第 25 卷 第 5 期　　物 理 学 报　　Vol. 25, No. 5
1976 年 9 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Sept., 1976

加速器自由振荡近似解的简便方法*

谢 羲
(中国科学院原子能研究所)

提 要

本文提出加速器自由振荡近似解的简便方法，按规律能直接写出任何级近似解，并分出光滑项与快振荡项，该法可令计算机直接输出任何级近似解的公式；举实例以示该法的应用；最后证明该法的数学根据。

一、任务的提出

加速器自由振荡可归结成 Hill 方程．美籍科学家邓昌黎首先获得该方程近似解的三次近似光滑项，并举实例验证[1]．在加速器理论中，得到广泛应用[2]．但其方法繁琐，故只求得三次近似解．更重要的问题在于该方法仅获得近似解中的光滑项，而整个近似解则付阙如，同时没有对该方法的原理提出数学证明，有些地方甚至解释不当1)．

Боголюбов 对上述 Hill 方程 $\frac{d^2x}{d\theta^2} + g(\theta)x = 0$ 的近似解提出平均法[3]，将二次方程化成一次方程组，故该法更加繁琐．Коломенский 引用该法解加速器自由振荡，只获得一次近似解[4]． Боголюбов 对其平均法原理提出数学证明，但假定 $g(\theta)$ 为可任意选择的小数量，始能令近似解与精确解任意逼近[3]．对给定加速器，$g(\theta)$ 也即给定，不能任意选择，

* 1974 年 6 月 6 日收到．

1) 邓昌黎在文献[1]中，认为光滑项频率 ω 与快振荡周期 s 无关，故

$$\lim_{s\to 0} \frac{2\delta}{s^2} = \lim_{s\to 0} \omega^2\left(1 - \frac{2\omega^2 s^2}{4!} + \frac{2\omega^4 s^4}{6!} - \cdots\right) = \omega^2.$$

这种解释似欠妥，就以他自己所举的实例

$$\omega^2 = \frac{n^2 s^2}{12} + \frac{2}{945} n^2 s^4 + \cdots$$

来看，ω^2 显为 s 的函数，并且 $\lim\limits_{s\to 0}\omega^2 = 0$，但该式仍正确．其物理意义是快振荡周期 s 与光滑慢振荡周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的比 $\frac{S}{T} = \frac{\omega s}{2\pi}$ 在平均过程中趋近零；其数学意义是，ω^2 为 $\bar{g}$, $\bar{g}_1^2$, $\cdots$的函数，而 $\bar{g}$, $\bar{g}_1^2$, $\cdots$又为 s 的函数，但当其未显为 s 的函数代入时，δ 中 $\frac{s^2}{2!}$ 的系数就是 ω^2，$\frac{-s^4}{4!}$ 的系数就是 ω^4，这里与任何极限过程或平均过程无关．以一级近似为例：

$$\delta = (\bar{g} + \bar{g}_1^2)\frac{s^2}{2!} - \bar{g}^2 \frac{s^4}{4!},$$

其中 $\frac{s^2}{2!}$ 的系数就是 $\omega^2 = \bar{g} + \bar{g}_1^2$，$\frac{-s^4}{4!}$ 的系数就是 ω^4，因一级近似 δ 取至四级小数量，故

$$-(\bar{g} + \bar{g}_1^2)^2 \frac{s^4}{4!} \approx -\bar{g}^2 \frac{s^4}{4!}$$

所以该平均法原理的数学证明对我们的任务不适用.

因此,我们的任务是:

1. 提出加速器自由振荡近似解的简便方法,按规律能直接写出任何级的近似解,并分出其精细结构光滑项与快振荡项,该法可令计算机直接输出任何级似近解的公式.

2. 对该方法原理提出数学证明.

二、加速器自由振荡近似解的简便方法

现直接提出加速器自由振荡近似解的简便方法,其数学证明见第四节.

加速器自由振荡可归结成 Hill 方程:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + g(\theta)x = 0, \tag{1}$$

其中 $g(\theta) = g(\theta \pm ns)$, $n = 1, 2, \cdots$; s 为快振荡周期, 因此视为一级小数量, 即 $s \sim \varepsilon$.

Hill 方程 (1) 的解可分成光滑项 X 与快振荡项 ξ, 即 $x = X + \xi$, $\xi = aX + bX'$, 代入 (1) 式得

$$X'' + \xi'' + (g + ga)X + gbX' = 0. \tag{2}$$

光滑项 X 定义为满足下列微分方程的函数:

$$X'' + (\bar{g} + \overline{ga})X + \overline{gb}X' = 0. \tag{3}$$

该定义的物理内容是将 Hill 方程 (2) 中的快振荡系数 g, ga, gb 分别代以其对周期 s 的平均值 $\bar{g}$, $\overline{ga}$, $\overline{gb}$, 即平均掉快振荡, ξ'' 亦为快振荡,其平均值当为零,从数学观点必须强调 (3) 式乃 X 的定义,并非对 (2) 式取平均值的结果.

光滑项为慢变化函数,故 $X' \sim \varepsilon$.

为计算方便,采用下列定义[1]:

$$g = \bar{g} + g_0, \quad g_1 = \int g_0 d\theta + c_1, \quad g_i = \int g_{i-1} d\theta + c_i, \tag{4}$$

其中积分常数 c_i 决定于纯周期函数条件 $\bar{g}_i = 0$, 显然 g_i 为 i 级小数量,即 $g_i \sim \varepsilon^i$.

根据 X 的定义 (3) 式,由 (2) 式得

$$\xi'' + [g_0 + (ga)_0]X + (gb)_0 X' = 0. \tag{5}$$

方程 (1) 需两个原始条件而得唯一解, 其对应的方程组 (3) 和 (5) 需四个原始条件而得唯一解,故要完整定义 X,还需自由选择两个原始条件.

1. 零级近似

$\xi_0(\theta) = 0$,选择原始条件 $\xi_0(0) = \xi_{0,0} = 0$, $\xi_0'(0) = \xi_{0,0}' = 0$,根据定义(3)式, X_0 满足方程

$$X_0'' + \bar{g}X_0 = 0, \tag{6}$$

其中光滑慢振荡频率为 $\omega_0^2 = \bar{g}$.

(6) 式的两个原始条件决定于 (1) 式的两个原始条件.

零级近似解仅含光滑项:

$$x_0 = X_0 + \xi_0 = X_0. \tag{7}$$

2. 一级近似

以零级近似解 (7) 式代入 (5) 式，得一级近似解

$$\xi_1 = -\iint g_0 X_0 d\theta^2 = (-g_2 + 3g_4\omega_0^2 - 5g_6\omega_0^4 + 7g_8\omega_0^6 - 9g_{10}\omega_0^8 + \cdots)X_0 + (2g_3 - 4g_5\omega_0^2 + 6g_7\omega_0^4 - 8g_9\omega_0^6 + \cdots)X_0'. \tag{8}$$

一级近似取至二级小数量，即 $\xi_1 = -g_2X_0$，原始条件选择为 $\xi_1(0) = -g_2(0)X_0(0) = \xi_{1,0}$，$\xi_1'(0) = -g_1(0)X_0(0) = \xi_{1,0}'$，因 $X_1 - X_0 \sim \varepsilon^2$ 1)，即 $g_2(X_1 - X_0) \sim \varepsilon^4$，可改写

1) n 级近似解为

$$X_n + \xi_n = (1 + a_n)X_n + b_nX_n',$$
$$X_n' + \xi_n' = (a_n' - b_n\omega_n^2)X_n + (1 + a_n + b_n')X_n'.$$

因 $a_{n+1} = a_n + o_a(\varepsilon^{2(n+1)})$，$b_{n+1} = b_n + o_b(\varepsilon^{2n+1})$，$\omega_{n+1}^2 = \omega_n^2 + o_\omega(\varepsilon^{2(n+1)})$，故 $(n+1)$ 级近似解为

$$X_{n+1} + \xi_{n+1} = [1 + a_n + o_a(\varepsilon^{2(n+1)})]X_{n+1} + [b_n + o_b(\varepsilon^{2n+1})]X_{n+1}',$$
$$X_{n+1}' + \xi_{n+1}' = \{a_n' + o_a'(\varepsilon^{2(n+1)}) - [b_n + o_b(\varepsilon^{2n+1})][\omega_n^2 + o_\omega(\varepsilon^{2(n+1)})]\}X_{n+1} + [1 + a_n + o_a(\varepsilon^{2(n+1)}) + b_n' + o_b'(\varepsilon^{2n+1})]X_{n+1}'.$$

