

# 场流关系和 $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$ 的衰变过程\*

何 祚 庠 黄 涛  
(中国科学院高能物理研究所)

## 提 要

本文应用由复合场论或场代数导出的轴矢流的场流恒等式计算了  $\pi$  介子的辐射衰变  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$  过程。计算结果与目前的实验大致相合。

关于轴矢流的场流恒等式首先是李政道等人从拉氏函数理论得到的<sup>[1]</sup>。我们在前一工作中从复合场论也导出这一恒等式并得到其它一系列的场流关系式<sup>[2]</sup>。本文应用轴矢流的场流恒等式来计算  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$  的衰变过程。

关于  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$  衰变过程曾有郭硕鸿用规范不变的理论进行计算<sup>[3]</sup>，并先后有多人就这一过程进行过分析<sup>[4]</sup>，特别是 Neville 的分析较为详尽<sup>[5]</sup>。实验上曾有 Depomier 等人进行测量并和 Neville 的算式进行了比较，结果表明，在理论中除要考虑通常的内韧致辐射项以外，还必须唯象地计入结构相关项<sup>[6]</sup>。Depomier 等人还根据实验结果具体估计了这一结构相关项的大小。1967年，Das 等人<sup>[7]</sup>应用流代数和 Weinberg 求和规则<sup>[8]</sup>从理论上解释了这一结构相关项，且在定量上与实验结果大致符合。这里应用轴矢流的场流恒等式重新计算这一过程，其结果比 Das 等人更为直接而简单地得到结构相关项，并与实验结果大致符合。

对于  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$  的衰变过程，通常是用  $V-A$  费米弱相互作用理论来描述的。对此过程的跃迁矩阵元可分为两部分：内韧致辐射项  $M_{IB}$  和结构相关项  $M_{SD}$ 。在  $M_{IB}$  中只有赝矢相互作用有贡献，如图 1(a) 中的三个图。在  $M_{SD}$  中矢量相互作用和赝矢相互作用都有贡献，通常记作  $M_{SDV}$  和  $M_{SDA}$ 。其相应的费曼图如图 1(b) 和图 1(c)。跃迁矩阵元通常记作<sup>[7]</sup>：

$$T_{\pi \rightarrow e\nu\gamma} = \frac{-ieG \cos \theta}{\sqrt{2}} \left( \frac{m_e m_\nu}{4k_0 q_0 p_{10} p_{20}} \right)^{\frac{1}{2}} [M_{IB} + M_{SDV} + M_{SDA}], \quad (1)$$

其中

$$M_{IB} = -F_\pi \varepsilon_\mu \left\{ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\nu k_\mu}{\nu} + \frac{p_\mu k_\nu}{\nu} \right) l_\nu - \bar{u}_{(p_1)}^{(e)} \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{q}) - m_e}{2p_1 q} \hat{k} (1 + \gamma_5) v_{(p_2)}^{(\nu)} \right\}, \quad (2)$$

$$M_{SDV} = F(\nu) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho k_\sigma \varepsilon_\mu l_\nu, \quad (3)$$

$$M_{SDA} = \nu a(\nu) \varepsilon_\mu \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\nu k_\mu}{\nu} \right) l_\nu. \quad (4)$$

在(2)、(3)和(4)式中的  $l_\nu$ ,  $F_\pi$  定义为

\* 1974年4月3日收到。

$$l_\nu = i\bar{u}^{(e)}(p_1)\gamma_\nu(1 + \gamma_5)v^{(\nu)}(p_2), \quad (5)$$

$$iF_\pi k_\mu/\sqrt{2k_0} = \langle 0 | A_{\mu 2}^1(0) | \pi^+(k) \rangle, \quad (6)$$

