,需要建立一种集团内态具有激发特性的集团模型,我们称之为双阱-集团壳模型,它是与熟知的 α 模型^[3]及分子模型^[4]相区别的一种集团模型,上述两种集团模型不考虑集团内态的激发。

在双阱-集团壳模型中,当两集团阱心重合时,原子核系统可以自动满足泡利原理,因此不存在泡利不相容伪态问题^[5],但是由于集团内态的非基态特性,会存在有质心运动伪态。这种质心运动伪态是模型波函数中的非物理成分,应该在计算中分析它所占的比例,必要时在定量计算中给予扣除。

二、双阱集团壳模型中的质心运动伪态的分解

在 α 模型及分子模型中,由于限定内态仅取为 α 粒子基态,因此不存在质心运动伪态^[4]。但是,对于内态激发的集团模型是存在有质心运动伪态的。

本文仅讨论双集团系统的集团模型,当然,对于多集团的集团模型以下的讨论在方法上是可以推广应用的。

* 1974 年 6 月 21 日收到。

对于一个 A 核子体系, 可将其划分为 $A_1, A_2 (A_1 + A_2 = A)$ 两个集团, 它们的体系波函数可写成

$$\phi_A = \mathcal{A} \left(\prod_{i=1}^{A_1} \varphi_{ni}^+(i) \prod_{j=A_1+1}^A \varphi_{nj}^-(j) | \sigma \tau \rangle \right). \quad (1.1)$$

上式中 $\prod_{i=1}^{A_1} \varphi_{ni}^+(i)$ 为 A_1 集团位形空间单粒子波函数乘积, $\prod_{j=A_1+1}^A \varphi_{nj}^-(j)$ 为 A_2 集团位形空间单粒子波函数乘积, $| \sigma \tau \rangle$ 为 A 个粒子自旋同位旋波函数乘积, \mathcal{A} 为反称化算符.

对于两个集团可近似地认为分别形成一个平均场, 为简便起见, 空间波函数分别取为两个阱中的谐振子波函数(见图 1), 一般这是个很好的近似.

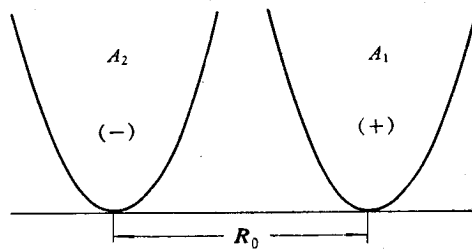


图 1 A_1, A_2 两集团分别形成两个谐振子阱, 两阱心之距为 R_0

A_1, A_2 两集团的重心坐标分别为 R_1, R_2 , 系统重心坐标为 R_c , 且有

$$R_c = \frac{A_1}{A} R_1 + \frac{A_2}{A} R_2. \quad (1.2)$$

集团相对坐标为 R_{12} , 且有

$$R_{12} = R_1 - R_2. \quad (1.3)$$

利用相对坐标形式可将每个阱内的谐振子波函数写成如下形式:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{A_1} \varphi_{ni}^+(i) &= \prod_{r=x,y,z} \sum_k C_k^{(r)} \varphi_k^{(r)} \left(\sqrt{A_1} \left(R_1 - \frac{A_2}{A} R_0 \right) \right) \tilde{\psi}_{(k)}^{(r)}(\text{int}), \\ \prod_{j=A_1+1}^A \varphi_{nj}^-(j) &= \prod_{r=x,y,z} \sum_{k'} C_{k'}^{(r)} \varphi_{k'}^{(r)} \left(\sqrt{A_2} \left(R_2 + \frac{A_1}{A} R_0 \right) \right) \tilde{\psi}_{(k')}^{(r)}(\text{int}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.4) 式中 $\varphi_k^{(r)}$ 表示在 r 方向的集团质心的谐振子波函数, 其量子数为 k , $\tilde{\psi}_{(k)}^{(r)}(\text{int})$ 为对应于 $\varphi_k^{(r)}$ 的集团内态波函数.

将 (1.4) 式代入 (1.1) 式可以得到, 在单粒子乘积波函数反称化之前存在两集团质心波函数的乘积, 以 $\varphi_n^{(r)} \left(\sqrt{A_1} \left(R_1 - \frac{A_2}{A} R_0 \right) \right) \varphi_m^{(r)} \left(\sqrt{A_2} \left(R_2 + \frac{A_1}{A} R_0 \right) \right)$ 形式出现. 它可利用转换系数 C_{pq}^{nm} 将其分解为体系质心波函数与集团相对运动波函数的乘积, 即

$$\begin{aligned} &\varphi_n^{(r)} \left(\sqrt{A_1} \left(R_1 - \frac{A_2}{A} R_0 \right) \right) \varphi_m^{(r)} \left(\sqrt{A_2} \left(R_2 + \frac{A_1}{A} R_0 \right) \right) \\ &= \sum_{p(q)} C_{pq}^{nm} \varphi_p(\sqrt{A} R_c)_r \varphi_q \left(\sqrt{\frac{A_1 A_2}{A}} (R_{12} - R_0)_r \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

(1.5) 式中 C_{pq}^{nm} 为转换系数, 由量子数守恒限定 $n + m = p + q$, 它的具体表示见附录一.

这样, 将体系空间单粒子乘积波函数分解为体系质心波函数与集团相对运动波函数

以及集团内态波函数的乘积形式,注意到反称化不改变质心坐标 R_c . 因此, (1.5) 式中 $p \neq 0$ 的波函数为质心运动伪态. 它是非物理成分,在物理量计算中应扣除.

三、 Be^8 核的双阱集团壳模型中的质心运动伪态

1. 模型空间及伪态波函数分解

上节给出了双阱集团壳模型质心运动伪态分解的方法. 本节以 Be^8 核为例,进行伪态的定量研究.

Be^8 核是轻核中能够自发裂变为两个质量相同的碎片 (α - α) 的唯一的核,因此可以选用 Be^8 作为以微观方式研究裂变机制的例子. Be^8 自发裂变为两个 α 粒子的模型空间应是描述由 Be^8 基态分离为两个 α 粒子(结构分别为 $1s^4$)的子空间. 当两个 α 集团尚未分离时 ($z = 0$) 应是 Be^8 的壳模型基态,而在 $z \rightarrow \infty$ 时模型应描述两个无限分离的 α 粒子. 在这个例子中,恰好在 $z = 0$ 及 $z \rightarrow \infty$ 这两个边界条件下均为壳模型基态结构,因此在这两处不存在质心运动伪态. 这也是给模型建立提出的一个要求. 我们选用了 Harvay 所提出的内态具有激发方式的双集团模型^[6], 其中考虑了两集团中单粒子仅对 $N = 1$ 壳激发的简单模型,此时 $A_1 = A_2 = 4$, 两个阱内的单粒子波函数分别为

$$\begin{aligned}\psi_+ &= \alpha|000\rangle^+ + \beta|001\rangle^+, \\ \psi_- &= \alpha|000\rangle^- - \beta|001\rangle^-. \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1) 式中 $|000\rangle^\pm$, $|001\rangle^\pm$ 分别表示两阱中的 $1s$, $1p_z$ 谐振子态. 在这个模型中, x , y 方向上被固定在 $1s$ 态,因此 x , y 方向上不存在质心运动伪态.