原始条件决定于下式:

$$x_{-s} = [1 + a_n(-s)]X_{n,-s} + b_n(-s)X_{n,-s}' = [1 + a_n(-s) + o_a(\varepsilon^{2(n+1)})(-s)]X_{n+1,-s} + [b_n(-s) + o_b(\varepsilon^{2n+1})(-s)]X_{n+1,-s}',$$
$$x_{-s}' = [a_n'(-s) - b_n(-s)\omega_n^2]X_{n,-s} + [1 + a_n(-s) + b_n'(-s)]X_{n,-s}'$$
$$= \{a_n'(-s) + o_a'(-s) - [b_n(-s) + o_b(-s)][\omega_n^2 + o_\omega]\}X_{n+1,-s} + [1 + a_n(-s) + o_a(-s) + b_n'(-s) + o_b'(-s)]X_{n+1,-s}'.$$

注意 j 级小数量微分得 $(j-1)$ 级小数量，自上式得

$$[1 + a_n(-s)][X_{n,-s} - X_{n+1,-s}] + b_n(-s)[X_{n,-s}' - X_{n+1,-s}'] = o_a(-s)X_{n+1,-s} + o_b(-s)X_{n+1,-s}' = o(\varepsilon^{2(n+1)}),$$
$$[a_n'(-s) - b_n(-s)\omega_n^2][X_{n,-s} - X_{n+1,-s}] + [1 + a_n(-s) + b_n'(-s)][X_{n,-s}' - X_{n+1,-s}']$$
$$= \{o_a'(-s) - o_b(-s)\omega_n^2 - [b_n(-s) + o_b(-s)]o_\omega\}X_{n+1,-s} + [o_a(-s) + o_b'(-s)]X_{n+1,-s}' = o(\varepsilon^{2n+1}).$$

解联立方程得原始条件关系:

$$X_{n,-s} - X_{n+1,-s} = \frac{[1 + a_n(-s) + b_n'(-s)]o(\varepsilon^{2(n+1)}) - b_n(-s)o(\varepsilon^{2n+1})}{[1 + a_n(-s)][1 + a_n(-s) + b_n'(-s)] - b_n(-s)[a_n'(-s) - b_n(-s)\omega_n^2]} \sim \varepsilon^{2(n+1)},$$
$$X_{n,-s}' - X_{n+1,-s}' = \frac{[1 + a_n(-s)]o(\varepsilon^{2n+1}) + [a_n'(-s) - b_n(-s)\omega_n^2]o(\varepsilon^{2(n+1)})}{[1 + a_n(-s)][1 + a_n(-s) + b_n'(-s)] - b_n(-s)[a_n'(-s) - b_n(-s)\omega_n^2]} \sim \varepsilon^{2n+1}.$$

光滑项为

$$X_n = X_{n,-s}\cos\omega_n(\theta + s) + X_{n,-s}'\frac{\sin\omega_n(\theta + s)}{\omega_n} = X_{n,-s}\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right] + X_{n,-s}'(\theta + s)\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right],$$
$$X_n' = -X_{n,-s}\omega_n\sin\omega_n(\theta + s) + X_{n,-s}'\cos\omega_n(\theta + s)$$
$$= -X_{n,-s}\omega_n^2(\theta + s)\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right] + X_{n,-s}'\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right];$$
$$X_{n+1} = X_{n+1,-s}\left[1 - \frac{\omega_{n+1}^2(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right] + X_{n+1,-s}'(\theta + s)\left[1 - \frac{\omega_{n+1}^2(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right],$$
$$X_{n+1}' = -X_{n+1,-s}\omega_{n+1}^2(\theta + s)\left[1 - \frac{\omega_{n+1}^2(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right] + X_{n+1,-s}'\left[1 - \frac{\omega_{n+1}^2(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right];$$
$$X_{n+1} - X_n = (X_{n+1,-s} - X_{n,-s})\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right] + X_{n+1,-s}\left[-\frac{o_\omega(\varepsilon^{2(n+1)})(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right]$$
$$+ (X_{n+1,-s}' - X_{n,-s}')(\theta + s)\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right] + X_{n+1,-s}'\left[-\frac{o_\omega(\varepsilon^{2(n+1)})(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right],$$
$$X_{n+1}' - X_n' = -(X_{n+1,-s} - X_{n,-s})\omega_n^2(\theta + s)\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right] - X_{n+1,-s}[o_\omega(\varepsilon^{2(n+1)})(\theta + s) - \cdots]$$
$$+ (X_{n+1,-s}' - X_{n,-s}')\left[1 - \frac{\omega_n^2(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right] + X_{n+1,-s}'\left[-\frac{o_\omega(\varepsilon^{2(n+1)})(\theta + s)^2}{2!} + \cdots\right].$$

故得 $X_{n+1} - X_n \sim \varepsilon^{2(n+1)}$，$X_{n+1}' - X_n' = \varepsilon^{2n+1}$.

$\xi_1 = a_1X_1 + b_1X' = -g_2X_1$. 根据定义 (3) 式, X_1 满足

$$X_1'' + (\bar{g} - \overline{gg_2})X_1 = 0, \tag{9}$$

其中光滑慢振荡频率 $\omega_1^2 = \bar{g} - \overline{gg_2} = \bar{g} + \bar{g}_1^2$.

(9) 式的两个原始条件决定于 (1) 式的两个原始条件.

一级近似解为

$$x_1 = X_1 + \xi_1 = (1 - g_2)X_1. \tag{10}$$

3. 二级近似

以一级近似解 (10) 式代入 (5) 式得二级近似解:

$$\xi_2 = -\iint [g_0 + (ga_1)_0]X_1 d\theta^2 = -\iint [g_0 - (gg_2)_0]X_1 d\theta^2.$$

按规律 (8) 式, 注意分别以 X_1, ω_1^2 代 X_0, ω_0^2, 取至四级小数量, 得

$$\xi_2 = [-g_2 + 3g_4\bar{g} + (gg_2)_2]X_1 + 2g_3X_1',$$

但 $X_2 - X_1 \sim \varepsilon^4$, $X_2' - X_1' \sim \varepsilon^3$ [1], 故

$$\xi_2 = a_2X_2 + b_2X_2' = [-g_2 + 3g_4\bar{g} + (gg_2)_2]X_2 + 2g_3X_2'. \tag{11}$$

根据定义 (3) 式, X_2 满足

$$X_2'' + [\bar{g} - \overline{gg_2} + 3\overline{gg_4}\bar{g} + \overline{g(gg_2)_2}]X_2 = 0, \tag{12}$$

其中 $\omega_2^2 = \bar{g} + \bar{g}_1^2 + (3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2})$, $\overline{gg_3} = 0$.

二级近似解为

$$x_2 = X_2 + \xi_2 = [1 - g_2 + 3g_4\bar{g} + (gg_2)_2]X_2 + 2g_3X_2'. \tag{13}$$

4. 三级近似

以二级近似解 (13) 式代入 (5) 式, 得三级近似解:

$$\xi_3 = -\iint \{g_0 - (gg_2)_0 + 3(gg_4)_0\bar{g} + [g(gg_2)_2]_0\}X_2 d\theta^2 - \iint 2(gg_3)_0 X_2' d\theta^2.$$

按规律 (8) 式,

$$\begin{aligned} -\iint g_0X_0' d\theta^2 = {} & (-2g_3\omega_0^2 + 4g_5\omega_0^4 - 6g_7\omega_0^6 + 8g_9\omega_0^8 - \cdots)X_0 \\ & + (-g_2 + 3g_4\omega_0^2 - 5g_6\omega_0^4 + 7g_8\omega_0^6 - \cdots)X_0', \end{aligned} \tag{14}$$

注意分别以 X_2, ω_2^2 代 X_0, ω_0^2, 取至六级小数量, 并注意 $X_3 - X_2 = \varepsilon^6$, $X_3' - X_2' \sim \varepsilon^5$, 得

$$\begin{aligned} \xi_3 = {} & \{-g_2 + 3g_4(\bar{g} - \overline{gg_2}) - 5g_6\bar{g}^2 + (gg_2)_2 - 3(gg_2)_4\bar{g} - 3(gg_4)_2\bar{g} - [g(gg_2)_2]_2 \\ & - 4(gg_3)_3\bar{g}\}X_3 + \{2g_3 - 4g_5\bar{g} - 2(gg_2)_3 - 2(gg_3)_2\}X_3'. \end{aligned} \tag{15}$$

根据定义 (3) 式, X_3 满足

$$X_3'' + \left\{\begin{aligned} & \bar{g} - \overline{gg_2} + 3\overline{gg_4}(\bar{g} - \overline{gg_2}) - 5\overline{gg_6}\bar{g}^2 + \overline{g(gg_2)_2} - 3\overline{g(gg_2)_4}\bar{g} \\ & - 3\overline{g(gg_4)_2}\bar{g} - \overline{g[g(gg_2)_2]_2} - 4\overline{g(gg_3)_3}\bar{g} \end{aligned}\right\}X_3 = 0, \tag{16}$$

其中 $\omega_3^2 = \bar{g} + \bar{g}_1^2 + (3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}) + [3\bar{g}_2^2\bar{g}_1^2 + 4\overline{gg_3^2}\bar{g} + 5\bar{g}_3^2\bar{g}^2 + 6\overline{(gg_2)_1g_3}\bar{g} + \overline{(gg_2)_1^2}]$, $\overline{gg_5} = 0$, $\overline{g(gg_2)_3} = -\overline{g(gg_3)_2}$.

