

# 环电流器的局部稳定条件 及多极场的影响\*

霍裕平

(中国科学院物理研究所)

## 提 要

本文分析了任意截面环电流器(托克马克)的局部稳定条件,得到了一个一般的近似判据

$$\beta < 2c|\eta|\phi_c,$$

$\eta$ 为纵磁阱。由此我们讨论了多极场对等离子体磁阱和剪切的影响。指出,对于椭圆截面环电流器,引入小的三角场及八极场是改善稳定性的强有力手段。

—

在环电流器(托克马克)中,等离子体的磁流体模可以分成两类。其一是等离子体的整体运动,其中最重要的是扭曲模,由于受弯曲影响很小,通常只分析直柱的情况,稳定条件最简单的就是 Kruskal-Шафранов 判据,给出等离子体总电流的一个上限<sup>[1]</sup>。另一是局部扰动,仅限于某些有理磁面附近<sup>[2]</sup>,对于弯曲和磁场形态的变动比较敏感。近年来闭合系统理想磁流体稳定性的理论工作,大部分是讨论局部稳定条件<sup>[3]</sup>。

不同的作者曾经提出好几种局部稳定条件(或者包括略为广泛的一类扰动的充分条件),但是最重要也最适用的(其它有的条件对环电流器来说是过严——即太充分了)是 Mercier 判据:

$$\left(\frac{S}{2} + \left\langle \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{|\nabla V|^2} \right\rangle_{\psi}\right)^2 - \left\langle \frac{B^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_{\psi} \left( Q + \left\langle \frac{J^2}{|\nabla V|^2} \right\rangle_{\psi} \right) > 0, \quad (1)$$

其中  $V$  是磁面所包围的体积,  $S = \dot{\chi}\ddot{\phi} - \phi\ddot{\chi}$ ,  $Q = I\ddot{\phi} - J\ddot{\chi}$ ;  $\phi$  与  $\chi$  是磁面内纵向及角向磁通,  $J$  与  $I$  是纵向及角向电流通量, 它们都仅是  $V$  的函数, 其上一点表示对  $V$  微商:

$A = \frac{dA}{dV}$ ; 平均是在磁面上进行的。对于局部扰动来说, (1) 式是必要而充分的条件。从

六十年代初判据提出以后,特别近年来大量的工作,都是将具体的磁面函数(特别是磁轴附近的展开式)代入(1)式中进行繁杂的计算,从而分析磁面函数中各参数的影响。但是即使用最简单的一类磁面函数(相当于均匀电流分布模型),得到的具体结论也很少。同时,由于这些结论依赖于所取的电流分布模型,在实际应用中的可靠性也是没有把握的。

很多人都讨论过非圆截面环电流器的优点<sup>[4]</sup>,大都是从扭曲模稳定条件出发,指出可

\* 1974年12月31日收到。

以允许有更大的电流,从而有利于欧姆加热及改善能量约束.但截面形状的变动,还有可能改善局部稳定性(只要引入较小的畸变),使得等离子体的参数有很大的提高.近年来磁流体平衡理论的进展<sup>[5]</sup>,使人们有可能通过改变外电流(例如改变程序垂直场导线的分布),来产生预定截面的等离子体环.因此系统地分析各类畸变对局部稳定性的影响,从而选取最佳的磁场形态,就是一个非常现实的问题.

在局部稳定条件中,只有一个(或两个)量依赖于磁面的细致变化(各种因素,例如多极畸变,电流分布变化等等,都主要通过它起作用),而其它则只与磁面的粗略结构有关.在实际中,磁面的粗略形状(例如椭圆率)是由其它因素决定的(扭曲稳定性、工程条件等).我们可以通过变动一两个便于控制的量(例如多极畸变的某些分量),来改变那一两个敏感量,从而达到改善稳定性的目的.为此,我们并不打算从(1)式做一些严格的推导,而是寻求一些近似的判别式(不考虑那些不敏感量的小变动).由于只取了展开中的主要项,从确切的意义上讲就不能再称之为必要条件了.但是只要不特别靠近稳定边界(即不在判别式等于零附近),结果还是可靠的.对于环电流器,我们得到了一个一般的判别式,它只与纵磁阱有关.为了克服其它不稳定性(主要是漂移型),我们还分析了多极畸变对剪切的影响.