由波函数的正交归一化条件即得到 (2.1) 式中系数 α , β 的表示式:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1+u}{\sqrt{1+(1+u)^2}}, & \beta &= \frac{1}{\sqrt{1+(1+u)^2}}, \\ u &= \sqrt{2}z/b_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

两个阱心的坐标分别为 $(00 \pm z)$. 在这种简化模型近似下, Harvay 对 Be^8 的结合能、能级及跃迁几率作了计算^[1], 并与有关 Be^8 核的其他模型计算进行了比较,可以看到这种模型比单阱谐振子波函数的描述要好得多.

由 (2.2) 式可见,当两阱重合时 ($z = 0$) 得到 $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$, 此时体系成为 Be^8 的壳模型基态组态,而当两阱无限分离时 ($z \rightarrow \infty$) 得到 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 表明是两个无限分离的 α 粒子.

Be^8 体系波函数是八个粒子的 Slater 行列式波函数,其中每个阱中分别填充四个粒子,其中两个自旋为 $1/2$,另两个自旋为 $-1/2$,有两个中子两个质子,这种模型波函数对应的核密度分布见图 2 所示.

Be^8 体系波函数为

$$\phi = \mathcal{A}(\phi_0|\sigma\tau), \quad (2.3)$$

1) M. Harvay 在他的计算中没有考虑质心运动伪态问题.

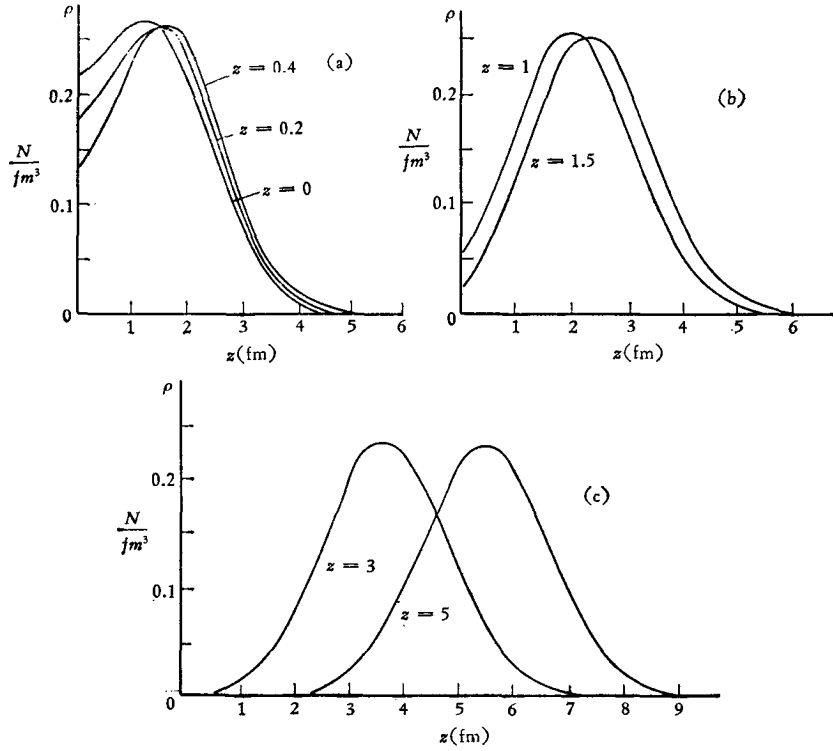


图2 Harvay 模型空间中 z 方向核物质密度分布 ($x=y=0$)
 $\rho(z, bz, z)_{x=y=0} = 4m[|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2]$, z 的单位是 fm

$$\phi_0 = \phi_+(1)\phi_+(2)\phi_+(3)\phi_+(4)\phi_-(5)\phi_-(6)\phi_-(7)\phi_-(8). \quad (2.4)$$

将 (2.1) 式代入 (2.4) 式, 并对各种量子态进行分解, 简记 $\phi(x_k; [4][1s_{\pm}^{4-n}1p_{\pm}^n]) \equiv \phi(n_1)$, 它表示在正或负阱内有 n 个 $1p_z$ 态, $4-n$ 个 $1s$ 态粒子所组成的完全对称空间波函数. 这样可以得到

$$\begin{aligned} \phi_0 = & \alpha^8 \phi(0_+) \phi(0_-) + 2\alpha^7 \beta [\phi(1_+) \phi(0_-) - \phi(0_+) \phi(1_-)] \\ & + \alpha^6 \beta^2 [\sqrt{6} (\phi(2_+) \phi(0_-) + \phi(0_+) \phi(2_-)) - 4\phi(1_+) \phi(1_-)] \\ & + \alpha^5 \beta^3 [2(\phi(3_+) \phi(0_-) - \phi(0_+) \phi(3_-)) - 2\sqrt{6} (\phi(2_+) \phi(1_-) \\ & - \phi(1_+) \phi(2_-))] + \alpha^4 \beta^4 [6\phi(2_+) \phi(2_-) - 4(\phi(3_+) \phi(1_-) \\ & + \phi(1_+) \phi(3_-)) + (\phi(4_+) \phi(0_-) + \phi(0_+) \phi(4_-))] \\ & + \alpha^3 \beta^5 [2(\phi(1_+) \phi(4_-) - \phi(4_+) \phi(1_-)) - 2\sqrt{6} (\phi(2_+) \phi(3_-) - \phi(3_+) \phi(2_-))] \\ & + \alpha^2 \beta^6 [\sqrt{6} (\phi(2_+) \phi(4_-) + \phi(4_+) \phi(2_-)) - 4\phi(3_+) \phi(3_-)] \\ & + 2\alpha \beta^7 (\phi(3_+) \phi(4_-) - \phi(4_+) \phi(3_-)) + \beta^8 \phi(4_+) \phi(4_-). \end{aligned} \quad (2.5)$$

利用相对坐标 (见附录二) 可以组成下面四种 α 集团内部态, $\tilde{\psi}(n_1)$ 表示内态量子数为 n .