其中  $A_{\mu 2}^1(0)$  是轴矢流, 在层子模型里

$$A_{\mu 2}^1(0) = \bar{\psi}_s(0)\gamma_\mu\gamma_5\lambda_2^1\psi_s(0),$$

$\psi_s$  是层子的场量,  $\lambda_2^1$  是  $SU(3)$  矩阵. 在 (1)–(6) 式中  $k, q, p_1, p_2$  分别是  $\pi$  介子、光子、电子和中微子的四动量,  $F(\nu)$  和  $a(\nu)$  是描述结构相关项的  $\nu$  的未知函数,  $\nu = q \cdot k$ , 其相应的物理区域是  $-\frac{1}{2}(m_\pi^2 - m_e^2) < \nu < 0$ . 在实验上对  $\pi^+ \rightarrow e^+\nu\gamma$  过程的测量表明<sup>[6]</sup>:

$$\gamma_{\text{实}} = \left| \frac{a(\nu)}{F(\nu)} \right| \approx 0.4 \quad \text{或者} \quad -2.1. \quad (7)$$

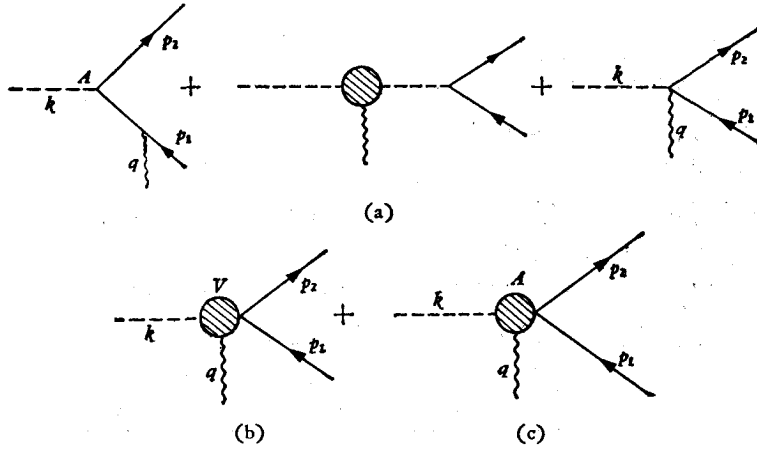


图 1

对于  $M_{SDV}$  项通常是通过同位旋守恒和  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  的过程相联系起来<sup>[9]</sup>. 取

$$\left| F\left(-\frac{1}{2}m_\pi^2\right) \right|^2 = 4(2\pi W_{\pi^0})^{1/2}/e^2 m_\pi^{3/2}, \quad (8)$$

其中  $W_{\pi^0}$  是  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  的衰变几率. 在文献[6]中获得(7)式时曾经取了  $\tau_{\pi^0} = 1.05 \times 10^{-16}$  sec. 本文对于  $M_{SDV}$  项也打算直接取用(8)式. 即用  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  的实验结果来定  $F(\nu)$  值, 这里假定了对  $\nu$  可以解析延拓.

这样, 问题就归结为利用轴矢流的场流关系式来计算  $M_{IB}$  和  $M_{SDA}$  项.

在层子模型里,  $\pi$  介子由正反层子所组成, 相互作用也是通过层子进行, 因而赝矢相互作用将由下式来描述:

$$H_A = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta \bar{\psi}_s \gamma_\mu \gamma_5 \lambda_2^1 \psi_s \bar{\psi}_c \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_c. \quad (9)$$

根据文献[2]所给出的场流关系式, 可知

$$\bar{\psi}_s \gamma_\mu \gamma_5 \lambda_2^1 \psi_s = 4f_1^A A_\mu^1(x) + \frac{4f_2^A}{m_\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_{\pi^+}(x), \quad (10)$$

其中  $\lambda_2^1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$ ,  $\varphi_{\pi^+}(x)$  是  $\pi$  介子的场量,  $A_\mu^1(x)$  是  $A_1$  介子的场量,  $f_2^A, f_1^A$  分别

是它们的零点波函数. 当然在(10)式中只考虑了能级最低的两个复合粒子, 如果存在着  $\pi'$  介子或  $A'_1$  介子, 在(10)式中就还应将这些粒子包括在内. 不过, 可以期望这些高激发态的介子的零点波函数较小. 考虑到规范不变性, 场流关系式(10)还应进一步改写成

$$\bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma_5 \lambda_2^1 \psi_e = 4f_1^A A_\mu^1(x) + \frac{4f_2^\pi}{m_\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu(x) \right) \varphi_{\pi^+}(x), \quad (11)$$

其中  $A_\mu(x)$  是电磁场场量. (11)式共有三项. 可以证明第一项给出  $M_{SDA}$  项, 后两项却给出  $M_{IB}$  项. 现在分别考察这些项对散射矩阵元的贡献.

