第25卷 第4期　　物 理 学 报　　Vol. 25, No. 4
1976年7月　　ACTA PHYSICA SINICA　　July, 1976

介子的零点波函数和 $\pi_{\mu2}$, $K_{\mu2}$ 及 $1^- \longrightarrow e^+e^-$ 衰变过程*

李炳安　阮同泽
(中国科学院高能物理研究所)

本文基于文献[1]中提出的介子波函数与原始的层子弱流和层子电磁流，利用 Bethe-Salpeter 方程(以下简称 B-S 方程)，尝试对 0^- 和 1^- 介子的零点波函数进行了讨论. 文中给出了 0^-, 1^- 介子的零点波函数与质量的关系: $\chi_2(0) = A(1 + bm)$, 其中 A, b 是与质量无关的参数，m 是相应介子的物理质量. 这样一种函数形式可以解释 $\pi_{\mu2}$, $K_{\mu2}$ 和 $1^- \rightarrow e^+e^-$ 过程的几率.

几年前，层子模型[2]在讨论 $\pi_{\mu2}$ 和 $K_{\mu2}$ 衰变过程时发现，如果要理论和实验相符合，则要求两介子的零点波函数满足

$$\left|\frac{\phi_K(0)}{\phi_\pi(0)}\right|^2 \neq 1. \tag{1}$$

如果取文献[3]中定出的卡比玻角 $\theta = 0.22$, 则要求

$$\left|\frac{\phi_K(0)}{\phi_\pi(0)}\right|^2 = 5.39. \tag{2}$$

从(2)式可以看到物理的 0^- 介子的零点波函数对其质量的依赖性是很强的，也就是说 SU_3 对称性的破坏是很大的. 其实，这一点并不奇怪. 按照层子模型[2]，只有超强相互作用才具有 SU_3 的对称性；而强相互作用是破坏 SU_3 对称性的. 从8重态的 0^- 介子质量分裂来看，破坏的程度是很厉害的. 因此物理介子的零点波函数可能与介子的质量有很密切的关系. 在文献[4]中，根据实验资料对介子零点波函数与质量的关系进行了讨论. 在文献[5]中，从流代数出发，在一定的条件下得到

$$|\phi(0)|^2 \propto m. \tag{3}$$

本文将从零点波函数的重整化的角度出发，利用 B-S 方程来讨论介子的零点波函数. 我们取电磁相互作用和弱相互作用的哈密顿量为

$$\mathscr{H}_I^{em}(x) = ie\bar{\phi}(x)Q\hat{A}(x)\phi(x), \tag{4}$$

$$\mathscr{H}_I^{w}(x) = i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\phi}(x)Q^w\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi(x)j_\mu^l(x), \tag{5}$$

式中 $Q^w = \lambda_2^1\cos\theta + \lambda_3^1\sin\theta$, λ_2^1, λ_3^1 是 SU_3 的无穷小算符，$j_\mu^l(x)$ 是轻子流. 我们将用(4)

* 1975年2月4日收到.

式讨论 1^- 介子的电磁湮没过程;用(5)式讨论 $\pi_{\mu2}$, $K_{\mu2}$ 的弱衰变过程. 由于取的是原始相互作用,因此在 (5) 式中赝矢项和矢量项的比例为 1. 我们认为,既然把全部重整化效应归结到零点波函数中,那末在弱相互作用哈密顿量中就不应再引入一个赝矢项与矢量项的比例常数. 这是本文与文献[5]不同点之一. 另外,文献[5]由(3)式给出的

$$\left|\frac{\phi_K(0)}{\phi_\pi(0)}\right|^2 = 3.55$$

比实验所要求的(2)式的值要小很多.即使取 $\theta=0.239$, 这个值也比实验所要求的小 30% 左右.

0^- 介子由 a 衰变为 $\mu\nu$ 的 S 矩阵元可以写为

$$\langle\mu\nu|S|a\rangle = -i(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\langle\mu\nu|j_\mu^l(0)|0\rangle\langle 0|j_\mu^w(0)|a\rangle, \tag{6}$$

其中

$$j_\mu^w(x) = i\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\Phi}(x)Q^w\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi(x). \tag{7}$$

1^- 介子由 V 衰变为一对正负电子的 S 矩阵元可以写为

$$\langle e^+e^-|S|V_\lambda\rangle = -i(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)\langle e^+e^-|j_\mu^e(0)|0\rangle\langle 0|j_\mu^{em}(0)|V_\lambda\rangle\frac{1}{m_V^2}, \tag{8}$$

其中

$$j_\mu^{em}(x) = ie\bar{\Phi}(x)Q\gamma_\mu\phi(x), \tag{9}$$

λ, m_V 是矢量介子的极化和质量.