$$\tilde{\psi}(0_+) = \varphi_0(\xi_1)\varphi_0(\xi_2)\varphi_0(\xi_3) = \phi(x_k; [4][0^4]_+), \quad (2.6a)$$

$$\tilde{\psi}(2_+) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\varphi_2(\xi_1)\varphi_0(\xi_2)\varphi_0(\xi_3) + \varphi_0(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)\varphi_0(\xi_3) + \varphi_0(\xi_1)\varphi_0(\xi_2)\varphi_2(\xi_3)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \phi(x_k; [4][2^1 0^3]_+) - \frac{1}{2} \phi(x_k; [4][1^2 0^2]_+), \quad (2.6b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(3_+) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \varphi_3(\xi_1) \varphi_0(\xi_2) \varphi_0(\xi_3) + \frac{1}{3} \varphi_0(\xi_1) \varphi_3(\xi_2) \varphi_0(\xi_3) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi_1(\xi_1) \varphi_2(\xi_2) \varphi_0(\xi_3) - \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi_1(\xi_1) \varphi_0(\xi_2) \varphi_2(\xi_3) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi_0(\xi_1) \varphi_1(\xi_2) \varphi_2(\xi_3) = \sqrt{\frac{3}{8}} \phi(x_k; [4][3^1 0^3]_+) \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{8} \phi(x_k; [4][2^1 1^1 0^2]_+) + \frac{1}{2} \phi(x_k; [4][1^3 0^1]_+) \end{aligned} \quad (2.6c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(4_+) &= -\frac{1}{3\sqrt{5}} \varphi_4(\xi_1) \varphi_0(\xi_2) \varphi_0(\xi_3) + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5}} \varphi_1(\xi_1) \varphi_3(\xi_2) \varphi_0(\xi_3) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{15}} \varphi_2(\xi_1) \varphi_2(\xi_2) \varphi_0(\xi_3) + \sqrt{\frac{2}{15}} \varphi_2(\xi_1) \varphi_0(\xi_2) \varphi_2(\xi_3) \\ &\quad - \sqrt{\frac{8}{15}} \varphi_1(\xi_1) \varphi_1(\xi_2) \varphi_2(\xi_3) = -\frac{3}{8\sqrt{5}} \phi(x_k; [4][4^+ 0^3]_+) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{5}} \phi(x_k; [4][3^1 1^1 0^2]_+) + \frac{7}{8\sqrt{5}} \phi(x_k; [4][2^2 0^2]_+) \\ &\quad - \frac{\sqrt{5}}{4} \phi(x_k; [4][2^1 1^2 0^1]_+) + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2}} \phi(x_k; [4][1^4]_+). \end{aligned} \quad (2.6d)$$

对于 $\tilde{\psi}(n_-)$ 的表示仅需将 (2.6) 诸式中 ξ_1, ξ_2, ξ_3 分别换为 ξ_5, ξ_6, ξ_7 , 并将下标“+”换为“-”。

利用 (2.6) 式, 可将两个 α 集团的谐振子态分解为

$$\begin{aligned} \psi(0_+) &= \varphi_0(R_1 - z) \tilde{\psi}(0_+), \quad \psi(1_+) = \varphi_1(R_1 - z) \tilde{\psi}(0_+), \\ \psi(2_+) &= \sqrt{\frac{3}{4}} \varphi_2(R_1 - z) \tilde{\psi}(0_+) - \sqrt{\frac{1}{4}} \varphi_0(R_1 - z) \tilde{\psi}(2_+), \\ \psi(3_+) &= \sqrt{\frac{3}{8}} \varphi_3(R_1 - z) \tilde{\psi}(0_+) - \sqrt{\frac{3}{8}} \varphi_1(R_1 - z) \tilde{\psi}(2_+) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_0(R_1 - z) \tilde{\psi}(3_+), \\ \psi(4_+) &= \sqrt{\frac{3}{32}} \varphi_4(R_1 - z) \tilde{\psi}(0_+) - \sqrt{\frac{3}{16}} \varphi_2(R_1 - z) \tilde{\psi}(2_+) \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi_1(R_1 - z) \tilde{\psi}(3_+) + \sqrt{\frac{15}{32}} \varphi_0(R_1 - z) \tilde{\psi}(4_+). \end{aligned} \quad (2.7)$$

对于 $\psi(n_-)$ 的分解仅需将 (2.7) 式中 $R_1 - z$ 换为 $R_2 + z$ 并将内态波函数下标由“+”换为“-”。

将上面相对坐标波函数代入(2.5)式, 利用转换关系式(1.5), 可以得到如下的伪态分解:

1) $\varphi_1(R_c)$ 伪态:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha^5 \beta^3 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} + \frac{5}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha^4 \beta^4 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} \\
& + \frac{5}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha^3 \beta^5 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} + \frac{15}{16} \alpha^2 \beta^6 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} \\
& + \frac{15}{32\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_4(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} + \frac{3\sqrt{5}}{128} \beta^8 \varphi_5(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} \\
& - \frac{3}{\sqrt{8}} \alpha^4 \beta^4 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} - \frac{3}{2} \alpha^3 \beta^5 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} \\
& - \frac{9}{8} \alpha^2 \beta^6 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} - \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} \\
& - \frac{3\sqrt{3}}{64} \beta^8 \varphi_4(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} - \frac{\sqrt{15}}{4} \alpha^3 \beta^5 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{40} \\
& - \frac{3}{16} \sqrt{30} \alpha^2 \beta^6 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{40} - \frac{3}{16} \sqrt{\frac{15}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{40} \\
& - \frac{3\sqrt{5}}{64} \beta^8 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{40} + \sqrt{\frac{3}{4}} \alpha^2 \beta^6 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{32} \\
& + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{32} + \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2}} \beta^8 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{32} \\
& + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{42} + \frac{3\sqrt{5}}{32} \beta^8 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{42} \\
& + \frac{\sqrt{15}}{16} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{43}. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

2) $\varphi_2(R_c)$ 伪态:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha^6 \beta^2 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} - \frac{3}{2} \alpha^5 \beta^3 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} \\
& - \frac{15}{8} \alpha^4 \beta^4 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} - \frac{5}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha^3 \beta^5 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} \\
& - \frac{15}{32} \sqrt{3} \alpha^2 \beta^6 \varphi_4(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} - \frac{3}{32} \sqrt{\frac{15}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_5(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} \\
& - \frac{3}{128} \sqrt{\frac{5}{2}} \beta^8 \varphi_6(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} + \frac{\sqrt{3}}{8} \alpha^4 \beta^4 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} \\
& + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha^3 \beta^5 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} + \frac{3\sqrt{6}}{32} \alpha^2 \beta^6 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{32} \alpha \beta^7 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} + \frac{3}{128\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_4(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} \\
& + \frac{1}{\sqrt{8}} \alpha^3 \beta^5 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{30} + \frac{3}{8} \alpha^2 \beta^6 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{30} \\
& + \frac{3}{16} \alpha \beta^7 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{30} + \frac{1}{32\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{30} \\
& + \frac{3\sqrt{15}}{16} \alpha^2 \beta^6 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{40} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{40} \\
& + \frac{3}{64\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{40} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \alpha^2 \beta^6 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{22} \\
& - \frac{3}{8} \alpha \beta^7 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{22} - \frac{3}{32} \beta^8 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{22} \\
& + \frac{\sqrt{3}}{8} \alpha \beta^7 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{32} + \frac{1}{16\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{32} \\
& - \frac{3}{32\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{42} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{33}. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