三级近似解为

$$x_3 = X_3 + \xi_3. \tag{17}$$

---

1) 见上页脚注.

5. 四级近似

以三级近似解 (17) 式代入 (5) 式，得四级近似解

$$\xi_4 = -\iint\left\{\begin{matrix} g_0 - (gg_2)_0 + 3(gg_4)_0(\bar{g} - \overline{gg_2}) - 5(gg_6)_0\bar{g}^2 + [g(gg_2)_2]_0 \\ - 3[g(gg_2)_4]_0\bar{g} - 3[g(gg_4)_2]_0\bar{g} - \{g[g(gg_2)_2]_2\}_0 - 4[g(gg_3)_3]_0\bar{g} \end{matrix}\right\} X_3 d\theta^2$$
$$- \iint \{2(gg_3)_0 - 4(gg_5)_0\bar{g} - 2[g(gg_2)_3]_0 - 2[g(gg_3)_2]_0\} X_3' d\theta^2.$$

按规律 (8) 和 (14) 式，注意分别以 X_3, ω_3^2 代 X_0, ω_0^2，取至八级小数量，并注意 $X_4 - X_3 \sim \varepsilon^8$, $X_4' - X_3' \sim \varepsilon^7$, 得四级近似解

$$\xi_4 = \left\{\begin{matrix} - g_2 + 3g_4[\bar{g} - \overline{gg_2} + 3\overline{gg_4}\bar{g} + \overline{g(gg_2)_2}] - 5g_6(\bar{g}^2 - 2\overline{gg_2}\bar{g}) + 7g_8\bar{g}^3 \\ + (gg_2)_2 - 3(gg_2)_4(\bar{g} - \overline{gg_2}) + 5(gg_2)_6\bar{g}^2 - 3(gg_4)_2\bar{g} + 9(gg_4)_4\bar{g}^2 \\ -[g(gg_2)_2]_2 + 3[g(gg_2)_2]_4\bar{g} + 3(gg_4)_2\overline{gg_2} + 5(gg_6)_2\bar{g}^2 + 3[g(gg_2)_4]_2\bar{g} \\ +3[g(gg_4)_2]_2\bar{g} + 4[g(gg_3)_3]_2\bar{g} + \{g[g(gg_2)_2]_2\}_2 - 4(gg_3)_3(\bar{g} - \overline{gg_2}) \\ +8(gg_3)_5\bar{g}^2 + 8(gg_5)_3\bar{g}^2 + 4[g(gg_2)_3]_3\bar{g} + 4[g(gg_3)_2]_3\bar{g} \end{matrix}\right\} X_4$$
$$+ \left\{\begin{matrix} 2g_3 - 4g_5(\bar{g} - \overline{gg_2}) + 6g_7\bar{g}^2 - 2(gg_2)_3 + 4(gg_2)_5\bar{g} \\ + 6(gg_4)_3\bar{g} + 2[g(gg_2)_2]_3 - 2(gg_3)_2 + 6(gg_3)_4\bar{g} \\ + 4(gg_5)_2\bar{g} + 2[g(gg_2)_3]_2 + 2[g(gg_3)_2]_2 \end{matrix}\right\} X_4'. \tag{18}$$

根据定义 (3) 式，X_4 满足

$$X_4'' + \omega_4^2 X_4 = 0, \tag{19}$$

其中

$$\omega_4^2 = \bar{g} + \bar{g}_1^2 + [3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}] + [3\bar{g}_2^2\bar{g}_1^2 + 4\overline{gg_3^2}\bar{g} + 5\bar{g}_3^2\bar{g}^2 + 6\overline{(gg_2)_1g_3}\bar{g} + \overline{(gg_2)_1^2}]$$
$$+ \left\{\begin{matrix} \bar{g}_1^2(10\bar{g}_3^2\bar{g} + 6\overline{(gg_2)_1g_3} + 4\overline{gg_3^2}) + 3\bar{g}_2^2(3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}) + 3\overline{(gg_2)_2^2}\bar{g} \\ +4\overline{(gg_3)_1^2}\bar{g} + 6\overline{(gg_4)(gg_2)_2}\bar{g} + 7\bar{g}_4^2\bar{g}^3 + 8\overline{(gg_3)_1(gg_2)_2}\bar{g} \\ + 9\overline{(gg_4)^2}\bar{g}^2 + 10\overline{(gg_2)_2g_4}\bar{g}^2 + 16\overline{(gg_3)_1g_4}\bar{g}^2 + \overline{g(gg_2)_2^2} \end{matrix}\right\},$$
$$\overline{g[g(gg_2)_3]_2} = 0,\ \overline{g[g(gg_2)_2]_3} = -\overline{g[g(gg_3)_2]_2},\ \overline{g(gg_2)_5} = -\overline{g(gg_5)_2},$$
$$\overline{g(gg_4)_3} = -\overline{g(gg_3)_4}.$$

四级近似解为

$$x_4 = X_4 + \xi_4. \tag{20}$$

按上述方法，可总结出 n 级近似解为

$$x_n = X_n + \xi_n = (1 + a_n)X_n + b_nX_n', \tag{21}$$

其中快振荡项为 $\xi_n = a_nX_n + b_nX_n'$.

定义光滑项 X_n 满足微分方程

$$X_n'' + (\bar{g} + \overline{ga_n})X_n = 0, \tag{22}$$

其中 $\omega_n^2 = \bar{g} + \overline{ga_n}$, $\overline{gb_n} = 0$.

快振荡系数 a_n, b_n 可按下列规则排表求得.

n 级近似解 $\xi_n = a_nX_n + b_nX_n'$ 排表规则:

(1) n 级近似项 a_nX_n 为 $2n$ 级小数量，符号为 $(-1)^n$，诸 g_j 数为 n，g_j 的系数为 $(j-1)$. 例如 5 级近似项 $-15(gg_4)_6\bar{g}^3X_5$ 为 $4 + 6 = 10$ 级小数量，符号为 $(-1)^5 = -1$，诸 g_j 数为 5，故对 $(gg_4)_6$ 应补三次 $\bar{g}$，系数为 $(4-1)(6-1) = 15$. 因 $X' \sim \varepsilon$, g_jX' 为

$(j+1)$ 级小数量，诸 g_j 数为 $n-1$，例如四级近似项 $4(gg_2)_5\bar{g}X'_4$ 为 $2+5+1=8$ 级小数量，符号为 $(-1)^4=+1$，诸 g_j 数为 $4-1=3$，故对 $(gg_2)_5$ 应补一次 $\bar{g}$，系数为 $(2-1)(5-1)=4$.

(2) g_0X_{n-1} 项经二重积分 $-\iint g_0X_{n-1}d\theta^2$ 得按规律 (8) 式的项列：

$$\{-g_2+3g_4\omega_{n-1}^2-5g_6\omega_{n-1}^4+7g_8\omega_{n-1}^6-9g_{10}\omega_{n-1}^8+\cdots\}X_{n-1}$$
$$+\{2g_3-4g_5\omega_{n-1}^2+6g_7\omega_{n-1}^4-8g_9\omega_{n-1}^6+\cdots\}X'_{n-1},$$

取至 $2n$ 级小数量.

(3) 取 (2) 中 $-g_2X_{n-1}$ 项，作 $-(gg_2)_0X_{n-1}$，经过二重积分得

$$\{(gg_2)_2-3(gg_2)_4\omega_{n-1}^2+5(gg_2)_6\omega_{n-1}^4-7(gg_2)_8\omega_{n-1}^6+\cdots\}X_{n-1}$$
$$+\{-2(gg_2)_3+4(gg_2)_5\omega_{n-1}^2-6(gg_2)_7\omega_{n-1}^4+\cdots\}X'_{n-1},$$

同理取 $3g_4\omega_{n-1}^2X_{n-1}$ 项，作 $3(gg_4)_0\omega_{n-1}^2X_{n-1}$，$\cdots$，取至 $2n$ 级小数量.