## 二

在轴对称情况下( $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ),可以引入磁面函数:

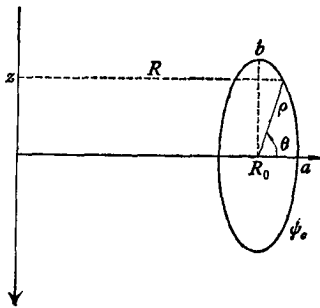


图 1

$$\psi = -2\pi R A_{\varphi}, \quad (2)$$

$A_{\varphi}$  是  $\varphi$  方向矢势.  $P$  (等离子体压强),  $V$ ,  $\phi$ ,  $I$ ,  $J$  都可看成  $\psi$  的函数,并有

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2\pi R} \nabla \psi \times \mathbf{e}_{\varphi} - \frac{I}{2\pi R} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{2\pi R} \nabla I \times \mathbf{e}_{\varphi} + i_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (4)$$

由力学平衡条件可得

$$i_{\varphi} = -2\pi R P' - \frac{II'}{2\pi R}, \quad (5)$$

其中  $A' = \frac{dA}{d\psi} = A \frac{dV}{d\psi}$ ,  $P'$  及  $I'$  作为  $\psi$  的函数的具体形式是由能量及粒子流平衡来决定.若定义  $q = \phi'$  (在圆截面下,  $R_0 \gg a$ ,  $q = \frac{aB_{\phi}}{R_0 B_{\theta}}$ ), 则(1)式中

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{V'^3} q' = \frac{s}{V'^2}, \\ s &= \frac{q}{V'} \delta, \quad \delta = \frac{q'}{q}. \end{aligned} \quad (6)$$

利用  $\dot{P} = I\dot{\phi} - J\dot{x}$  及  $\ddot{\phi} = V'S - \frac{q}{V'^3} V''$  得到

$$Q = I'S - \frac{V''}{V'^3} P', \quad (7)$$

将(3)–(7)式代入(1)式,得到

$$\frac{s^2}{4} + P'[(U + I^2U_{-2})v + sIU_0] - P'^2B > 0, \quad (8)$$

其中  $v = \frac{V''}{V'}$ ,  $U = \left\langle \frac{1}{(\partial\pi R)^2} \right\rangle_{\psi}$ ,  $U_n = \left\langle \frac{(2\pi R)^n}{|\nabla\phi|^2} \right\rangle_{\psi}$ ,  $B = UU_2 + I^2U_2U_{-2} - I^2U_0^2$ , 由于  $U_2U_{-2} - U_0^2 \geq 0$ , 有  $B > 0$ . 如果环比较“瘦” ( $\frac{R - R_0}{R_0} \ll 1$ ),  $U$  及  $U_n$  都基本上只与磁面的粗略形态有关(我们不讨论多磁轴情况,  $|\nabla\phi| \approx 0$ ), 只有  $s$  及  $v$  才依赖于磁面的细致结构.  $\delta$  就是通常的剪切. 但是在一般稳定性分析中, 磁阱的概念是比较含混的, 不同的作者定义不同 (Кадошцев 甚至定义  $Q$  为磁阱). 在我们表达式中出现的  $v$  实际上是描述角向场形成的磁阱, 所以称之为横磁阱. 类似我们可以引入纵磁阱:

$$\eta = \frac{\frac{d}{d\phi} \frac{dV}{d\phi}}{\frac{dV}{d\phi}} = \frac{(V'/q)'}{V'/q} = v - \delta. \quad (9)$$

为了进一步简化, 我们只限于讨论环电流器的情况, 即存在一强纵场:

$$|B_{\phi}| = \frac{I}{2\pi R} \gg B_{\theta} = \frac{|\nabla\phi|}{2\pi R},$$

因此

$$I^2U_{-2} \simeq \frac{B_{\phi}^2}{4\pi^2 R_0^2 B_{\theta}^2} \gg U \simeq \frac{1}{4\pi^2 R_0^2};$$

由于

$$q = \frac{d\phi}{d\psi} = -\left\langle \frac{1}{4\pi^2 R^2} \right\rangle_{\psi} I \frac{dV}{d\phi} = -UIV',$$

并在略去  $\frac{R - R_0}{R_0}$  的一阶修正项后,  $U_{-2} \simeq U \cdot U_0$ .