3) $\varphi_3(R_c)$ 伪态:

$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{4\sqrt{2}} \alpha^3 \beta^5 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} - \frac{9}{16} \alpha^2 \beta^6 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} \\
& - \frac{9}{32} \alpha \beta^7 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} - \frac{3}{64\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} \\
& + \frac{\sqrt{3}}{8} \alpha^2 \beta^6 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} \\
& + \frac{1}{32\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30} - \frac{1}{16\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{40} \\
& - \frac{3}{16\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{40} - \frac{3}{16\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{32}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

4) $\varphi_4(R_c)$ 伪态:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{8\sqrt{2}} \alpha^4 \beta^4 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \alpha^3 \beta^5 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} \\
& + \frac{9}{32} \sqrt{3} \alpha^2 \beta^6 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} + \frac{9}{32} \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_3(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} \\
& + \frac{9}{256} \beta^8 \varphi_4(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} + \frac{3}{32} \alpha^2 \beta^6 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} \\
& + \frac{3}{32\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} + \frac{3}{128\sqrt{2}} \beta^8 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20} \\
& - \frac{3}{16\sqrt{2}} \alpha \beta^7 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{30} - \frac{3}{64} \sqrt{3} \beta^8 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{30}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{32} \sqrt{\frac{3}{2}} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{22} + \frac{3\sqrt{5}}{128} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{40}. \quad (2.11)$$

5) $\varphi_5(R_c)$ 伪态:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{32} \sqrt{\frac{5}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} + \frac{3}{128} \sqrt{5} \beta^8 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{20} \\ & + \frac{\sqrt{15}}{64} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{x}_{30}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

6) $\varphi_6(R_c)$ 伪态:

$$\begin{aligned} & -\frac{3\sqrt{5}}{32} \alpha^2 \beta^6 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} - \frac{3}{32} \sqrt{\frac{5}{2}} \alpha \beta^7 \varphi_1(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} \\ & - \frac{3}{128} \sqrt{\frac{5}{2}} \beta^8 \varphi_2(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00} - \frac{3}{128} \sqrt{\frac{15}{2}} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{20}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

7) $\varphi_8(R_c)$ 伪态:

$$\frac{3}{256} \sqrt{\frac{35}{2}} \beta^8 \varphi_0(R_{12} - 2z) \tilde{\varphi}_{00}. \quad (2.14)$$

(2.8)–(2.14) 式中的 Be^8 内态 $\tilde{\varphi}_{ij}$, \tilde{x}_{ij} 的具体表示是

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{00} &= \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(0_-), \quad \tilde{\varphi}_{20} = \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(0_-) + \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(2_-), \\ \tilde{\varphi}_{30} &= \tilde{\varphi}(3_+) \tilde{\varphi}(0_-) - \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(3_-), \quad \tilde{\varphi}_{40} = \tilde{\varphi}(4_+) \tilde{\varphi}(0_-) + \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(4_-), \\ \tilde{\varphi}_{22} &= \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(2_-), \quad \tilde{\varphi}_{32} = \tilde{\varphi}(3_+) \tilde{\varphi}(2_-) - \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(3_-), \\ \tilde{\varphi}_{42} &= \tilde{\varphi}(4_+) \tilde{\varphi}(2_-) + \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(4_-). \end{aligned} \quad (2.15)$$

以及

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{20} &= \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(0_-) - \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(2_-), \quad \tilde{x}_{30} = \tilde{\varphi}(3_+) \tilde{\varphi}(0_-) + \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(3_-), \\ \tilde{x}_{40} &= \tilde{\varphi}(4_+) \tilde{\varphi}(0_-) - \tilde{\varphi}(0_+) \tilde{\varphi}(4_-), \quad \tilde{x}_{32} = \tilde{\varphi}(3_+) \tilde{\varphi}(2_-) + \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(3_-), \\ \tilde{x}_{42} &= \tilde{\varphi}(4_+) \tilde{\varphi}(2_-) - \tilde{\varphi}(2_+) \tilde{\varphi}(4_-), \quad \tilde{x}_{43} = \tilde{\varphi}(4_+) \tilde{\varphi}(3_-) + \tilde{\varphi}(3_+) \tilde{\varphi}(4_-). \end{aligned} \quad (2.15')$$

在伪态波函数表示式(2.8)–(2.14)中具有明显的边界特性, 即当 $z = 0$ 时, 以上诸波函数经反对称化全部为 0; 当 $z \rightarrow \infty$ 时, 由于诸波函数系数中全含 β , 且 $\beta(z \rightarrow \infty) = 0$, 因此伪态波函数在这两点为零, 符合前述对于模型的要求。

2. 伪性分析

通常为了估计质心运动伪态在整个模型态中所占的比例, 往往需要计算在质心能量中伪态能量所占比例, 称其为“伪性”。质心运动哈密顿量为

$$H_{mc} = T_{mc} + V_{mc} = \frac{1}{2mA} \left(\sum_i \hat{p}_i \right)^2 + \frac{1}{2} mA \omega^2 R_c^2, \quad (2.16)$$

式中 m 为核子质量。它对于模型波函数的矩阵元为

$$\langle \phi | H_{mc} | \phi \rangle = \frac{\hbar^2}{mb_1^2} + \frac{\hbar^2}{2mb_2^2} + \frac{\hbar^2}{mb_z^2} \beta^4 (1 - e^{-u^2}). \quad (2.17)$$

(2.17) 式中等号右边前两项表示在质心运动自由度上的基态能量, 第三项表示质心运动伪态能量, 它在 $z = 0$ 及 $z \rightarrow \infty$ 时为零, 这一点与上面模型建立是相吻合的。因为

这两点恰好分别对应了 Be^8 以及两个 α 粒子的基态, 因此无质心运动伪态, 但是在 z 的中间值, 由于存在 α 粒子的激发态, 因此有质心运动伪态, 并且伪态仅出现在 z 方向. 在 z 方向上伪态能量所占比例为

$$\frac{\hbar^2}{mb_z^2} \beta^4 (1 - e^{-u^2}) : \frac{\hbar^2}{2mb_z^2} = 2\beta^4 (1 - e^{-u^2}) : 1, \quad (2.18)$$

在 $u \approx 0.8$ 附近出现极大值, 约占 2.6% 左右.

