关于"典型时空"的问题讨论

自从本刊发表了《典型时空中的运动效应和宇观红移现象》[1]以及《典型时空理论中的几个问题》[2]以后，陆续收到一些读者来稿，对于有关问题提出不少看法．现摘登如下，供大家讨论参考．

刘辽同志（北京师范大学物理系）来稿

所谓惯性系，即是在此种坐标系中，自由粒子作匀速直线运动．如果采用直角坐标系，匀速直线运动与时、空坐标之间的线性关系相等效，惯性系可以简单地定义为坐标加速度 $\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=0$；但若采用曲线坐标系，那么匀速直线运动与时、空坐标之间的线性关系就不等效了，因此坐标加速度等于零就不再是惯性系的充要条件．在文献[1]所讨论的典型时空中，引入度规（2.2）式（原文公式编号，下同），的确可以得出沿类时测地线运动的自由粒子的坐标加速度为零．但能否由此得出度规（2.2）式所确立的坐标系是惯性系呢？我们认为：不能！理由是：度规（2.2）式不是 Minkowski 度规，其空间部分不是直角坐标系．因而坐标系加速度等于零（如（2.9）式所示）或时、空坐标之间的线性关系（2.8）式与匀速直线运动不是等效的．

另外，像对钟手续与同时性规定问题，文献[2]正确地指出了文献[1]的不自洽．但是文献[2]提出"似可……附加适当条件，以使体系达到自洽"的建议，这是我们难以同意的．文献[1]认为，在弯曲时空中"同一坐标系中不同地点同时发生的事件，自然是指在相同坐标时刻发生的事件"，这种脱离实际测量的抽象定义在物理学中是没有意义的．而且我们认为在同时性问题上的非传递性也是难以克服的．

在常负曲率时空内，类时测地线是闭合的[3]．因此，文献[1]所提的时空模型是违背因果律的．这一结论与度规选择无关．看来，要想采用负常曲率的时空模型而又企图避免上述严重困难，这是很难办到的．

杨以鸿同志（陕西省陇县中学）来稿

狭义相对性原理首先要求存在惯性系，然后才能言及惯性系之间的等价．根据文献[1]的设想，使得度量为（2.2）式的坐标系恰是一个"惯性系"．然而文献[2]已指出，它不是一个严格的惯性系．值得进一步强调的是，若注意到在一般常曲率空间（包括"典型时空"）中，曲率张量满足下列等式[4]：

$$R_{abcd}=\lambda(g_{ac}g_{bd}-g_{ad}g_{bc}).$$

由此，典型时空中"自由质点"之间的相对加速度为

$$\frac{D^2\eta^a}{ds^2}=\lambda(\delta^a_d g_{bc}-\delta^a_c\eta_{bd})u^b\eta^c u^d$$

这是个广义协变方程，因此，在典型时空的所有允许参考系中，"自由质点"之间普遍存在着相对加速度，因而不具备惯性系的基本特征.

其实，从物理观点看来，在典型时空模型中不存在大范围惯性系是十分明显的，因为在此模型中，存在着不由寻常物质决定的内禀黎曼曲率，这相当于时空中存在着一种固有的引力场. 因此在这个时空中运动的任何粒子都要受到这一固有引力场的作用，不会是真正的自由粒子.

陈方培同志(大连工学院)来稿

1. 关于粒子四维动量的定义

文献[1]对于粒子四维动量的定义是

$$p^j = m_0 \frac{1}{\sigma} \frac{dx^j}{ds}. \tag{1}$$

这与广义相对论中的定义

$$p^j = m_0 \frac{dx^j}{ds} \tag{2}$$

是不同的. 但文献[1]认为自由粒子沿类时测地线的运动为

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{3}$$

这与广义相对论的看法是一致的.

自由粒子的运动方程通常可由变分原理

$$\delta I = m_0 \delta \int ds = 0 \tag{4}$$

决定[5,6]. (4) 式可以改写为

$$\delta I = m_0 \delta \int \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}}\, ds = \delta \int L ds = 0, \tag{4'}$$

$$L = m_0 \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}}.$$

大家知道，由 (4) 式可导出 (3) 式. 而且根据广义动量的一般定义

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\beta} m_0 \frac{dx^\beta}{ds} \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\right) \tag{5}$$

可算出自由粒子的动量：

$$p^j = g^{j\alpha} p_\alpha = g^{j\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g^{j\alpha} g_{\alpha\beta} m_0 \frac{dx^\beta}{ds} = m_0 \frac{dx^j}{ds}.$$

这一结果与(2)式是相同的，但与(1)式不一致. 这表明由 (1) 式所表述的定义与广义动量的一般定义(即 (5) 式)存在着不协调的地方.