(8)式简化为

$$\frac{\delta^2}{4} + \frac{U_{-2}}{U^2} \eta P' - P'^2 B_1 > 0 \quad B_1 = \frac{B}{I^2 U^2}. \quad (10)$$

(10)式是对  $P'(P' < 0)$  的限制, 也就是对  $i_{\phi}$  的限制(若  $I' = 0$ ). 如果  $\frac{B_{\theta}}{B_{\phi}} \sim \frac{a}{R}$  (扭曲稳定性要求), 在  $B$  中的  $I^2(U_2U_{-2} - U_0^2) \sim \frac{B_{\phi}^2}{B_{\theta}^4} \left(\frac{a}{R}\right)^2$  与  $UU_2$  同量级, 因此  $\eta P'$  前的系数

$I^2 U_{-2}$  最大, 使  $\eta$  的变化起了决定性作用. 分三种情况讨论:

1. 当  $\eta < 0$ , 即存在纵磁阱 这是环电流器的一般情况. 此时 (10) 式中第二项起稳定作用,

$$|P'| < \frac{I^2 U_{-2} |\eta| + \sqrt{(I^2 U_{-2} |\eta|)^2 + \delta^2 B}}{2B}. \quad (11)$$

如果  $\eta$  与  $\delta$  同量级, 则  $(I^2 U_{-2} \eta)^2 : \delta^2 B \sim \left(\frac{R}{a}\right)^2$ , 略去小量后,

$$|P'| < \frac{I^2 U_{-2}}{B} |\eta|. \quad (11)'$$

在直柱情况下, 若  $\nu = 0$ ,  $|\eta| = \delta$ , 则 (11)' 式即 Suydam 判据.

若考虑到 
$$\frac{U_{-2}}{U U_2} \simeq \frac{1}{(2\pi R_0)^2},$$

则得

$$|P'| < c |\eta| B_\phi^2 \quad \text{或} \quad i_\phi < 2\pi R_0 c B_\phi^2 \eta, \quad (12)$$

其中  $c = \left(\frac{B}{U U_2}\right)^{-1} \simeq \left[1 + \frac{8}{3} \frac{B_\phi^2}{B_\theta^2} \left(\frac{a}{R_0}\right)^2\right]^{-1}$  只与磁面的粗略结构有关.

对均匀电流分布,  $|P'| = \frac{P_0}{\psi_c}$  (其它电流分布模型下可看成近似表达式),  $P_0$  是环中心压强,  $\psi_c$  为等离子体边界  $\psi$  值, 则得到了稳定条件,

$$\beta < 2c |\eta| \psi_c. \quad (13)''$$

在环电流器中, 纵场均匀 ( $I' = 0$ ), 一般说来都存在纵磁阱 (由于弯曲形成). 但多极场的引入, 还可以使  $|\eta|$  大大提高, 从而提高允许的  $\beta$  值. 例如对圆截面 ( $\frac{a}{R} = 0.35$ ),  $|\eta| \psi_c = 1.5\%$ , 当椭圆率增至 0.9, 则  $|\eta| \psi_c$  为 3.5%, 再引入三角畸变, 则可达 6% 以上.

在推导 (12) 式中虽作了一系列近似, 但并未涉及等离子体中电流分布及磁面函数的具体形式, 因此对于任何环电流器至少在定性上都是适用的.

2. 当  $\eta > 0$  得到类似于 (11) 式的判别式为

$$|P'| < \frac{U^4}{4U_{-2}^2} \frac{\delta^2}{\eta}.$$

如果取  $\bar{B}_\theta^{-2} = \left\langle \frac{(2\pi R)^2}{|\nabla\psi|^2} \right\rangle_\psi = U_2$ , 则

$$|P'| < \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{\eta} \bar{B}_\theta^2,$$

或均匀电流分布下

$$\beta_\theta < \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\eta} \psi_c. \quad (14)$$

1) 在以下讨论中我们取磁轴上磁面函数值为零.