由 (2.8)–(2.14) 式所列出的质心运动伪态波函数是很复杂的, 为精确计算各种质心激发的伪态成分, 需要作大量的计算工作. 但是由于在对称的两集团模型中一般 $\varphi_2(R_c)$ 伪态占主要成分, 因此仅选其中几项即可掌握伪态的主要成分, 而其它项的贡献是完全可以忽略的. 这一点在后面伪态能量矩阵元计算中是很重要的, 它可以大大简化能量矩阵元的计算.

以下分析那几项是伪态的主要成分, 将模型波函数 (2.3) 式分解为真伪两部分,

$$\phi = \phi_{(\mathbb{R})} + \sum_{n=1}^8 \phi_{n(\mathbb{R})}, \quad (2.19)$$

注意到真态与伪态之间, 以及不同质心激发的伪态之间波函数相互正交, 因此有

$$\langle \phi | H_{mc} | \phi \rangle = \left(\frac{\hbar^2}{mb_1^2} + \frac{\hbar^2}{2mb_z^2} \right) + \sum_{n=1}^8 n \frac{\hbar^2}{mb_z^2} \langle \phi_{n(\mathbb{R})} | \phi_{n(\mathbb{R})} \rangle. \quad (2.20)$$

比较 (2.20) 与 (2.17) 式, 得到

$$\sum_{n=1}^8 n \langle \phi_{n(\mathbb{R})} | \phi_{n(\mathbb{R})} \rangle = \beta^4 (1 - e^{-u^2}). \quad (2.21)$$

应用 (2.21) 式可以挑选伪态主要项. 图 3 给出了一些伪态波函数垒积曲线及 $\beta^4(1 - e^{-u^2})$ 曲线. 由图可见, 仅取 $\varphi_2(R_c)$ 伪态 (2.9) 式前三项即可将伪态主要成分抓住, 当然在进一步精确计算时还需多取一些伪态项.

由模型要求, 在 $z = 0$ 及 $z \rightarrow \infty$ 时不存在质心运动伪态, 这在图 3 中已显示出. 由

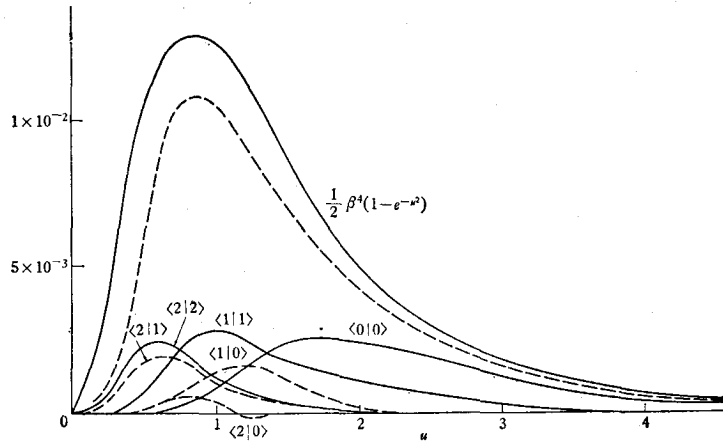


图 3 $\varphi_2(R_c)$ 伪态前三项波函数垒积曲线

$\langle n' | m \rangle$ 表示垒积 $\langle \mathcal{A} \phi_{n'}(R_{12}) \tilde{\phi}_{00} | \mathcal{A} \phi_m(R_{12}) \tilde{\phi}_{00} | \sigma \tau \rangle$;
 ----- 表示 $\varphi_2(R_c)$ 伪态前三项波函数垒积

于 $\phi_{(\Phi)}$ 在 $z = 0$ 及 $z \rightarrow \infty$ 时波函数为零, 因此由 (2.19) 式可知 $\phi_{(\Phi)}$ 与原模型波函数 ϕ 有相同的边界条件. 这对于计算提供了一个检验条件.

3. 质心运动伪态的能量矩阵元

在进行结合能及裂变位垒计算时, 需要计算模型空间的能量矩阵元, 但在模型空间中存在质心运动伪态, 因此需要估计伪态对于能量值的修正.

对于全部伪态波函数的能量矩阵元的计算量是十分庞大的, 但由前述可知, 可以仅选少数主要项便可对伪态能量修正作近似估计. 在取 $\varphi_2(R_c)$ 前三项时伪态波函数为

$$\varphi_{(\Phi)} = \varphi_2(R_c) \mathcal{A} \left[\left(-\frac{1}{2} \alpha^6 \beta^2 \varphi_0(R_{12} - 2z) - \frac{3}{2} \alpha^5 \beta^3 \varphi_1(R_{12} - 2z) - \frac{15}{8} \alpha^4 \beta^4 \varphi_2(R_{12} - 2z) \right) \tilde{\varphi}_{00} | \sigma \tau \right]. \quad (2.22)$$

伪态能量矩阵元为

$$E_i = \langle \varphi_{(\Phi)} | H | \varphi_{(\Phi)} \rangle, \quad (2.23)$$

式中哈密顿量为

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}. \quad (2.24)$$

相对动能算符为

$$\hat{T} = \frac{1}{2mA} \sum_{i < j} (\hat{p}_i - \hat{p}_j)^2. \quad (2.25)$$

位能部分取两两核子间核力相互作用, 核力取为 Volkov 力^[7]:

$$\hat{V} = \sum_{i < j} (1 - M + MP_{ij}^x) V(r_{ij}), \quad (2.26)$$

$$V(r_{ij}) = -V_a e^{-r^2/a^2} + V_r e^{-r^2/a^2}.$$

在计算中选 $b_{\perp} = 1.372$ fm. 对于参量 z , b_z 的能量值如图 4 所示. 可以看到, 在数量上伪态能量是比较小的, 最大修正也不过 0.5 MeV, 对于一般结合能计算是可以忽略的; 但是在裂变静力学位垒计算中, 对位垒修正是很明显的, 伪态的扣除大约将裂变位垒提高

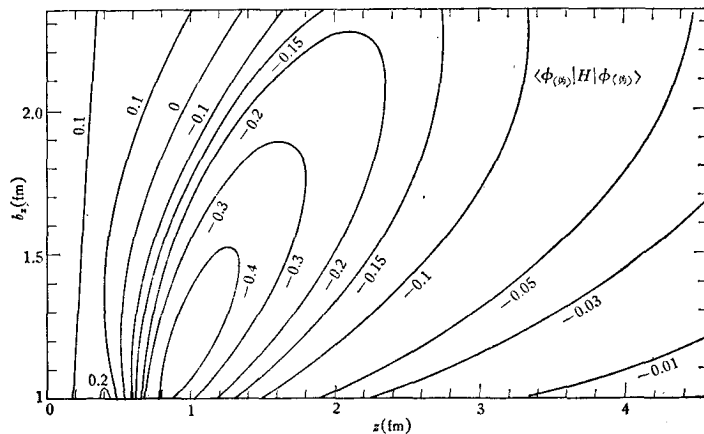


图 4 $\varphi_2(R_c)$ 伪态前三项的能量矩阵元的能量图
数字单位为 (MeV), 核力取 Volkov(II)

0.5 MeV 左右, 这比库仑能对于位垒修正要强, 粗略估计库仑位的引入相当将位垒降低 0.25 MeV.

关于伪态能量矩阵的积分见附录三.