取 (2) 中 $2g_3X'_{n-1}$ 项，作 $2(gg_3)_0X'_{n-1}$，经过二重积分 $-\iint 2(gg_3)_0X'_{n-1}d\theta^2$，得按规律 (14) 式的项列

$$\{-4(gg_3)_3\omega_{n-1}^2+8(gg_3)_5\omega_{n-1}^4-12(gg_3)_7\omega_{n-1}^6+16(gg_3)_9\omega_{n-1}^8-\cdots\}X_{n-1}$$
$$+\{-2(gg_3)_2+6(gg_3)_4\omega_{n-1}^2-10(gg_3)_6\omega_{n-1}^4+\cdots\}X'_{n-1},$$

同理取 $-4g_5\omega_{n-1}^2X'_{n-1}$，作 $-4(gg_5)_0\omega_{n-1}^2X'_{n-1}$，$\cdots$，取至 $2n$ 级小数量.

(4) 取 (3) 中诸项按 (3) 中规则操作.

(5) 取 (4) 中诸项按 (3) 中规则操作，$\cdots$，直至获不到 $2n$ 级小数量为止.

按上列排表规则，可编制计算机程序1)，输出 (21)，(22) 式诸项的符号、系数、脚标组合，亦即输出 n 级近似解 $x_n=X_n+\xi_n$，ω_n^2 的公式. 再输入 $g(\theta)$，可令计算机输出任何级的近似解，并显示其精细结构光滑项与快振荡项. 应该指出，美国[1]与苏联[4]的方法原则上不能令计算机输出近似解的公式. 给定两个原始条件，计算机按常规近似法亦可输出(1) 式的任何级近似解，但不能直接显示其精细结构光滑项与快振荡项 X_n，ξ_n.

现以五级近似为例，说明排表规则的应用.

6. 五级近似

五级近似解为

$$x_5=X_5+\xi_5=(1+a_5)X_5+b_5X'_5, \tag{23}$$

其中光滑项 X_5 满足微分方程 $X''_5+\omega_5^2X_5=0$，$\omega_5^2=\bar{g}+\overline{ga_5}$，$\overline{gb_5}=0$，快振荡项 ξ_5 按表 1 规则求得.

三、实例应用

现仍以等散聚焦场的加速器为实例[1]，即 $-n_1=n_2=n=\frac{r}{B}\frac{\partial B}{\partial r}$，令快振荡周期为 $2s$，计算诸函数，汇总如下：

$$g(\theta)=\begin{cases} n & \theta:(0,s) \\ -n & \theta:(-s,0), \end{cases}$$

1) 该计算机程序已由孙松岚同志编成.

表 1

五级近似解 $\xi_5 = a_5X_5 + b_5X_5'$

$$\left\{\begin{array}{l} -g_2 + 3g_4[\bar{g} + \bar{g}_1^2 + 3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2} + 3\bar{g}_2^2\bar{g}_1^2 + 4\overline{gg_3^2}\bar{g} + 5\bar{g}_3^2\bar{g} + 6\overline{(gg_2)_1g_3}\bar{g} + \overline{(gg_2)_1^2}] \\ -5g_6[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g} + \bar{g}_1^{2^2} + 2(3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2})\bar{g}] + 7g_8[\bar{g}^3 + 3\bar{g}_1^2\bar{g}^2] - 9g_{10}\bar{g}^4 \end{array}\right\}X_5$$

$$\left\{\begin{array}{l} (gg_2)_2 - 3(gg_2)_4[\bar{g} + \bar{g}_1^2 + 3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}] + 5(gg_2)_6[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g}] - 7(gg_2)_8\bar{g}^3 \\ -3(gg_4)_2[\bar{g} + \bar{g}_1^2 + 3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}] + 9(gg_4)_4[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g}] - 15(gg_4)_6\bar{g}^3 \\ +5(gg_6)_2[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g}] - 15(gg_6)_4\bar{g}^3 - 7(gg_8)_2\bar{g}^3 \end{array}\right\}X_5$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2(gg_2)_3 + 4(gg_2)_5(\bar{g} + \bar{g}_1^2) - 6(gg_2)_7\bar{g}^2 \\ +6(gg_4)_3(\bar{g} + \bar{g}_1^2) - 12(gg_4)_5\bar{g}^2 \\ -10(gg_6)_3\bar{g}^2 \end{array}\right\}X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} -[g(gg_2)_2]_2 + 3[g(gg_2)_2]_4(\bar{g} + \bar{g}_1^2) \\ -5[g(gg_2)_2]_6\bar{g}^2 + 3[g(gg_2)_4]_2(\bar{g} + \bar{g}_1^2) \\ -9[g(gg_2)_4]_4\bar{g}^2 - 5[g(gg_2)_6]_2\bar{g}^2 \\ 3[g(gg_4)_2]_2(\bar{g} + \bar{g}_1^2) - 9[g(gg_4)_2]_4\bar{g}^2 \\ -9[g(gg_4)_4]_2\bar{g}^2 - 5[g(gg_6)_2]_2\bar{g}^2 \end{array}\right\}X_5$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2[g(gg_2)_2]_3 - 4[g(gg_2)_2]_5\bar{g} \\ -6[g(gg_2)_4]_3\bar{g} - 6[g(gg_4)_2]_3\bar{g} \end{array}\right\}X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4[g(gg_2)_3]_3(\bar{g} + \bar{g}_1^2) - 8[g(gg_2)_3]_5\bar{g}^2 \\ -8[g(gg_2)_5]_3\bar{g}^2 - 12[g(gg_4)_3]_3\bar{g}^2 \end{array}\right\}X_5$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2[g(gg_2)_3]_2 - 6[g(gg_2)_3]_4\bar{g} \\ -4[g(gg_2)_5]_2\bar{g} - 6[g(gg_4)_3]_2\bar{g} \end{array}\right\}X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} -4\{g[g(gg_2)_2]_3\}_3\bar{g}X_5 \\ -2\{g[g(gg_2)_2]_3\}_2 \end{array}\right\}X_5'$$

$$-4\{g[g(gg_2)_3]_3\}_2\bar{g}X_5$$

$$-4\{g[g(gg_2)_3]_2\}_3\bar{g}X_5$$

$$-2\{g[g(gg_2)_3]_2\}_2X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} \{g[g(gg_2)_2]_2\}_2 - 3\{g[g(gg_2)_2]_2\}_4\bar{g} \\ -3\{g[g(gg_2)_2]_4\}_2\bar{g} - 3\{g[g(gg_2)_4]_2\}_2\bar{g} \\ -3\{g[g(gg_4)_2]_2\}_2\bar{g} \end{array}\right\}X_5$$

$$-2\{g[g(gg_2)_2]_2\}_3X_5'$$

$$-(g\{g[g(gg_2)_2]_2\}_2)_2X_5$$

$$\{2g_3 - 4g_5[\bar{g} + \bar{g}_1^2 + 3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}] + 6g_7[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g}] - 8g_9\bar{g}^3\}X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} -4(gg_3)_3[\bar{g} + \bar{g}_1^2 + 3\bar{g}_2^2\bar{g} + \overline{gg_2^2}] + 8(gg_3)_5[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g}] \\ -12(gg_3)_7\bar{g}^3 + 8(gg_5)_3[\bar{g}^2 + 2\bar{g}_1^2\bar{g}] - 16(gg_5)_5\bar{g}^3 \\ -12(gg_7)_3\bar{g}^3 \end{array}\right\}X_5$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2(gg_3)_2 + 6(gg_3)_4(\bar{g} + \bar{g}_1^2) \\ -10(gg_3)_6\bar{g}^2 + 4(gg_5)_2(\bar{g} + \bar{g}_1^2) \\ -12(gg_5)_4\bar{g}^2 - 6(gg_7)_2\bar{g}^2 \end{array}\right\}X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4[g(gg_3)_3]_2(\bar{g} + \bar{g}_1^2) - 12[g(gg_3)_3]_4\bar{g}^2 \\ -8[g(gg_3)_5]_2\bar{g}^2 - 8[g(gg_5)_3]_2\bar{g}^2 \end{array}\right\}X_5$$