### 3. 当 $\eta \sim 0$ (即 $\eta \sim \delta \left(\frac{\alpha}{R}\right)^2$ )

$$\left| \frac{U_{-2}}{U^2} \eta \right|^2 \ll \frac{B}{I^2 U^2} \delta^2,$$

$$|P'|^2 < \frac{\delta^2}{4B_1} \quad \text{或} \quad |P'| < \frac{B_{\varphi} \bar{B}_{\theta}}{2} \delta.$$

因此,对于环电流器来说,必须存在纵磁阱 ( $\eta < 0$ ), 否则允许的  $\beta$  值 (或  $i_{\varphi}$ ) 就太小了. 在目前圆截面的环流器中, 由于温度较低, 加之破坏性不稳定性对粒子密度的限制, 使得局部稳定条件满足. 但是如果进一步采取辅助加热手段, 减少杂质含量, 则有可能破坏条件 (13) 式, 因此引入多极场是必要的. 对于具体装置来说, 除了纵磁阱外, 还要求有很大的剪切, 因为这对于克服其它类型不稳定性是很必要的. 对此, 多极场的引入也是很有好处的.

### 三

我们将分析多极场对磁阱和剪切的影响. 只限于有一个磁轴的情况, 即在椭圆磁面的基础上 (从技术上考虑比较合适的是直立椭圆), 引入六极场 (三角畸变) 及八极场. 由于用外电流可以形成任何所要求的截面形状, 因此在讨论中只需要考虑包含所要求多极场分量的简单磁面函数, 而不必涉及复杂的边条件, 这就使分析大大简化, 并可不限于磁轴附近.

磁面函数满足如下方程<sup>[5]</sup>:

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \psi = - \left( 2\pi R_0 h P' + \frac{II'}{2\pi R_0 h} \right), \quad (15)$$

其中  $h = 1 + k\rho \cos \theta$ ,  $k = \frac{1}{R_0}$ . 对环参数展开 (即对  $k\rho \cos \theta$  展开):  $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ ,

则有

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \psi_0 = - \left( 2\pi R_0 P' + \frac{II'}{2\pi R_0} \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\pi R_0 P''(\psi_0) + \frac{(I^2)''(\psi_0)}{2\pi R_0} \right\} \psi_1 \\ & = k\rho \cos \theta \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_0 + \frac{1}{\rho^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_0 \right. \\ & \quad \left. - 2\pi R_0 P'(\psi_0) - \frac{II'(\psi_0)}{2\pi R_0} \right\}, \quad (15)'' \end{aligned}$$

.....

将  $\psi_0$  对  $\theta$  作傅里叶展开,

$$\psi_0 = f_0(\rho) + f_2(\rho) \cos 2\theta + f_3(\rho) \cos 3\theta + f_4(\rho) \cos 4\theta + \dots,$$

$\cos \theta$  项对应于磁轴的移动, 可以取成零.  $f_2$  项即椭圆畸变,  $f_3$  即三角畸变,  $f_4$  是八极场分量,  $\dots$ . 从  $\psi_0$  可以解出  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . 以下我们只讨论三角畸变及八极场的影响. 因为只

要调整它们就可以达到改善稳定性的目的。

计算剪切及磁阱的表达式如下：

$$\begin{aligned}
 V' &= 2\pi R_0 \oint_{\psi} \frac{\rho h}{\partial\psi/\partial\rho} d\theta, \\
 V'' d\psi &= 2\pi R_0 \left\{ \oint_{\psi+\Delta\psi} - \oint_{\psi} \right\} \frac{\rho h}{\partial\psi/\partial\rho} d\theta, \\
 v &= \oint_{\psi} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \frac{\rho h}{\partial\psi/\partial\rho} \right) \frac{1}{\partial\psi/\partial\rho} d\theta / \oint_{\psi} \frac{\rho h}{\partial\psi/\partial\rho} d\theta, \\
 q &= I \oint_{\psi} \frac{\rho}{h\partial\psi/\partial\rho} d\theta, \\
 q' &= I \oint_{\psi} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \frac{\rho}{h\partial\psi/\partial\rho} \right) \frac{1}{\partial\psi/\partial\rho} d\theta + I' \oint_{\psi} \frac{\rho}{h\partial\psi/\partial\rho} d\theta.
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

对于环电流器,  $I' = 0$ , 则只在考虑了弯曲后, 纵磁阱才存在. 对于直柱等离子体,  $I' \neq 0$ ,  $\eta = -\frac{I'}{I}$ , 纵磁阱由角向电流给出.