四、讨 论

目前对于裂变及融合反应的理论研究绝大部分还是古典的或者半古典的, 或者是在液滴模型的基础上加上一些微观壳模型的修正. 为了研究这些反应的实质, 我们认为必须逐步发展一套从现实核力出发的、能够描述诸如裂变及融合反应这样大块核物质转移的微观动力学的统一理论. 作为第一步, 我们采用了双阱集团壳模型和唯象核力 (Volkov 力) 作为出发点, 进行模型研究, 这里首先遇到质心运动伪态问题. 因此, 本文着重讨论了这种具有激发内态的集团模型的质心运动伪态问题, 并以 Be^8 核为例, 定量地说明了伪性的存在, 计算了伪态所占成份以及它对能量值的修正. 从这个例子可以看到, 伪态虽仅占百分之几, 但在裂变位垒计算中却是不可忽略的, 它的修正甚至大于库仑能修正. 特别是在核系统的核子数增多时, 这类模型会含有更高的激发组态, 伪态所占成份还要增大, 就更需要将伪态部分扣除. 关于位能面以及动力学方面的工作正在进行中.

附 录 一

转 换 系 数

在笛卡儿表示中的谐振子波函数的转换系数具有非常简单的形式.

一般转换关系为

$$\varphi_n(x)\varphi_m(y) = \sum_{pq} C_{pq}^{nm} \varphi_p\left(\sqrt{\frac{A_1}{A}}x + \sqrt{\frac{A_2}{A}}y\right) \varphi_q\left(\sqrt{\frac{A_2}{A}}x - \sqrt{\frac{A_1}{A}}y\right). \quad (\text{A}\cdot 1)$$

由量子数守恒得到

$$n + m = p + q. \quad (\text{A}\cdot 2)$$

又知

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad (\text{A}\cdot 3)$$

其中 $H_n(x)$ 为厄密多项式. 利用厄密多项式的性质^[3], 并记

$$\xi = \sqrt{\frac{A_1}{A}}x + \sqrt{\frac{A_2}{A}}y, \quad \eta = \sqrt{\frac{A_2}{A}}x - \sqrt{\frac{A_1}{A}}y, \quad (\text{A}\cdot 4)$$

则有

$$\begin{aligned} \varphi_n(x)\varphi_m(y) &= \frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi b^2}} e^{(\xi^2+\eta^2)/2} \left(\sqrt{\frac{A_1}{A}} \frac{d}{d\xi} + \sqrt{\frac{A_2}{A}} \frac{d}{d\eta}\right)^n \left(\sqrt{\frac{A_2}{A}} \frac{d}{d\xi} - \sqrt{\frac{A_1}{A}} \frac{d}{d\eta}\right)^m e^{-(\xi^2+\eta^2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{2^{n+m} n! m! \pi b^2}} e^{(\xi^2+\eta^2)/2} \sum_{kk'} C_k^n C_{q-k}^m (-1)^{q-k} \frac{d^p}{d\xi^p} \frac{d^q}{d\eta^q} e^{-(\xi^2+\eta^2)}, \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

式中

$$q = k + k', \quad p = n + m - q.$$

比较(A·5)式与(A·1)式,得到转换系数表达式:

$$C_{pq}^{nm} = \sqrt{n!m!p!q!} \left(\frac{A_1}{A}\right)^{n/2} \left(\frac{A_2}{A}\right)^{m/2} \sum_k \frac{(-1)^{q-k} \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{q-k}}{(n-k)!(m-q+k)!(q-k)!k!}. \quad (\text{A}\cdot 6)$$

它具有如下性质:

i) 归一性

$$\sum_{q(\rho)} |C_{pq}^{nm}|^2 = 1, \quad (\text{A}\cdot 7)$$

ii) 可逆性

$$C_{pq}^{nm} = C_{nm}^{pq}, \quad (\text{A}\cdot 8)$$

iii) 递推关系

$$C_{pq}^{nm} = \sqrt{\frac{A_1}{A}} \sqrt{\frac{p}{n}} C_{p-1q}^{n-1m} + \sqrt{\frac{A_2}{A}} \sqrt{\frac{q}{n}} C_{p-1q-1}^{n-1m}, \quad (\text{A}\cdot 9)$$

或

$$C_{pq}^{nm} = \sqrt{\frac{A_2}{A}} \sqrt{\frac{p}{m}} C_{p-1q}^{n-1m-1} - \sqrt{\frac{A_1}{A}} \sqrt{\frac{q}{m}} C_{p-1q-1}^{n-1m-1}. \quad (\text{A}\cdot 9')$$

附 录 二

相 对 坐 标

在 Be^8 核中双集团被划分为两 α 集团,它们的相对坐标取为

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4), \\ \xi_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} r_1 - \frac{1}{\sqrt{12}} (r_2 + r_3 + r_4), \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} r_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} (r_3 + r_4), \\ \xi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (r_3 - r_4), \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 10)$$

及

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{4} (r_5 + r_6 + r_7 + r_8), \\ \xi_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} r_5 - \frac{1}{\sqrt{12}} (r_6 + r_7 + r_8), \\ \xi_5 &= \sqrt{\frac{2}{3}} r_6 - \frac{1}{\sqrt{6}} (r_7 + r_8), \\ \xi_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (r_7 - r_8), \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 10')$$

其中 R_1, R_2 分别为两个 α 集团的质心坐标, ξ_i 为内部相对坐标,与 α 集团整体移动无关.

Be^8 质心坐标为 R_c ,

$$R_c = \frac{1}{2} (R_1 + R_2). \quad (\text{A}\cdot 11)$$

α 团之间相对坐标为 R_{12} ,

$$R_{12} = R_1 - R_2. \quad (\text{A}\cdot 12)$$

此时总动能算符在相对坐标下写为

$$\hat{T}_{\text{总}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^8 \nabla_i^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{8} \nabla_{R_c}^2 + \frac{1}{2} \nabla_{R_{12}}^2 + \nabla_{\xi_1}^2 + \nabla_{\xi_2}^2 + \nabla_{\xi_3}^2 + \nabla_{\xi_4}^2 + \nabla_{\xi_5}^2 + \nabla_{\xi_6}^2 + \nabla_{\xi_7}^2 \right\}. \quad (\text{A}\cdot 13)$$