$$8[g(gg_3)_3]_3\bar{g}X_5'$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4[g(gg_3)_2]_3(\bar{g} + \bar{g}_1^2) - 8[g(gg_3)_2]_5\bar{g}^2 \\ -12[g(gg_3)_4]_3\bar{g}^2 - 8[g(gg_5)_2]_3\bar{g}^2 \end{array}\right\}X_5$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2[g(gg_3)_2]_2 - 6[g(gg_3)_2]_4\bar{g} \\ -6[g(gg_3)_4]_2\bar{g} - 4[g(gg_5)_2]_2\bar{g} \end{array}\right\}X_5'$$

$$-4\{g[g(gg_3)_3]_2\}_2\bar{g}X_5$$

$$-4\{g[g(gg_3)_2]_3\}_2\bar{g}X_5$$

$$-4\{g[g(gg_3)_2]_2\}_3\bar{g}X_5 - 2\{g[g(gg_3)_2]_2\}_2X_5'$$

$$g_1(\theta)=\begin{cases} n\theta-\dfrac{ns}{2} \\ -n\theta-\dfrac{ns}{2} \end{cases},\qquad g_1^2(\theta)=\begin{cases} n^2\theta^2-n^2s\theta+\dfrac{ns^2}{4} \\ n^2\theta^2+n^2s\theta+\dfrac{ns^2}{4} \end{cases},$$

$$g_2(\theta)=\begin{cases} \dfrac{n}{2}\theta^2-\dfrac{ns}{2}\theta \\ -\dfrac{n}{2}\theta^2-\dfrac{ns}{2}\theta \end{cases},\qquad gg_2(\theta)=\begin{cases} \dfrac{n^2\theta^2}{2}-\dfrac{n^2s}{2}\theta \\ \dfrac{n^2\theta^2}{2}+\dfrac{n^2s}{2}\theta \end{cases},$$

$$(gg_2)_1=\begin{cases} \dfrac{n^2\theta^3}{6}-\dfrac{n^2s}{4}\theta^2+\dfrac{n^2s^2}{12}\theta \\ \dfrac{n^2\theta^3}{6}+\dfrac{n^2s}{4}\theta^2+\dfrac{n^2s^2}{12}\theta \end{cases},\qquad g_3(\theta)=\begin{cases} \dfrac{n\theta^3}{3!}-\dfrac{ns}{2}\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{ns^3}{4!} \\ -\dfrac{n\theta^3}{3!}-\dfrac{ns}{2}\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{ns^3}{4!} \end{cases},$$

$$gg_3=\begin{cases} \dfrac{n^2\theta^3}{3!}-\dfrac{n^2s}{2}\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{n^2s^3}{4!} \\ \dfrac{n^2\theta^3}{3!}+\dfrac{n^2s}{2}\dfrac{\theta^2}{2!}-\dfrac{n^2s^3}{4!} \end{cases},\qquad g_4(\theta)=\begin{cases} \dfrac{n\theta^4}{4!}-\dfrac{ns}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{ns^3}{4!}\theta \\ -\dfrac{n\theta^4}{4!}-\dfrac{ns}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{ns^3}{4!}\theta \end{cases},$$

$$g_2^2=\begin{cases} \dfrac{n^2\theta^4}{4}-\dfrac{n^2s}{2}\theta^3+\dfrac{n^2s^2}{4}\theta^2 \\ \dfrac{n^2\theta^4}{4}+\dfrac{n^2s}{2}\theta^3+\dfrac{n^2s^2}{4}\theta^2 \end{cases},\qquad gg_2^2=\begin{cases} \dfrac{n^3\theta^4}{4}-\dfrac{n^3s}{2}\theta^3+\dfrac{n^3s^2}{4}\theta^2 \\ -\dfrac{n^3\theta^4}{4}-\dfrac{n^3s}{2}\theta^3-\dfrac{n^3s^2}{4}\theta^2 \end{cases},$$

$$(gg_2)_2=\begin{cases} \dfrac{n^2\theta^4}{4!}-\dfrac{n^2s}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{n^2s^2}{12}\dfrac{\theta^2}{2!}-\dfrac{n^2}{30}\dfrac{s^4}{4!} \\ \dfrac{n^2\theta^4}{4!}+\dfrac{n^2s}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{n^2s^2}{12}\dfrac{\theta^2}{2!}-\dfrac{n^2}{30}\dfrac{s^4}{4!} \end{cases},$$

$$(gg_3)_1=\begin{cases} \dfrac{n^2\theta^4}{4!}-\dfrac{n^2s}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{n^2s^3}{4!}\theta-\dfrac{n^2s^4}{5!} \\ \dfrac{n^2\theta^4}{4!}+\dfrac{n^2s}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}-\dfrac{n^2s^3}{4!}\theta-\dfrac{n^2s^4}{5!} \end{cases},$$

$$g(gg_2)_2=\begin{cases} \dfrac{n^3\theta^4}{4!}-\dfrac{n^3s}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{n^3s^2}{12}\dfrac{\theta^2}{2!}-\dfrac{n^3s^4}{30\cdot 4!} \\ -\dfrac{n^3\theta^4}{4!}-\dfrac{n^3s}{2}\dfrac{\theta^3}{3!}-\dfrac{n^3s^2}{12}\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{n^3s^4}{30\cdot 4!} \end{cases},$$

$$[g(gg_2)_2]_1=\begin{cases} \dfrac{n^3\theta^5}{5!}-\dfrac{n^3s}{2}\dfrac{\theta^4}{4!}+\dfrac{n^3s^2}{12}\dfrac{\theta^3}{3!}-\dfrac{n^3s^4\theta}{30\cdot 4!} \\ -\dfrac{n^3\theta^5}{5!}-\dfrac{n^3s}{2}\dfrac{\theta^4}{4!}-\dfrac{n^3s^2}{12}\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{n^3s^4\theta}{30\cdot 4!} \end{cases},$$

$$(gg_2)_1^2=\begin{cases} \dfrac{n^4\theta^6}{36}-\dfrac{n^4s}{12}\theta^5+\dfrac{13n^4s^2}{144}\theta^4-\dfrac{n^4s^3}{24}\theta^3+\dfrac{n^4s^4}{144}\theta^2 \\ \dfrac{n^4\theta^6}{36}+\dfrac{n^4s}{12}\theta^5+\dfrac{13n^4s^2}{144}\theta^4+\dfrac{n^4s^3}{24}\theta^3+\dfrac{n^4s^4}{144}\theta^2 \end{cases},$$

$$(gg_2)_1g_3=\begin{cases}\dfrac{n^3\theta^6}{3!3!}-\dfrac{n^3s\theta^5}{2!3!}+\dfrac{11n^3s^2\theta^4}{3^2\cdot4^2}-\dfrac{n^3s^3\theta^3}{3\cdot4^2}+\dfrac{n^3s^5\theta}{2\cdot3^2\cdot4^2}\\-\dfrac{n^3\theta^6}{3!3!}-\dfrac{n^3s\theta^5}{2!3!}-\dfrac{11n^3s^2\theta^4}{3^2\cdot4^2}-\dfrac{n^3s^3\theta^3}{3\cdot4^2}+\dfrac{n^3s^5\theta}{2\cdot3^2\cdot4^2}\end{cases},$$

$$gg_3^2=\begin{cases}\dfrac{n^3\theta^6}{36}-\dfrac{n^3s\theta^5}{12}+\dfrac{n^3s^2\theta^4}{16}+\dfrac{n^3s^3\theta^3}{72}-\dfrac{n^3s^4\theta^2}{48}+\dfrac{n^3s^6}{24^2}\\-\dfrac{n^3\theta^6}{36}-\dfrac{n^3s\theta^5}{12}-\dfrac{n^3s^2\theta^4}{16}+\dfrac{n^3s^3\theta^3}{72}+\dfrac{n^3s^4\theta^2}{48}-\dfrac{n^3s^6}{24^2}\end{cases}.$$

$$g_1(-s)=\frac{ns}{2},\ g_2(-s)=0,\ (gg_2)_1(-s)=0,\ (gg_2)_2(-s)=-\frac{n^2s^4}{30\cdot4!},$$

$$g_3(-s)=-\frac{ns^3}{4!},\ \bar g=0,\ \bar g_1^2=\frac{n^2s^2}{12},\ \bar g_2^2=\frac{n^2s^4}{120},\ 3\bar g_2^2\bar g_1^2=\frac{n^4s^6}{480},\ \overline{gg_2^2}=0,$$

$$\overline{(gg_2)_1^2}=\frac{n^4s^6}{12^2\cdot7\cdot6\cdot5},\ \overline{gg_3^2}=0,\ \overline{(gg_2)_1g_3}=0,\ \overline{g(gg_2)_2^2}=0,$$

$$\overline{(gg_2)_2^2}=\frac{n^4s^8}{4!4!3\cdot7\cdot10^2},\ \overline{(gg_3)_1^2}=\frac{29}{5!5!2\cdot7\cdot9}n^4s^8,\ \bar g_3^2=\frac{17}{3!3!560}n^2s^6,$$

$$\overline{(gg_2)_2(gg_3)_1}=\overline{(gg_2)_2gg_4}=\frac{13n^4s^8}{4!4!7\cdot9\cdot10^2},\ \overline{[g(gg_2)_2]_1^2}=\frac{n^6s^{10}}{4!5!7\cdot11\cdot8\cdot27}.\tag{24}$$