1. 均匀电流分布情况  $2\pi R_0 P' = a_1$ ,  $\frac{II'}{2\pi R_0} = b_1$ . 方程(15)'的解为

$$\psi_0 = \rho^2(1 + \varepsilon \cos 2\theta) + t\rho^3 \cos 3\theta + f\rho^4 \cos 4\theta, \tag{18}$$

$\varepsilon$  为椭圆率,  $\psi$  以  $\frac{A}{4} \rho_0^2$  为单位<sup>1)</sup>,  $A = -(a_1 + b_1)$ ,  $\rho_0$  为  $\rho$  及  $R_0$  的单位,  $t$  及  $f$  分别标志三角及八极畸变的强度. 方程(15)''的解为

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= dk\rho^3 \cos \theta + \frac{kt}{4} \rho^4 \cos 2\theta + \frac{kf}{4} \rho^5 \cos 3\theta, \\
 d &= \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{2}{3} \alpha + \frac{\varepsilon}{3} \right), \quad \alpha = \frac{b_1}{a_1}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

同样

$$\psi_2 = \frac{a_0}{4} k^2 \rho^4 (1 + \varepsilon' \cos 2\theta), \tag{20}$$

$$a_0 = \frac{3}{2} d - \frac{b}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad b = \frac{b_1}{A}, \quad \varepsilon' = \frac{4}{3} \frac{a_0 - \frac{d}{4}}{a_0}.$$

当多极场很弱时, (16), (17) 式可以对  $t$  及  $f$  展开. 很容易看出, 当  $t = f = 0$  时,  $v$  及  $\delta$  的最低阶项正比于  $k^2$ .  $t$  的一阶项不存在, 因此三角畸变起作用的项至少是  $t^2$  或  $kt$  项.  $f$  的一阶项存在, 下一项至少是  $f^2$  或  $kft$  等.

先分析八极场的影响. 只取到  $f$  的一次, 则  $\psi^{(0)} = \rho^2(1 + \varepsilon \cos 2\theta)$ ,  $\psi^{(1)} = f\rho^4 \cos 4\theta$ ,

1) 因为  $a_1 \simeq i_{\varphi} \simeq 2\pi R_0 |P'|$ , 以下按 (18) 式算出的  $\eta$  (若记成  $\eta^{(n)}$ ) 与 (10) 式中之  $\eta$  差一因子  $\frac{1}{2\pi R_0 |P'|}$ . 代入

(12) 式得到  $|P'|^2 < \frac{2cB_0^2}{\pi R_0} \eta^{(n)}$ , 而 (13) 式为  $\beta < 2c\eta^{(n)} \psi_c^{(n)}$ ,  $\psi_c^{(n)}$  是以  $\frac{A}{4}$  为单位时边界  $\psi$  值.

在(16),(17)式中取  $h = 1$ , 完成对  $\theta$  积分, 则

$$v_l = \delta_l = -\frac{3\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}f. \quad (21)$$

(21)式包含一个非常重要的事实, 即八极场产生剪切是与椭圆率密切相关的. 对于圆截面的等离子体, 小的八极场几乎不起什么作用. 早期大和(Okawa)等人关于多极场的工作, 虽然说明八极场对稳定性有好处, 但却要求有很大的强度才能起作用, 因此所用的四根导体棒不能取出等离子体外. 当  $\varepsilon$  增加,  $f$  所起的作用迅速增大(正比于  $\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$ ). 对于  $\frac{b}{a} = 3-4$  的椭圆截面等离子体, 很小的八极场就能产生很大的剪切, 因此只需要在等

离子体外安置四根电流不大的导线就足够了, 在具体装置上应用很方便. 如果我们继续展开下去, 就看出展开系数实际是  $\frac{f}{(1-\varepsilon^2)^2}$ . 当  $\varepsilon$  接近1, 很小的

$f$  也就不能展开了. 在图2中, 我们给出了直接用数值积分的结果. 当  $f < 0$ ,  $\delta$  随  $-f$  迅速上升; 但当  $f > 0$ ,  $-\delta > 0$  随  $f$  增加上升到一定程度就接近饱和了. 在实际的环电流器中, 电流密度在中心比较大, 向外减小,  $\delta$  大于零. 因此在椭圆截面上, 适当地(不在等离子体内引入其它磁轴)加上  $f < 0$  的八极场是有好处的.