文献[1]中给出 0^- 和 1^- 介子的零点波函数为

$$\chi_a(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m_a}{E_a}}\left\{\chi_{1a}(0) - i\frac{\hat{p}_a}{m_a}\chi_{2a}(0)\right\}\gamma_5\phi_a, \tag{10}$$

$$\chi_{V_\lambda}(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m_V}{E_V}}\left\{\chi_{2V}(0) - i\frac{\hat{p}_V}{m_V}\chi_{1V}(0)\right\}\hat{e}^\lambda(P_V)\phi_V, \tag{11}$$

式中 ϕ_a, ϕ_V 是相应介子的 SU_3 波函数. 按照文献[1]的讨论,在 SU_6 对称的情况下,忽略介子的质量差,有如下的关系:

$$\chi_{1a}(0) = \chi_{1V}(0), \qquad \chi_{2a}(0) = \chi_{2V}(0). \tag{12}$$

利用 (10) 和 (11) 式,在质心系中可得

$$\langle 0|j_\mu^w(0)|\pi^+\rangle = -iG\cos\theta\delta_{\mu4}\chi_{2\pi}(0), \tag{13}$$

$$\langle 0|j_\mu^w(0)|K^+\rangle = -iG\sin\theta\delta_{\mu4}\chi_{2K}(0), \tag{14}$$

$$\langle 0|j_\mu^{em}(0)|V_\lambda\rangle = -i\sqrt{2}e\delta_{\lambda_\mu}\chi_{2V}(0)\mathrm{Sp}Q\phi_V. \tag{15}$$

由此可见, 在 $\pi_{\mu2}$, $K_{\mu2}$ 和 $1^-\to e^+e^-$ 的衰变几率中, 将只有介子的零点波函数 $\chi_2(0)$ 是未知的.

介子零点波函数的 B-S 方程可以写为

$$\chi_{\alpha\beta}(0) = \int S_F(-x_1)_{\alpha\alpha'}G(x_1,x_2,x_3,x_4)_{\alpha'\beta',\gamma\delta}\chi(x_4,x_3)_{\delta\gamma}S_F(x_2)_{\beta'\beta}d^4x_1\cdots d^4x_4, \tag{16}$$

其中 $G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是积分核, $\chi(x_4,x_3)$ 是介子波函数. 按照文献[1]的讨论,这个波函

数的大分量可以写为

$$\chi_a(x_3, x_4) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_a}{E_a}} \left\{\chi_{1a}(x) - i\frac{\hat{p}_a}{m_a}\chi_{2a}(x)\right\} e^{ip_a X}\gamma_5\phi_a, \tag{17}$$

$$\chi_{V_\lambda}(x_3, x_4) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_V}{E_V}} \left\{\chi_{2V}(x) - i\frac{\hat{p}_V}{m_V}\chi_{1V}(x)\right\} e^{ip_V X}\hat{e}^\lambda(P_V)\phi_V, \tag{18}$$

式中 $x = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$, $x = x_3 - x_4$. 忽略质量差后,有

$$\chi_{1a}(x) = \chi_{1V}(x), \qquad \chi_{2a}(x) = \chi_{2V}(x). \tag{19}$$

现在我们利用方程(16)和 1^- 介子的波函数(11)和(18)式来讨论 1^- 介子的零点波函数 $\chi_{2V}(0)$. 将(11)式代入(16)式左边,遍乘 $\gamma_\mu\phi_V^*$ 后求迹,在质心系中可得

$$\sqrt{2}\,\delta_{\mu\lambda}\chi_{2V}(0) = \mathrm{Sp}\int G_\mu(x_3, x_4)\phi_V^*\chi_{V_\lambda}(x_4, x_3)d^4x_3d^4x_4, \tag{20}$$

其中

$$G_\mu(x_3, x_4)_{\alpha\beta} = (\gamma_\mu)_{\alpha'\beta'}\int S_F(x_2)_{\gamma\alpha'}S_F(-x_1)_{\beta'\delta}G(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\delta\gamma,\,\alpha\beta}d^4x_1d^4x_2. \tag{21}$$