首先用矩阵法求 (1) 式的精确解:

散焦区，θ: $(-s,0)$

$$x=x_{-s}\operatorname{ch}\sqrt{n}(\theta+s)+x'_{-s}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{n}(\theta+s)}{\sqrt{n}}$$

$$x'=x_{-s}\sqrt{n}\operatorname{sh}\sqrt{n}(\theta+s)+x'_{-s}\operatorname{ch}\sqrt{n}(\theta+s),$$

$$\begin{bmatrix}x\\x'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{ch}\sqrt{n}(\theta+s)&\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{n}(\theta+s)}{\sqrt{n}}\\\sqrt{n}\operatorname{sh}\sqrt{n}(\theta+s)&\operatorname{ch}\sqrt{n}(\theta+s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{-s}\\x'_{-s}\end{bmatrix},$$

聚焦区，θ: $(0,s)$

$$x=x_0\cos\sqrt{n}\,\theta+x'_0\frac{\sin\sqrt{n}\,\theta}{\sqrt{n}}$$

$$x'=-x_0\sqrt{n}\sin\sqrt{n}\,\theta+x'_0\cos\sqrt{n}\,\theta,$$

$$\begin{bmatrix}x\\x'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{n}\,\theta&\dfrac{\sin\sqrt{n}\,\theta}{\sqrt{n}}\\-\sqrt{n}\sin\sqrt{n}\,\theta&\cos\sqrt{n}\,\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\x'_0\end{bmatrix}.\tag{25}$$

散聚焦整个周期 $(-s,s)$ 关系为

$$\begin{bmatrix}x_s\\x'_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\sqrt{n}\,s&\dfrac{\sin\sqrt{n}\,s}{\sqrt{n}}\\-\sqrt{n}\sin\sqrt{n}\,s&\cos\sqrt{n}\,s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\operatorname{ch}\sqrt{n}\,s&\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{n}\,s}{\sqrt{n}}\\\sqrt{n}\operatorname{sh}\sqrt{n}\,s&\operatorname{ch}\sqrt{n}\,s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{-s}\\x'_{-s}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{-s}\\x'_{-s}\end{bmatrix}.$$

加速器磁场的散聚焦区按图 1 编号:

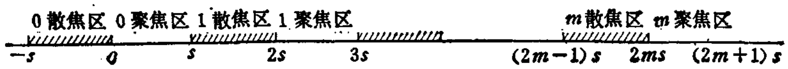

图　1

令原始条件 $\begin{bmatrix} x_{-s} \\ x'_{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 得 (1) 式的精确解 $x_{1,0}$, 令 $\begin{bmatrix} x_{-s} \\ x'_{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 得 $x_{0,1}$, 自 $x_{1,0}$ 与 $x_{0,1}$ 可组成 (1) 式的两个线性无关解:

$$x_1 = x_{1,0} + \frac{e^{i\mu} - Q_{11}}{Q_{12}} x_{0,1} = e^{i\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)} F(\theta + s),$$

$$x_2 = x_{1,0} + \frac{e^{-i\mu} - Q_{11}}{Q_{12}} x_{0,1} = e^{-i\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)} F^*(\theta + s), \tag{26}$$

其中 $\cos\mu = \frac{Q_{11} + Q_{22}}{2}$, Floquet 函数在 m 散焦区为

$$F(\theta + s) = e^{-i\frac{\mu}{2s}(\theta+s)} \left\{ \operatorname{ch}\sqrt{n}\,(\theta + s) + \frac{e^{i\mu} - Q_{11}}{Q_{12}} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{n}\,(\theta + s)}{\sqrt{n}} \right\}, \tag{27}$$

其中 θ 区域仍为 $(-s, 0)$. 在 m 聚焦区为

$$F(\theta + s) = e^{-i\frac{\mu}{2s}(\theta+s)} \left\{ \cos\sqrt{n}\,\theta \operatorname{ch}\sqrt{n}\,s + \sin\sqrt{n}\,\theta \operatorname{sh}\sqrt{n}\,s \right.$$
$$\left. + \frac{e^{i\mu} - Q_{11}}{Q_{12}} \left[\cos\sqrt{n}\,\theta \frac{\operatorname{sh}\sqrt{n}\,s}{\sqrt{n}} + \frac{\sin\sqrt{n}\,\theta}{\sqrt{n}} \operatorname{ch}\sqrt{n}\,s \right] \right\}, \tag{28}$$

其中 θ 区域仍为 $(0, s)$.

因此, (1) 式的任何解 x 可写成 x_1, x_2 的线性组合:

$$x = \mathrm{Re}(k_1 x_1 + k_2 x_2) = k x_1 + k^* x_1^*,$$

其中系数 k 决定于两个原始条件.

例如 m 散焦区取原始条件 $\begin{bmatrix} x_{-s} \\ x'_{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的特殊解为

$$x_{1,0} = \mathrm{Re}(k_1 x_1 + k_2 x_2) = \frac{iQ_{12}}{2\sin\mu} \left[\frac{e^{-i\mu} - Q_{11}}{Q_{12}} x_1 - \frac{e^{i\mu} - Q_{11}}{Q_{12}} x_2 \right]$$

$$= \mathrm{Re}\, \frac{i(e^{-i\mu} - Q_{11})}{\sin\mu} e^{i\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)} F(\theta + s), \tag{29}$$

其中 θ 区域仍为 $(-s, 0)$.

若取二级近似, 以 (27) 式代入 (29) 式, 取至四级小数量, 得[1)]

---

1) 计算过程采用下列公式:

$$Q_{11} = 1 + ns^2 - \frac{n^2s^4}{6} - \frac{n^4s^6}{90} - \cdots,\quad Q_{12} = 2s\left(1 - \frac{n^2s^4}{30} + \cdots\right),\quad Q_{21} = -\frac{2}{3}n^2s^3 + \cdots,$$

$$Q_{22} = 1 - ns^2 - \frac{n^2s^4}{6} - \cdots,\quad \cos\mu = 1 - \frac{n^2s^4}{6} + \frac{2}{7!}n^4s^8 - \cdots,$$

$$\sin\mu = \frac{ns^2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{70}n^3s^6 + \cdots,\quad \mu = \frac{ns^2}{\sqrt{3}} + \frac{12}{\sqrt{3}\,945}n^3s^6 + \cdots.$$

$$x_{1,0}=\left[1+\frac{n^2s^4}{2\cdot 3!}+\frac{ns}{2}\theta+\left(\frac{n}{2}-\frac{5}{24}n^2s^2\right)\theta^2-\frac{n^2s}{12}\theta^3+\frac{n^2\theta^4}{4!}\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$

$$+\left[\frac{ns}{2}+\frac{n^2s^2}{4}\theta+\frac{n^2s}{4}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}. \tag{30}$$

例如m散焦区取原始条件$\begin{bmatrix}x_{-s}\\ x'_{-s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的特殊解为

$$x_{0,1}=\frac{Q_{12}}{2i\sin\mu}(x_1-x_2)=\mathrm{Re}\,\frac{Q_{12}}{i\sin\mu}e^{i\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}F(\theta+s), \tag{31}$$

其中θ区域仍为$(-s,0)$。

若取二级近似，以(27)式代入(31)式，取至四级小数量，得

$$x_{0,1}=\left[\frac{ns^3}{3!}-\frac{ns}{2}\theta^2-\frac{n}{3}\theta^3\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$

$$+\left[1+\frac{ns}{2}\theta+\frac{n}{2}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}. \tag{32}$$

例如m聚焦区，取原始条件$\begin{bmatrix}x_{-s}\\ x'_{-s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$的特殊解，以(28)式代入(29)式，若取二级近似，即四级小数量，得

$$x_{1,0}=\left[1+\frac{n^2s^4}{2\cdot 3!}+\frac{ns}{2}\theta-\left(\frac{n}{2}+\frac{5}{24}n^2s^2\right)\theta^2+\frac{n^2s}{12}\theta^3+\frac{n^2\theta^4}{4!}\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$

$$+\left[\frac{ns}{2}+\frac{n^2s^2}{4}\theta-\frac{n^2s}{4}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}, \tag{33}$$