若设多极场 ( $t = f = 0$ ), 将(16)式展至  $k^2$ , 得到

$$v_{k^2} = \frac{k^2}{16(1-\varepsilon^2)^2} \left\{ \frac{27}{2} d^2(2-4\varepsilon+3\varepsilon^2-\varepsilon^3) - 6d(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2-3\varepsilon) - 4a_0(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2) + 12a_0\varepsilon'(1-\varepsilon^2)\varepsilon \right\}.$$

当  $\varepsilon$  从零增至接近1,  $v_{k^2}$  从正变到负再为正. 利用  $\delta$  与  $v$  表达式的差别, 可以直接求出纵磁阱,

$$\eta_{k^2} = -\frac{3k^2}{4} \frac{2-\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon)} - \frac{k^2}{2(1+\varepsilon)}. \quad (22)$$

对于圆截面,  $\eta_{k^2} = -2k^2$ , 由于弯曲成环总存在纵磁阱. 对于直立椭圆( $\varepsilon$  由零增大),  $\eta$  略有增加, 对提高  $i_\varphi$  是有好处的, 但  $\beta$  的限制由  $|\eta|\psi_c$  决定 (全是取  $\frac{A}{4}$  为单位), 例如  $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$  的椭圆 ( $\psi_c$  取成 1.9,  $|\eta| \simeq \frac{17}{8} k^2$ ) 与同样截面积的圆 ( $\psi_c \simeq 4$ ) 比较, 对  $\beta$  的限制差不多. 对于横向椭圆 ( $\varepsilon < 0$ ),  $|\eta|$  增大很快, 随  $\varepsilon$  接近  $-1$ , 对  $i_\varphi$  及  $\beta$  允许值的提高都有好处.

引入三角场后, 得到

$$v_{k^2} = \frac{3}{8} \frac{k^2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \left\{ (5-3\varepsilon-5\varepsilon^2+3\varepsilon^3) - 9d \left( 2 - \frac{5}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \right\}.$$

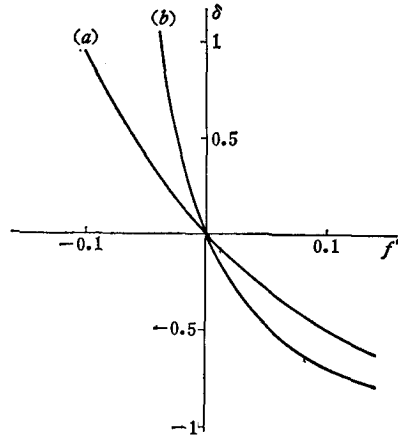


图2 八极场对剪切影响  
(a)  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\delta \times 10$ ;  
(b)  $\varepsilon = 0.8$

上式当  $I' = 0$ , 花括号中为

$$\frac{1}{8} (-68 + 75\varepsilon - 22\varepsilon^2 + 15\varepsilon^3) < 0.$$

纵磁阱

$$\eta_{kt} = \frac{3}{2} \frac{k t \varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon)}. \quad (23)$$

对于圆截面, 三角畸变也不起作用, 随着长轴拉长 ( $\varepsilon \rightarrow 1$ ),  $t < 0$ , 三角场可以产生正剪切, 同时也产生纵磁阱. 和八极场类似, 实际的展开系数是

$$\frac{k t}{(1 - \varepsilon^2)}.$$

如果取到  $k$  的一次而不对  $t$  展开直接做数值积分, 所得结果绘在图 3 上. 基本行为是与 (23) 式一致的. 因此在垂直椭圆上引入一尖顶向外 ( $t < 0$ ) 的三角畸变是很有利的. 和  $\eta_{kt}$  类似, 横向椭圆 ( $\varepsilon < 0$ ,  $t > 0$ ) 在这种情况下更为有利.