从洛仑兹协变性质看, $G_\mu(x_3, x_4)$ 是一个洛仑兹矢量,可以写成

$$\begin{aligned} G_\mu(x_3, x_4) = {} & D_\mu(x_3, x_4) + D(x_3, x_4)\gamma_\mu + D_{\mu\nu}(x_3, x_4)\gamma_\nu \\ & + D'_\nu(x_3, x_4)\sigma_{\nu\mu} + D_{\mu\nu\lambda}(x_3, x_4)\sigma_{\nu\lambda}, \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $D_\mu(x_3, x_4), \cdots, D_{\mu\nu\lambda}(x_3, x_4)$ 是由 4-矢量 x_3, x_4 构成的协变量. 对 $D_{\mu\nu}(x_3, x_4)$, $\mu \neq \nu$; 对 $D_{\mu\nu\lambda}(x_3, x_4)$, $\mu \neq \nu$, $\mu \neq \lambda$. 将(18), (22)式代入(20)式, 可得

$$\chi_{2V}(0) = A + Bm_V, \tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \int D(x_3, x_4)\chi_{2V}(x_4, x_3)d^4x_3d^4x_4, \\ Bm_V &= i\int D'_4(x_3, x_4)\chi_{1V}(x_4, x_3)d^4x_3d^4x_4. \end{aligned} \tag{24}$$

从(24)式可以看到, 一般来说, A 与 B 都与矢量介子的物理质量 m_V 有关. 但是要具体地知道 A, B 与 m_V 的关系,需要较多的动力学知识,这在目前是比较困难的. 在文献[2]中利用下列等效哈密顿量

$$\mathscr{H}_i(x) = ie\bar{\phi}(x)\left\{\hat{A} - i\frac{\kappa}{4m_N}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}\phi(x),$$

讨论了矢量介子的湮没过程. 利用这一哈密顿量计算出物理的矢量介子的零点波函数是

$$\chi_{2V}^P(0) = \chi_2^S(0) + \frac{\kappa m_V}{2m_N}\chi_1^S(0),$$

式中上标 P 表示物理的零点波函数, S 表示只考虑超强作用的零点波函数. 将(23)式与此式比较,得

$$A = \chi_2^S(0), \qquad B = \frac{\kappa}{2m_N}\chi_1^S(0).$$

它们与 m_V 是无关的. 根据这一讨论, 在一般情况下,我们假定 A, B 是与介子质量无关

的两个量.

在 SU_6 对称的情况下,忽略 0^- 介子与 1^- 介子的质量差,由 (12), (23) 式可得

$$\chi_{2a}(0) = A + Bm_0, \tag{25}$$

m_0 是 35 重态介子的平均质量. 下面来讨论这一表达式将带来一些什么样的结果.

与讨论 1^- 介子零点波函数的方法相同,可以利用方程 (16) 来讨论 0^- 介子零点波函数 $\chi_{2a}(0)$. 将 (10) 式代人 (16) 式左边,遍乘 $\gamma_5\gamma_\mu\phi_a^*$ 后求迹,在质心系中可得

$$\sqrt{2}\,\delta_{\mu 4}\chi_{2a}(0) = \mathrm{Sp}\int G_\mu^5(x_3, x_4)\phi_a^*\chi_a(x_4, x_3)d^4x_3d^4x_4, \tag{26}$$

其中

$$G_\mu^5(x_3, x_4)_{\alpha\beta} = (\gamma_5\gamma_\mu)_{\alpha'\beta'}\int S_F(x_2)_{\gamma\alpha'}S_F(-x_1)_{\beta'\delta}G(x_1, x_2, x_3, x_4)_{\delta\gamma,\,\alpha\beta}d^4x_1d^4x_2, \tag{27}$$

$G_\mu^5(x_3, x_4)$ 是一个赝矢量,从洛仑兹协变性出发,可以写成

$$\begin{aligned} G_\mu^5(x_3, x_4) = {} & d_\mu(x_3, x_4)\gamma_5 + d(x_3, x_4)\gamma_\mu\gamma_5 + d_{\mu\nu}(x_3, x_4)\gamma_\nu\gamma_5 \\ & + d_\nu(x_3, x_4)\sigma_{\nu\mu}\gamma_5 + d_{\mu\nu\lambda}(x_3, x_4)\sigma_{\gamma\lambda}\gamma_5 \\ & + d_\mu^5(x_3, x_4) + d^5(x_3, x_4)\gamma_\mu + d_{\mu\nu}^5(x_3, x_4)\gamma_\nu, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $d_\mu(x_3, x_4), \cdots, d_{\mu\nu}^5(x_3, x_4)$ 是由 4-矢量 x_3, x_4 构成的协变量. 带有上标"5"的 d 函数,表示其中含有一个 4 阶全反对称张量 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$. 将 (17), (28) 式代入 (26) 式, 可以看出 (28) 式中只有前三项对 $\chi_{2a}(0)$ 有贡献. 使用讨论 A, B 性质的相同近似时, 我们看到 $d_{\mu\nu}(x_3, x_4)\gamma_\nu\gamma_5$ 项给出与 m^2 成正比的项. 但在利用 SU_6 对称性所得到的 (25) 式中不含有这样的项, 因此可以认为这种项与前两项相比是很小的. 在同一近似下, (28) 式第一项给出与m成正比的项,第二项与m无关. 因此, 0^- 介子的零点波函数 $\chi_{2a}(0)$ 可以写成