其中θ区域仍为$(0,s)$。

例如m聚焦区，取原始条件$\begin{bmatrix}x_{-s}\\ x'_{-s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$的特殊解，以(28)式代入(31)式，若取二级近似，即四级小数量，得

$$x_{0,1}=\left[\frac{ns^3}{3!}-\frac{ns}{2}\theta^2+\frac{n\theta^3}{3}\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$

$$+\left[1+\frac{ns}{2}\theta-\frac{n\theta^2}{2}\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}, \tag{34}$$

其中θ区域仍为$(0,s)$。

现应用第二节所述近似解的简便方法，根据(13)式，二级近似解为

$$x=[1-g_2+(gg_2)_2]X_2+2g_3X_2',$$
$$x'=[-g_1+(gg_2)_1-2g_3\omega_2^2]X_2+[1+g_2+(gg_2)_2]X_2'. \tag{35}$$

光滑项 X_2 满足 $X_2'' + \omega_2^2 X_2 = 0$,解得

$$X_2 = X_{-s}\cos\frac{\mu}{2s}(\theta+s) + X'_{-s}\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}},$$

$$X_2' = -X_{-s}\frac{\mu}{2s}\sin\frac{\mu}{2s}(\theta+s) + X'_{-s}\cos\frac{\mu}{2s}(\theta+s),$$

其中根据 (12) 和 (24) 式, $\omega_2^2 = \bar{g}_1^2 = \frac{n^2s^2}{12} = \left(\frac{\mu}{2s}\right)^2$ [1].

例如取原始条件 $\begin{bmatrix} x_{-s} \\ x'_{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的特殊解, (35) 式决定光滑项的原始条件:

$$X_{-s} = 1 + \frac{31n^2s^4}{30\cdot 4!},\quad X'_{-s} = \frac{ns}{2}. \tag{36}$$

m 散焦区 $(2m-1)s < \theta < 2ms$,如保留 θ 区域仍为 $(-s, 0)$,则光滑项 X_2, X_2' 中的 θ 应代以 $2ms+\theta$.

m 聚焦区 $2ms < \theta < (2m+1)s$,如保留 θ 区域仍为 $(0, s)$, 则光滑项 X_2, X_2' 中的 θ 应代以 $2ms+\theta$.

以原始条件 (36) 式与公式 (24) 代入 (35) 式得特殊解:

m 散焦区

$$x_{1,0} = \left[1 + \frac{n^2s^4}{2\cdot 3!} + \frac{ns}{2}\theta + \left(\frac{n}{2} - \frac{5}{24}n^2s^2\right)\theta^2 - \frac{n^2s}{2}\frac{\theta^3}{3!} + \frac{n^2\theta^4}{4!}\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$
$$+ \left[\frac{ns}{2} + \frac{n^2s^2}{4}\theta + \frac{n^2s}{4}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}, \tag{37}$$

m 聚焦区

$$x_{1,0} = \left[1 + \frac{n^2s^4}{2\cdot 3!} + \frac{ns}{2}\theta - \left(\frac{n}{2} + \frac{5}{24}n^2s^2\right)\theta^2 + \frac{n^2s}{2}\frac{\theta^3}{3!} + \frac{n^2\theta^4}{4!}\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$
$$+ \left[\frac{ns}{2} + \frac{n^2s^2}{4}\theta - \frac{n^2s}{4}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}. \tag{38}$$

(37), (38) 式分别与矩阵法所获得的 (30), (33) 式完全吻合.

例如取原始条件 $\begin{bmatrix} x_{-s} \\ x'_{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的特殊解, (35) 式决定光滑项的原始条件

$$X_{-s} = \frac{ns^3}{2\cdot 3!},\quad X'_{-s} = 1 + \frac{31n^2s^4}{30\cdot 4!}. \tag{39}$$

以原始条件 (39) 式与公式 (24) 代入 (35) 式得特殊解:

m 散焦区

1) 见 392 页脚注.

$$x_{0,1}=\left[\frac{ns^3}{3!}-\frac{ns}{2}\theta^2-\frac{n}{3}\theta^3\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$

$$+\left[1+\frac{ns}{2}\theta+\frac{n}{2}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}},\tag{40}$$

m 聚焦区

$$x_{0,1}=\left[\frac{ns^3}{3!}-\frac{ns}{2}\theta^2+\frac{n}{3}\theta^3\right]\cos\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)$$

$$+\left[1+\frac{ns}{2}\theta-\frac{n}{2}\theta^2\right]\frac{\sin\frac{\mu}{2s}(2ms+\theta+s)}{\frac{\mu}{2s}}.\tag{41}$$

(40), (41) 式分别与矩阵法所获得的 (32), (34) 式完全吻合.

根据矩阵法,光滑慢振荡频率为

$$\omega^2=\frac{1}{4s^2}\left[\cos^{-1}(\cos\sqrt{n}\,s\,\mathrm{ch}\sqrt{n}\,s)\right]^2$$

$$=\frac{n^2s^2}{12}+\frac{2}{945}n^4s^6+\frac{43}{467775}n^6s^{10}+\cdots.\tag{42}$$

根据近似解的简便方法 (23) 与 (24) 式得

$$\omega_5^2=\bar{g}_1^2+\overline{gg_2^2}+[3\bar{g}_2^2\bar{g}_1^2+\overline{(gg_2)_1^2}]+3\bar{g}_2^2[3\bar{g}_2^2\bar{g}_1^2+\overline{(gg_2)_1^2}]+\overline{[g(gg_2)_2]_1^2}$$
$$+\bar{g}_1^2[3\overline{(gg_2)_2^2}+4\overline{(gg_3)_1^2}+5\overline{g_3^2}\,\overline{g_1^2}+6\overline{(gg_2)_2gg_4}+8\overline{(gg_2)_2(gg_3)_1}]$$
$$=\frac{n^2s^2}{12}+\frac{2}{7\cdot5\cdot3^3}n^4s^6+\frac{43}{7\cdot11\cdot5^2\cdot3^5}n^6s^{10},\tag{43}$$

精确至五级近似,即十级小数量, (43), (42) 式完全吻合.

四、数 学 根 据

为方便起见, 仅证明一周期区 θ: $(-s, s)$, 下一周期则以上一周期的最后点为原始条件,同理证明,类推至所有区域.

根据泰勒定理, Hill 方程 (1) 可改写成

$$x=x_{-s}+x'_{-s}(\theta+s)-\int_0^{\theta+s}(\theta+s-t)g(t)x(t)dt\qquad\theta:(-s,s),\tag{44}$$

其中 x_{-s}, x'_{-s} 为两个原始条件.

应用常规逐级近似法[5],以零级近似解 x_0 代 (44) 式中的 $x(t)$,得一级近似解 x_1,复以 x_1 代 (44) 式中的 $x(t)$,得二级近似解 x_2, $\cdots$.

现分解 x 为光滑项与快振荡项,即 $x=X+\xi$, $\xi=aX+bX'$,代入 (1) 式得

$$X''+\xi''+(g+ga)X+gbX'=0,$$

定义 X 满足

$$X''+(\bar{g}+\overline{ga})X+\overline{gb}X'=0,$$

故得

$$\xi'' + [g_0 + (ga)_0]X + (gb)_0 X' = 0.$$

(44) 式等价于

$$\xi = \xi_{-s} + \xi'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{[g_0 + (ga)_0]X + (gb)_0 X'\}dt, \tag{45}$$

其中 X 满足

$$X = X_{-s} + X'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{(\bar{g} + \overline{ga})X + \overline{gb}X'\}dt.$$

原始条件为 $x_{-s} = X_{-s} + \xi_{-s}$, $x'_{-s} = X'_{-s} + \xi'_{-s}$, 所以 ξ_{-s}, ξ'_{-s} 可自由选择.