## 2. 进一步分析电流线性分布的情况

$$i_{\varphi} = \left( Ah + \frac{B}{h} \right) (\phi_c - \phi),$$

因此压力正比于  $(\phi_c - \phi)^2$ . 如果采用  $(R, Z)$

座标系, 准确解是可以由库仑波函数写出来的, 但都对应于矩形边条件, 比较难将它们组合成多极场的解. 所以我们仍采用  $(\rho, \theta)$  座标系. 零级方程 (15)' 的解为

$$\phi = \phi_c (1 - J_0(\rho)) + \alpha_2 J_2(\rho) \cos 2\theta + \alpha_3 J_3(\rho) \cos 3\theta + \alpha_4 J_4(\rho) \cos 4\theta,$$

式中  $\alpha_n$  为系数,  $\rho$  以  $|A + B|^{\frac{1}{2}}$  为单位. 但是一阶磁面方程 (15)'' 的解不能写成解析的形式. 为了得到定性直观的结论, 从头做数值计算显然是不合适的. 但是我们已经比较详细地分析了均匀电流分布的情况, 因此只需要讨论当电流改变为线性分布所引起的变化, 这种比较可以在磁轴附近进行. 由于要考虑八极场的效果, 所以要将  $\phi_0$  的展开保留到  $\rho^4$  项, 并以  $\frac{\psi_c}{8}$  为  $\phi$  的单位<sup>1)</sup>,

$$\phi_0 = \rho^2 (1 + \varepsilon \cos 2\theta) - \frac{\rho^4}{8} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \cos 2\theta \right) + t \rho^3 \cos 3\theta + f \rho^4 \cos 4\theta, \quad (24)$$

其中  $\varepsilon = \frac{2\alpha_2}{\phi_c}$ ;  $t = \frac{\alpha_3}{6\phi_c}$ ;  $f = \frac{\alpha_4}{48\phi_c}$ . 与 (18)' 式比较, 仅多出一项  $\Delta\phi_0 = -\frac{\rho^4}{8} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} \cos 2\theta \right)$ ,

1) 在线性情况下, 环中心  $|P'|$  最大, 因此 (12) 式在  $\phi = 0$  成立即可. 若  $I' = 0$ , 则  $|P'_{\phi=0}| \approx \frac{A}{2\pi R_0} \phi_c$ , 以  $\frac{\psi_c}{8}$  为  $\phi$  单位求出的  $\eta$  记为  $\eta^{(*)}$ , 则 (12) 式应改为

$$|P'_{\phi=0}|^2 < \frac{4Ac}{\pi R_0} B_{\varphi}^2 \eta^{(*)} \quad (12)'$$

或

$$|i_{\varphi_0}|^2 < \frac{8Ac}{(2\pi R_0)^3} B_{\varphi}^2 \eta^{(*)}.$$

对环中心压力限制

$$\beta_0 < 8c\eta^{(*)}. \quad (13)$$

它是电流分布向中心集中的结果. 将(24)式代入(15)''式求得一级修正(也保留至  $\rho^4$  项),

$$\psi_1 = k d_1 \rho^3 \cos \theta + \frac{k t}{4} \rho^4 \cos 2\theta, \quad (24)'$$

式中  $d_1 = \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4}{3} \alpha \right)$ ,  $\alpha = \frac{B}{A}$ . (24)' 与 (19) 式差别也仅在  $d_1$  多  $\frac{2}{3} \alpha$ .

计算  $\delta$  与  $\eta$ .  $f$  的一阶项与  $k t$  项是与 (21), (23) 式相同的, 也就是说, 三角畸变与八极场的作用是与均匀电流分布情况基本一致<sup>1)</sup>. 在计算  $k^2$  项时如果只求  $\eta$ , 则因为不涉及  $\psi_2$ , 结果也与(22)式一致. 但是和  $f$  的一阶项相应, 还必须考虑  $\Delta\psi_0$  的一阶项, 结果

$$v_\Delta = \delta_\Delta = \frac{1}{4(1 - \varepsilon^2)^2}. \quad (25)$$

从直观上看, 均匀电流分布等离子体柱  $v = \delta = 0$ , 当电流向中心集中,  $B_\theta$  在中心增大, 使得  $q$  在中心减小, 产生正剪切. 要强调的是, 这部分剪切也随椭圆率加大而增加.