将动能分为质心动能、集团相对动能和集团内态动能三部分。

在矩阵元计算中,由于存在集团间粒子交换,为了便于计算,再进行下列坐标变换:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}b} (\xi_1 + \xi_5), & \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}b} (\xi_1 - \xi_5), \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}b} (\xi_2 + \xi_6), & \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}b} (\xi_2 - \xi_6), \\ c_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}b} (\xi_3 + \xi_7), & \eta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}b} (\xi_3 - \xi_7), \\ \eta_0 &= \frac{\sqrt{2}}{b} R_{12}. \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 14)$$

因此有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (r_i - R/2)^2 + \sum_{i=5}^8 (r_i + R/2)^2 &= 8R_c^2 + 2(R_{12} - R)^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2 + \xi_7^2 \\ &= 8R_c^2 + (\eta_0 - \sqrt{2}R_0/b)^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 15)$$

由自旋同位旋正交条件可以看到,两集团间粒子交换仅有 16 种方式,用 \tilde{p} 表示, \tilde{p} 为单位算符 e 和交换算符 (15), (26), (37), (48) 以及它们之间乘积组成,共十六个算符,仅作用于位形空间。

若令 (15), (26), (37), (48) = p_0 , 则 $\eta_i c_i$ 对于粒子交换 \tilde{p} 有如下性质:

$$\left. \begin{aligned} p_0 \eta_i &= -\eta_i \\ \tilde{p} p_0 \eta_i &= -\tilde{p} \eta_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3, \quad (\text{A}\cdot 16)$$

$$\tilde{p} c_i = c_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A}\cdot 17)$$

表 1 给出了相对坐标 η_0 在 \tilde{p} 算符作用下的变换关系。表 1 说明,对于交换粒子对数相同的交换算符, $\tilde{p} \eta_0$ 中 η_0 的系数相同。

表 1 η_0 对 \tilde{p} 算符的变换关系

$p = \tilde{p}$	$p = -\tilde{p}_0 \tilde{p}$	$p \eta_0$
e	-(15)(26)(37)(48)	η_0
(15)	-(26)(37)(48)	$\frac{1}{2}\eta_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta_1$
(26)	-(15)(37)(48)	$\frac{1}{2}\eta_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\eta_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_2$
(37)	-(15)(26)(48)	$\frac{1}{2}\eta_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3$
(48)	-(15)(26)(37)	$\frac{1}{2}\eta_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3$
(15)(26)	-(37)(48)	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\eta_2$
(15)(37)	-(26)(48)	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3$
(15)(48)	-(15)(26)	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_3$

附 录 三

伪态矩阵元积分

1. 伪态波函数垒积

对于(2.8)–(2.14)式中的伪态波函数垒积,在相对坐标形式下有简化求积方法。在同一质心激发态中的两项伪态波函数 $\varphi_i \varphi_j$ 的垒积为

$$\langle \mathcal{A} \varphi_i | \sigma \tau \rangle \langle \mathcal{A} \varphi_j | \sigma \tau \rangle = \langle \varphi_i | \sigma \tau \rangle \sum_{\bar{p}} (-1)^{\bar{p}} \langle \varphi_j | \sigma \tau \rangle = \langle \varphi_i | \sum_{\bar{p}} (-1)^{\bar{p}} \bar{p} \varphi_j \rangle \quad (\text{A} \cdot 18)$$

对自旋同位旋积分后将 8! 个反对称化交换约化为 16 个 \bar{p} 交换, \bar{p} 的内容见附录二。

对于集团相对运动波函数 $\varphi_n(\sqrt{2}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0))$,它是由 $(\eta_0 - 2u)$ 的多项式及其指数部分[见(A·15)式]组成,因此可以在指数部分引入参数 λ ,将 φ_n 在积分中化成参数微分形式,此时指数部分为

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\eta_0^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + 2u\lambda(\eta_0 - 2u) + 2u^2 \right\}.$$

因此 $(\eta_0 - 2u)^n$ 在积分中可用 $\frac{1}{(2u)^n} \frac{d^n}{d\lambda^n}$ 替代,下面列出 $n \leq 3$ 的谐振子态的等效微分形式:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\eta_0 - 2u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp, \\ \varphi_1(\eta_0 - 2u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2u}} \frac{d}{d\lambda} \exp, \\ \varphi_2(\eta_0 - 2u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/4}} \left(\frac{1}{\sqrt{8u^2}} \frac{d^2}{d\lambda^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \exp, \\ \varphi_3(\eta_0 - 2u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/4}} \left(\frac{1}{\sqrt{48u^3}} \frac{d^3}{d\lambda^3} - \frac{\sqrt{3}}{2u} \frac{d}{d\lambda} \right) \exp \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 19)$$

其中 \exp 是带参数的指数项的简记。对于被 \bar{p} 作用后的项,在指数中 $\bar{p}\eta_0^2 = \eta_0^2$,此时它的集团相对运动波函数部分类似地引入参数 ρ ,并化为对 ρ 参数的微分形式。在 $\varphi_2(R_c)$ 的前三项波函数垒积计算中,除去不同的参数微分形式外,它们具有公共的积分项:

$$\langle \bar{\varphi}_{00}(\lambda) | \sum_{\bar{p}} (-1)^{\bar{p}} \bar{p} \bar{\varphi}_{00}(\rho) \rangle = \sum_{\bar{p}} (-1)^{\bar{p}} e^{(2-\lambda-\rho)^2 u^2 - 2\lambda\rho u^2 (1-a_0)}, \quad (\text{A} \cdot 20)$$

其中

$$\bar{p}\eta_0 = a_0\eta_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3.$$

可以发现积分结果与 a_1, a_2, a_3 无关,仅是 a_0 的函数。由表 1 可知,在 \bar{p} 的各种交换算符中,交换粒子对数相等的交换项 \bar{p} 对应的 a_0 彼此相等。利用此性质大大化简上述积分,很容易得到

$$\langle \bar{\varphi}_{00}(\lambda) | \sum_{\bar{p}} (-1)^{\bar{p}} \bar{p} \bar{\varphi}_{00}(\rho) \rangle = e^{(2-\lambda-\rho)^2 u^2 (1 - e^{-\lambda\rho u^2})^4}. \quad (\text{A} \cdot 21)$$

再利用(A·19)式的微分形式可以得到各种不同相对运动激发态间的波函数垒积。

2. 伪态动能

伪态波函数对动能算符的矩阵元在计算上与上述完全一样,仅在引入动能算符后附加了一些微分计算。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_{00}(\lambda) | \hat{T}_{(\text{质})} | \sum_{\bar{p}} (-1)^{\bar{p}} \bar{p} \bar{\varphi}_{00}(\rho) \rangle &= \left(\frac{7\hbar^2}{2mb_1^2} + \frac{7\hbar^2}{4mb_2^2} \right) e^{(2-\lambda-\rho)^2 u^2 (1 - e^{-\lambda\rho u^2})^4} \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2mb_2^2} u^2 e^{(2-\lambda-\rho)^2 u^2 (1 - e^{-\lambda\rho u^2})^3} [(\lambda - \rho)^2 - (\lambda + \rho)^2 e^{-\lambda\rho u^2}]. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 22)$$