2. 关于动量、能量守恒定律

众所周知，在狭义相对论中，四维动量守恒定律同时空具有平移对称性密切相关. 由于典型时空不具有平移对称性，人们必然要提出这样一个问题：在典型时空中，动量、能量守恒定律是否仍然成立？

文献[1]由于采用(1)式作为粒子的四维动量的定义,也得到了守恒定律:

$$\frac{dp^j}{ds}=\frac{d}{ds}\left(m_0\frac{1}{\sigma}\frac{dx^j}{ds}\right)=0. \tag{6}$$

这与(3)式存在初积分

$$\frac{1}{\sigma}\frac{dx^j}{ds}=A^j \qquad (A^j\text{ 为积分常数}) \tag{7}$$

密切相关. 然而,我们要指出,这种以(1)式为定义的四维动量守恒定律虽然对自由粒子仍然成立,但能否推广到在外场中运动的粒子或其间存在相互作用的粒子系,这是颇有疑问的,至少是缺乏实验根据的. 理由如下:

粒子及场的运动方程通常可由变分原理导出;某一守恒定律是与拉氏函数(密度)的某种对称性相对应的. 例如,由(6)式表示的守恒定律之所以成立,是同(4′)式中的拉氏函数 L(或度规张量 $g_{\alpha\beta}$)在下述变换(文献[1](2.3)式)

$$x^i\to\tilde{x}^i=\sqrt{1-\lambda\eta_{rs}a^ra^s}\,\frac{x^j-a^j}{1-\lambda\eta_{rs}a^ra^s}D^i_j \tag{8}$$

下保持不变相对应的.

对于在外场(引力场除外)中运动的粒子或其间存在相互作用的粒子系,拉氏函数(密度)由三部分组成:

$$L=L_1+L_2+L_3,$$

L_1 描述自由粒子的运动; L_2 描述自由场的运动; L_3 描述相互作用. 如果以(1)式为定义的四维动量守恒定律能够推广,则不仅要求 L_1,而且要求 L_2 及 L_3 在(8)式所示的坐标变换下具有不变性. 这种不变性究竟是否存在? 这一点只能由实验事实来确定,而不可能只从时空特性推演出来. 这个问题必须由新的科学实验和天文观察来回答.

如果实验事实不能为 L_2, L_3 提供所要求的不变性,则在典型时空中除自由粒子外,取(1)式为定义的动量、能量守恒定律很可能不成立. 此时,考虑到(1)式与广义动量的定义不协调,采用(1)式而不采用(2)式作为四维动量的定义就没有充分理由了. 但若取(2)式作为粒子的四维动量的定义,则在典型时空中,连自由粒子的动量、能量也不守恒了.

3. 关于等效原理

文献[1]还提出了在典型时空中引力和惯性力的等效性,并且认为可以以此为基础建立起“在典型时空惯性系意义上等效的引力理论”.

文献[2]已经指出了典型时空中的惯性系(因而惯性力)的问题. 我们在这儿要进一步指出: 纵使在典型时空中存在有惯性系,那么仍有一些问题需加商讨.

在广义相对论中,引力场系由度规张量描述. 在典型时空中,如果等效原理成立,则引力场的存在仍然通过度规的改变表现出来. 但在这一理论中,不管引力场存在与否,度规都具有伪黎曼几何的特性,差别仅在于: 当引力场不存在时,时空具有常曲率; 当引力场存在时,时空不具有常曲率. 虽然我们也可以说,引力场的存在使典型时空的曲率发生了改变. 但是用实验方法只能定出总的曲率,那么怎样分辨出由引力所造成的曲率改变呢? 这是需要解决的一个问题.

邵济群同志（青海工农学院）来稿

我们讨论在典型时空定义域中 $(t, \rho, 0, 0)$ 处的三维线元 dl^2 的正定性问题.

典型时空理论认为常曲率四维时空可以由下式定义的域 $\mathscr{D}_\lambda(1, 4)$ 表示:

$$\sigma \equiv 1 - \lambda\eta_{ij}x^i x^j > 0 \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

其中 $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. 域 $\mathscr{D}_\lambda(1, 4)$ 中有度量:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{1}$$

$$g_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\sigma} + \frac{\lambda}{\sigma^2}\eta_{ir}\eta_{js}x^r x^s.$$

根据三维度规张量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的表式[5],即

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{2}$$

其中

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

由二次型理论知 dl^2 正定的条件为

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0. \tag{3}$$

于是由 (1), (2) 式知, $(t, \rho, 0, 0)$ 处三维线元 dl^2 将为

$$dl^2 = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} \frac{1}{1+\lambda\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dx^\alpha dx^\beta.$$

由条件 (3) 知,当 $\lambda < 0$ 时,

$$dl^2 > 0 \quad 若 \quad \rho < \sqrt{\frac{1}{|\lambda|}};$$

$$dl^2 < 0 \quad 若 \quad \sqrt{\frac{1}{|\lambda|}} < \rho < \sqrt{\frac{1}{|\lambda|} + t^2}.$$

这就是说, $\lambda < 0$ 时,在 $\sqrt{\frac{1}{|\lambda|}} < \rho < \sqrt{\frac{1}{|\lambda|} + t^2}$ 的区域中, $(t, \rho, 0, 0)$ 处的三维线元具有虚长度. 此外,由 (1) 式可知,在此区域中 $g_{00} < 0$, 因此相对某个坐标系中空间同一点发生的两个无限近的事件间隔 $ds^2 = g_{00}dx_0^2 < 0$,即间隔是类空的. 这将违反因果律.

以上两点,看来是不合理的.

参　考　文　献

[1] 陆启铿、邹振隆、郭汉英,物理学报, **23** (1974), 225.

[2] 方励之,物理学报, **24** (1975), 381.

[3] J. L. Synge, Relativity, the general theory (1960), 264—265.

[4] Л. Эйзенхарт, Риманова геометрия (1948).

[5] 朗道、栗弗西兹,场论,高等教育出版社 (1959), 297 页.

[6] 福克,空间、时间和引力的理论,科学出版社 (1965), 179 页.