**3. 在实际环电流器装置中, 有的比较接近线性情况, 有的可能比线性分布更向中心集中** 对于后一情况, 一般求解当然更困难, 但如果在磁轴附近, 则磁面函数的展开表达式与 (24), (24)' 式类似, 只是  $\Delta\psi_0$  前系数(仍小于零), 括号中的  $\frac{\varepsilon}{3}$  以及  $d_1$  有变化, 所以基本结论仍不会变, 只是  $\delta_\Delta$  可能更大些.

由于磁面形状比较简单(小多极畸变), 电流密度单调变化, 将前面有关多极畸变所起作用的结论定性外推到磁轴附近之外(当然  $k\rho$  仍很小), 虽然不能得到严格证明, 但应该说还是能基本肯定的.

#### 四

根据扭曲模稳定性的分析, 将环电流器截面拉长, 对于欧姆加热及能量约束是有好处的, 实践也初步证实了这点 (Doublet II; 指环形装置; Belt Pinch). 在直立方向拉长这是由工程条件决定的, 但拉长多少( $\varepsilon$  多大), 还要由一些整体稳定性要求来决定. 局部稳定条件给了我们进一步细致选择磁面形态的根据. 为此我们在一定近似下得到(12)及(13)式, 由于它不依赖于电流分布及具体磁面结构, 便于我们作定性讨论. 特别重要的是, 整个判据仅依赖一个 ( $\eta$ ) 或者两个 (如果扩大一点讨论) 对磁面变动很敏感的量, 因此可以用多极场作为改变它们的有力手段. 对于一个拉长椭圆, 附加一小八极场 ( $f < 0$ ) 可以大大增加剪切; 而引入一顶角向外的三角场 ( $t < 0$ ), 可以加深纵磁阱. 因为用三角及八极场已经能达到大大改善稳定性的目的, 我们就没必要考虑更高阶畸变, 同时也没有必要采用象双流器 (Doublet) 那样复杂的磁场形态. 由此来分析现有的装置. 指环形装置三角畸变的方向是对的, 但它的八极畸变相应  $f > 0$ , 从而实际是抵消了一部分  $\delta_\Delta$ , 没有好处. Belt Pinch 三角畸变虽小, 但尖顶向内只能减小由角向电流引起的纵磁阱; 由于电流分布使  $\delta_\Delta < 0$ , 八极畸变更增加了负剪切.

我们还要特别强调, 只有在椭圆截面之上, 才能用小多极场大大增大剪切和磁阱, 从

1) 由于 (13)'' 式, 椭圆变形对  $\beta$  的提高也有好处.

而作为人们改善等离子体环稳定性的有力而简单的手段。对于圆截面环电流器,多极场是不太起作用的,因此预计象 JET 或 Toska (Culham 的小装置)上磁面的变形至少对于稳定性是没有多少好处的。

### 参 考 文 献

- [1] Л. С. Соловьев, Вопросы теории плазмы, Вып. 6. стр. 210.
- [2] Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, Вып. 2. стр. 132.
- [3] C. Mercier, *Nuclear Fusion Suppl.*, 2 (1962) 801; Л. С. Соловьев, *ЖЭТФ*, 53 (1967), 626; А. Б. Михайловский, В. Д. Шафранов, *ЖЭТФ*, 66 (1974), 190.
- [4] Л. А. Арцимович, В. Д. Шафранов, *ЖЭТФ*, II. 15 (1972), 72; Т. Окаса, 核融合, 20 (1968), 557.
- [5] L. E. Zakharov, *Nuclear Fusion*, 13 (1973), 595.
- [6] Л. С. Соловьев, В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, Вып. 5, стр. 3.

## THE LOCAL STABILITY CRITERIA OF THE TOKAMAK AND THE EFFECT OF THE MULTIPOLE FIELD

HUO YU-PING

(*Institute of Physics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

The local stability of the Tokamak is discussed and a general approximate criteria  $\beta < 2c|\eta|\phi_0$  obtained, where  $\eta$  is the longitudinal magnetic well. Furthermore, the influence of multipole' fields on the longitudinal magnetic well and the magnetic shear is discuss. It is observed that small triangular and octopole field components may considerably stabilize a Tokamak of elliptical cross-section.