同样利用参数微分(A·19)式得到内态为 $\bar{\varphi}_{00}$ 的伪态之间动能矩阵元。

3. 伪态位能

由于 Volkov 力与自旋同位旋无关, 位能矩阵元计算也是比较简单的, 公共积分项此时取为

$$g(a) \equiv \sum_{i < j} \langle \tilde{\varphi}_{00}(\lambda) | (1 - M + M p_{ij}^x) e^{-\tilde{z}_{ij}^2/a^2} | \sum_{\tilde{p}} (-1)^{\tilde{p}} \tilde{\varphi}_{00}(\rho) \rangle$$

$$= \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{b_{\perp}}{a}\right)^2\right) \sqrt{1 + 2\left(\frac{b_x}{a}\right)^2}} \sum_{i < j} \sum_{\tilde{p}} (-1)^{\tilde{p}} \exp((2 - \lambda - \rho)^2 u^2 - 2\lambda\rho u^2(1 - a_0) - (\lambda\alpha_0 + \rho\xi)^2 \tilde{a}) \quad (\text{A.23})$$

其中 $\tilde{a} = \frac{z}{1 + 2z} u^2$, $z = \left(\frac{b_x}{a}\right)^2$, a_0 定义见 (A.20) 式. 由

$$z_i - z_j = \alpha_0 \eta_0 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \eta_3 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3 \quad (\text{A.24})$$

中得到 α_0 的定义, 且

$$\xi = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3. \quad (\text{A.25})$$

表 2 列出各粒子对之间的 α_i 值.

表 2 Be⁸ 各对粒子间 ($z_i - z_j$) 在相对坐标表示 η_i 中的 α_i 系数值

$\langle ij \rangle$	α_0	α_1	α_2	α_3	$\langle ij \rangle$	α_0	α_1	α_2	α_3		
$\langle 15 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	$\langle 24 \rangle$	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\langle 26 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	0	$\langle 34 \rangle$	0	0	0	1		
$\langle 37 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\langle 16 \rangle$	$\langle 25 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	
$\langle 48 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\langle 17 \rangle$	$\langle 35 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{2}$	
$\langle 12 \rangle$	$-\langle 56 \rangle$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\langle 18 \rangle$	$\langle 45 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\frac{1}{2}$
$\langle 13 \rangle$	$-\langle 57 \rangle$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\frac{1}{2}$	$\langle 27 \rangle$	$\langle 36 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{2}$
$\langle 14 \rangle$	$-\langle 58 \rangle$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{2}$	$\langle 28 \rangle$	$\langle 46 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\frac{1}{2}$
$\langle 23 \rangle$	$-\langle 67 \rangle$	0	0	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$-\frac{1}{2}$	$\langle 38 \rangle$	$\langle 47 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

对于 p_{ij}^x 空间交换算符, 它与 \tilde{p} 的乘积可以恒等变换为 \tilde{p} 与同一 α 团内粒子空间交换算符 p_i 的乘积, 即

$$p_{ij}^x \tilde{p} = p_i \tilde{p} p_{i_2}$$

又知在每个 α 集团内在反对称化前的空间波函数是完全对称的 (见 2.5) 式, 因此 $p_i \psi(n_{\pm}) = \psi(n_{\pm})$. 此时 p_i 在积分中等价于因子 1, 再利用表 1 及表 2 所示参数可以定出 ξ 值.

最终得到

$$g(a) = \frac{4}{\left(1 + 2\left(\frac{b_{\perp}}{a}\right)^2\right) \sqrt{1 + 2z}} e^{(2-\lambda-\rho)^2 u^2} (1 - e^{-2\lambda\rho u^2})^2 \{3 + 3e^{-2\lambda\rho u^2} + e^{-\frac{1}{2}(\lambda+\rho)^2 \tilde{a}} + 2e^{-\lambda\rho u^2 - \frac{1}{2}(\lambda+\rho)^2 \tilde{a}} + 2e^{-\lambda\rho u^2 - \frac{1}{2}(\lambda-\rho)^2 \tilde{a}} + e^{-2\lambda\rho u^2 - \frac{1}{2}(\lambda-\rho)^2 \tilde{a}} - 6e^{-\lambda\rho u^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 \tilde{a}} - 6e^{-\lambda\rho u^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \tilde{a}}\}. \quad (\text{A.26})$$

伪态位能公共项为

$$V_f(\lambda\rho) = -V_a g(a_1) + V_r g(a_2). \quad (\text{A.27})$$

利用参数微分 (A·19) 式可得 $\varphi_i(R_c)$ 前三项中各伪态之间的伪态位能矩阵元。

参 考 文 献

- [1] J. H. Elliott, *Proc. Roy. Soc.*, **A232** (1955), 561; E. C. Halbert, *Phys. Rev.*, **105** (1957), 1565; G. S. Gartenhaus, *Phys. Rev.*, **108** (1957), 482; E. Baranger, C. W. Lee, *Nucl. Phys.*, **22** (1961), 157.
- [2] B. Block, *Ann. of Phys.*, **62** (1971), 464.
- [3] K. Ikeda, T. Marumori *et al.*, *Prog. Theor. Phys., Sup.*, **No. 52** (1972).
- [4] D. M. Brink, *Proc. of Int. School of Phys., "Enrico Fermi"*, **C36** (1965).
- [5] R. Tamagaki, *Prog. Theor. Phys., Sup.*, **8** (1958), 242; S. Saito, *Prog. Theor. Phys.*, **41** (1969), 705.
- [6] M. Harvay, A. S. Jensen, *Nucl. Phys.*, **A179** (1972), 33.
- [7] A. B. Volkov, *Nucl. Phys.*, **A91** (1967), 1.
- [8] Н. Н. Лебедев, «Специальные функции и их приложения», стр. 81 (1963).

SPURIOUS STATES OF MOTION OF THE CENTER OF MASS IN THE DOUBLE WELL-CLUSTER SHELL MODEL

ZHANG JING-SHANG ZHUO YI-ZHONG

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper we use the microscopic "double well-cluster shell model" to discuss the existence of spurious states of motion of the center of mass during nuclear fission and heavy ion reactions. We outline the derivation of the general formulae with which the wave functions of the motion of the center of mass can be separated. Taking Be^8 as an example, the existence of the spurious states is illustrated, and the components of these states and their corrections to the energy matrix elements are quantitatively evaluated.

Through the analysis of the results of Be^8 mentioned above, we conclude: although the proportion of the spurious states is only several per cent, their corrections to the fission barrier are significant, even larger than the corrections due to coulomb energy, and it is necessary to take them into account in accurate quantitative calculations. For a heavier nucleus, or higher excited states, the spurious states of the motion of the center of mass should be considered in more detail.