$$\chi_{2a}(0) = A + Bm_a. \tag{29}$$

这样, 0^- 介子和 1^- 介子的零点波函数可以统一地写成

$$\chi_2(0) = A(1 + bm), \qquad b = \frac{B}{A}. \tag{30}$$

现在将这个关系式和实验进行比较.由 (6), (13) 和 (14) 式,可以得到 $\pi_{\mu 2}$, $\mathrm{K}_{\mu 2}$ 的衰变几率为

$$W(\mathrm{K}_{\mu 2}) = \frac{G^2\sin^2\theta}{2\pi}|\chi_{2\mathrm{K}}(0)|^2m_\mu^2\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\mathrm{K}^2}\right)^2, \tag{31}$$

$$W(\pi_{\mu 2}) = \frac{G^2\cos^2\theta}{2\pi}|\chi_{2\pi}(0)|^2m_\mu^2\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2. \tag{32}$$

由它们的比值的实验值[6]和 $\theta = 0.22$ 定出

$$b^{-1} = \begin{cases} 129 & \mathrm{MeV}, \\ -247 & \mathrm{MeV}, \end{cases} \tag{33}$$

其中负解使 $\chi_{2\pi}(0) > 0$ 而 $\chi_{2\mathrm{K}}(0) < 0$. 选取使零点波函数大于零的解, 由 π^+ 介子的寿命定出

$$A^2 = 1.41 \times 10^5 \quad (\mathrm{MeV})^3. \tag{34}$$

利用 A^2, b 这两个值得到 ρ, ω 和 ϕ 介子的零点波函数的平方为

$$
\begin{aligned}
|\chi_{2\rho}(0)|^2 &= 6.85\times 10^6 \quad (\mathrm{MeV})^3,\\
|\chi_{2\omega}(0)|^2 &= 7.05\times 10^6 \quad (\mathrm{MeV})^3,\\
|\chi_{2\phi}(0)|^2 &= 1.13\times 10^7 \quad (\mathrm{MeV})^3.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

利用(8)和(15)式可以得到 ρ, ω 和 ϕ 介子湮没为一对正负电子的几率为

$$
\begin{aligned}
W_\rho &= \frac{8\pi}{3}\alpha^2\frac{1}{m_\rho^2}|\chi_{2\rho}(0)|^2 = 5.2\ \mathrm{keV},\\
W_\omega &= \frac{8\pi}{27}\alpha^2\frac{1}{m_\omega^2}|\chi_{2\omega}(0)|^2 = 0.57\ \mathrm{keV},\\
W_\phi &= \frac{16\pi}{27}\alpha^2\frac{1}{m_\phi^2}|\chi_{2\phi}(0)|^2 = 1.07\ \mathrm{keV},\\
& W_\rho : W_\omega : W_\phi = 1:0.11:0.21.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

实验值[6]为

$$
\begin{aligned}
W_\rho &= 6.5\pm 1.2\ \mathrm{keV},\\
W_\omega &= 0.76\pm 0.20\ \mathrm{keV},\\
W_\phi &= 1.34\pm 0.15\ \mathrm{keV},\\
W_\rho : W_\omega &: W_\phi = 1:0.12:0.21.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

理论值比实验值略小一些，但基本上相符合.

从上面的讨论看来，用含有两个参数的 (30) 式所表示的零点波函数可以解释五个实验. 这说明这种形式的零点波函数与实验是不矛盾的.

参　考　文　献

[1] 李炳安，物理学报，**24** (1975), 21.
[2] 1966 年北京暑期物理讨论会上北京基本粒子理论组论文.
[3] 阮同泽、李炳安，层子模型中重子的半轻子衰变和高能中微子反应，待发表.
[4] 何祚庥，北京大学学报 (自然科学)，**12** (1966), 205.
[5] A. Dar, V. F. Weisskopf, *Phys. Letters*, **26B** (1968), 670.
[6] Particle Data Group, *Phys. Letters*, **50B** (1974), 1.

MESONIC WAVE FUNCTIONS AT ZERO POINT AND DECAY PROCESSES $\pi_{\mu2}$, $K_{\mu2}$ AND $1^-\to e^+e^-$

Li Ping-an　　Yuan Tong-ze

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)