1. 零级近似

取零级小数量,即 $\xi_0(\theta) = 0$,选择原始条件 $\xi_0(-s) = \xi_{0,-s} = 0$, $\xi'_0(-s)=\xi'_{0,-s}=0$, 定义 X_0 满足 $X''_0 + \bar{g}X_0 = 0$,其原始条件决定于 (44) 式的原始条件,即 $X_0(-s) = X_{0,-s} = x_{-s}$, $X'_0(-s) = X'_{0,-s} = x'_{-s}$, 得常规逐级近似法 (44) 式的零级近似解 x_0 与本文近似法(45) 式的零级近似解 $X_0 + \xi_0$ 的关系

$$x_0 - (X_0 + \xi_0) = o(\varepsilon^2)^{1)}. \tag{46}$$

2. 一级近似

分别以零级近似解 x_0, $(X_0 + \xi_0)$ 代入 (44), (45) 式中的积分,得一级近似解

$$x_1 = x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t) g x_0 dt, \tag{47}$$

$$\xi_1 = \xi_{1,-s} + \xi'_{1,-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t) g_0 X_0 dt. \tag{48}$$

一级近似取至二级小数量,选择原始条件 $\xi_{1,-s} = -g_2(0)X_0(0)$, $\xi'_{1,-s} = -g_1(0)X_0(0)$, 并注意 $X_1 - X_0 \sim \varepsilon^{2\,2)}$,自 (48) 式得

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_{1,-s} &+ \xi'_{1,-s}(\theta + s) + g_1(0)X_0(0)(\theta + s) - g_2(\theta + s)X_0(\theta + s) \\ &+ g_2(0)X_0(0) = -g_2 X_1 = a_1 X_1 + b_1 X'_1. \end{aligned} \tag{49}$$

按定义, X_1 满足 $X''_1 + (\bar{g} + \overline{ga_1})X_1 + \overline{gb_1}X' = 0$,即 $X''_1 + (\bar{g} - \overline{gg_2})X_1 = 0$,或

$$X_1 = X_{1,-s} + X'_{1,-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)(\bar{g} - \overline{gg_2})X_1 dt. \tag{50}$$

(48), (50) 两式相加得

$$\begin{aligned} X_1 + \xi_1 &= x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)[g_0 X_0 + \bar{g}X_1 - \overline{gg_2}X_1]dt \\ &= x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{g x_0 + g[X_0 + \xi_0 - x_0] \\ &\quad + \bar{g}(X_1 - X_0) - \overline{gg_2}X_1\}dt \\ &= x_1 - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{g[X_0 + \xi_0 - x_0] + \bar{g}(X_1 - X_0) - \overline{gg_2}X_1\}dt. \end{aligned}$$

---

1) $x_0 = x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s)$, $X_0 = X_{0,-s}\cos\sqrt{\bar{g}}(\theta + s) + X'_{0,-s}\dfrac{\sin\sqrt{\bar{g}}(\theta + s)}{\sqrt{\bar{g}}} = x_{-s}\left[1 - \dfrac{\bar{g}(\theta+s)^2}{2!} + \cdots\right]$ $+ x'_{-s}(\theta + s)\left[1 - \dfrac{\bar{g}(\theta + s)^2}{3!} + \cdots\right]$, 故得 $x_0 - (X_0 + \xi_0) = o(\varepsilon^2)$.

2) 见 385 页脚注.

因 $[X_0 + \xi_0 - x_0] \sim \varepsilon^2$, $X_1 - X_0 \sim \varepsilon^2$, $\overline{gg_2}X_1 \sim \varepsilon^2$，通过积分降至 $\sim \varepsilon^4$，得一级近似解间的关系

$$x_1 - (X_1 + \xi_1) = o(\varepsilon^4). \tag{51}$$

3. 二级近似

分别以一级近似解 x_1, $(X_1 + \xi_1)$ 代入 (44), (45) 式中的积分，得二级近似解

$$x_2 = x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t) g x_1 dt, \tag{52}$$

$$\xi_2 = \xi_{2,-s} + \xi'_{2,-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{[g_0 + (ga_1)_0]X_1 + (gb_1)_0 X'_1\}dt. \tag{53}$$

二级近似取至四级小数量，选择原始条件

$$\xi_{2,-s} + g_2(0)X_1(0) - 2g_3(0)X'_1(0) - 3g_4(0)\bar{g}X_1(0) - (gg_2)_2(0)X_1(0) = 0,$$

$$\xi'_{2,-s} + g_1(0)X_1(0) - g_2(0)X'_1(0) - g_3(0)\bar{g}X_1(0) - (gg_2)_1(0)X_1(0) = 0,$$

并注意 $X_2 - X_1 \sim \varepsilon^4$, $X'_2 - X'_1 \sim \varepsilon^3$ [1)]，由 (53) 式得

$$\xi_2 = [-g_2 + 3g_4\bar{g} + (gg_2)_2]X_2 + 2g_3X'_2 = a_2X_2 + b_2X'_2. \tag{54}$$

按定义 X_2 满足 $X''_2 + (\bar{g} + \overline{ga_2})X_2 + \overline{gb_2}X'_2 = 0$，注意 $\overline{gg_3} = 0$，得 $X''_2 + [\bar{g} - \overline{gg_2} + 3\overline{gg_4}\bar{g} + \overline{g(gg_2)_2}]X_2 = 0$，或

$$X_2 = X_{2,-s} + X'_{2,-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)[(\bar{g} + \overline{ga_2})X_2 + \overline{gb_2}X'_2]dt. \tag{55}$$

(53), (55) 两式相加得

$$\begin{aligned} X_2 + \xi_2 &= x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)[g_0X_1 + \bar{g}X_2 + (ga_1)_0X_1 \\ &\quad + \overline{ga_2}X_2 + (gb_1)_0X'_1 + \overline{gb_2}X'_2]dt \\ &= x_{-s} + x'_{-s}(\theta + s) - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{gx_1 + g[X_1 + \xi_1 - x_1] \\ &\quad + (\bar{g} + \overline{ga_2})(X_2 - X_1) + \overline{gb_2}(X'_2 - X'_1) + \overline{g(a_2 - a_1)}X_1 + \overline{g(b_2 - b_1)}X'_1\}dt \\ &= x_2 - \int_0^{\theta+s} (\theta + s - t)\{g[X_1 + \xi_1 - x_1] + (\bar{g} + \overline{ga_2})(X_2 - X_1) \\ &\quad + \overline{gb_2}(X'_2 - X'_1) + \overline{g(a_2 - a_1)}X_1 + \overline{g(b_2 - b_1)}X'_1\}dt. \end{aligned}$$

因 $X_1 + \xi_1 - x_1 \sim \varepsilon^4$, $X_2 - X_1 \sim \varepsilon^4$, $\overline{g(a_2 - a_1)} \sim \varepsilon^4$, $\overline{gb_2} = 0$, $\overline{g(b_2 - b_1)} = 0$，经过积分降为 $\sim \varepsilon^6$，得二级近似解间的关系

$$x_2 - (X_2 + \xi_2) = o(\varepsilon^6). \tag{56}$$

同理，n 级近似解间的关系为

$$x_n - (X_n + \xi_n) = o(\varepsilon^{2(n+1)}). \tag{57}$$

定理：假定 Hill 方程 $\dfrac{d^2x}{d\theta^2} + g(\theta)x = 0$ 的系数 $g(\theta)$ 在某闭区域 $(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$ 为连续函数（允许有限个第一类不连续点），并具有小数量性质 $\lim\limits_{n\to\infty} o(\varepsilon^{2(n+1)}) = 0$，则相对任意给定的正数 η，可求得正整数 N，令当 $n > N$ 时，Hill 方程精确解 x 与 n 次近似解 $(X_n + \xi_n)$

1) 见 385 页脚注.

满足关系 $|x-(X_n+\xi_n)|<\eta$.

证明：相对给定的正数 η，可求得正整数 N，令当 $n>N$ 时，满足 $|x-x_n|<\frac{\eta}{2}$[5]，根据 (57) 式以及定理中假定 $\lim\limits_{n\to\infty} o(\varepsilon^{2(n+1)})=0$，可调整正整数 N，令当 $n>N$ 时，同时满足 $|x_n-(X_n+\xi_n)|<\frac{\eta}{2}$，故得

$$|x-(X_n+\xi_n)|<\eta, \quad 当 \quad n>N. \tag{58}$$

参 考 文 献

[1] L. C. Teng, The "smooth approximation" to Hill equation, ANL-5517 Physics and Mathematics, 1956.
[2] L. L. Smith, A. A. Garren, Obit Dynamics in the Spiral-Ridged Cyclotron, UCRL-8598, 1959.
[3] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 1958.
[4] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей, 1962.
[5] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis.

A SHORT-CUT METHOD FOR THE SOLUTION OF THE BETATRON OSCILLATION IN PARTICLE ACCELERATORS

XIE XI

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A short-cut method for the solution of the betatron oscillation in particle accelerators is developed to obtain its smooth term and quick oscillation term in whatever order of accuracy desired. An example is worked out in detail to show the practical application of the theory. Finally the mathematical foundation of this method is proved.