首先考察第二项对矩阵元的贡献:

$$\begin{aligned} I_2 &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \frac{4f_2^\pi}{m_\pi} \int d^4x \left\langle e\nu\gamma \left| \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_{\pi^+}(x) \right) \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x) \right| \pi^+ \right\rangle \\ &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \frac{4f_2^\pi}{m_\pi} \int d^4x d^4y \frac{e^{-iqy}}{\sqrt{2q_0}} \sum_\nu \varepsilon_\nu \left\langle e\nu \left| T \left( (J_\nu^\pi(y) + J_\nu^\pi(y)) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_{\pi^+}(x) \right) \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x) \right) \right| \pi^+ \right\rangle \\ &= I_2^\pi + I_2^\nu. \end{aligned} \quad (12)$$

在电磁相互作用和弱相互作用可做一次微扰的假定下, 可证

$$\begin{aligned} I_2^\pi &= i(2\pi)^4 \delta(k - p_1 - p_2 - q) \frac{-ieG \cos \theta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{4k_0 q_0 p_{10} p_{20}}} \\ &\quad \cdot \frac{4f_2^\pi}{m_\pi} \varepsilon_\mu \bar{u}^{(e)}(p_1) \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{q}) - m_e}{2p_1 q} \hat{k} (1 + \gamma_5) v^{(\nu)}(p_2), \end{aligned} \quad (13a)$$

$$I_2^\nu = i(2\pi)^4 \delta(k - p_1 - p_2 - q) \frac{-ieG \cos \theta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{4k_0 q_0 p_{10} p_{20}}} \frac{4f_2^\pi}{m_\pi} \frac{(q_\nu - k_\nu) k_\mu}{\nu} \varepsilon_\mu l_\nu, \quad (13b)$$

在获得(13b)式时曾用到了取  $\nu \approx 0$  的近似, 这相当于在图 1(a) 的第二个图中把一团取作点, 由于  $\nu$  很小, 作此近似影响不大.

其次考察第三项对矩阵元的贡献:

$$\begin{aligned} I_3 &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \frac{4f_1^A}{m_\pi} (-i)e \int d^4x \langle e\nu\gamma | A_\mu(x) \varphi_{\pi^+}(x) \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x) | \pi^+ \rangle \\ &= -i(2\pi)^4 \delta(k - p_1 - p_2 - q) \frac{-ieG \cos \theta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{4k_0 q_0 p_{10} p_{20}}} \frac{4f_1^A}{m_\pi} \varepsilon_\mu l_\mu. \end{aligned} \quad (14)$$

再注意到在层子模型中对  $\pi \rightarrow \mu\nu$  过程的计算公式, 可以将  $F_\pi$  用零点波函数  $f_2^\pi$  表示为

$$F_\pi = \frac{4f_2^\pi}{m_\pi}. \quad (15)$$

将(13a), (13b), (14)式相加就可导出(1)式中的  $M_{IB}$  项.

最后考察(11)式中的第一项对矩阵元的贡献:

$$\begin{aligned} I_1 &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta 4f_1^A \int d^4x \langle e\nu\gamma | A_\mu^1(x) \bar{\psi}_e(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_\nu(x) | \pi^+ \rangle \\ &= -i \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta 4f_1^A \int d^4x e^{-i(p_1 + p_2)x} \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{p_{10} p_{20}}} \langle \gamma | A_\mu^1(x) | \pi^+ \rangle l_\mu. \end{aligned} \quad (16)$$

这样,问题就归结为计算矩阵元  $\langle \gamma | A_\mu^1(x) | \pi^+ \rangle$ . 对这一矩阵元可用下述方法来计算. 从复合场论可以得到通常的矢量为理论<sup>[2]</sup>,

$$eJ_\gamma(x) = 4\sqrt{2\pi\alpha} [g_1^\rho \phi_\rho(x) + g_1^\omega \phi_\omega(x) + g_1^\varphi \phi_\varphi(x)], \quad (17)$$

其中  $g_1^\rho$ ,  $g_1^\omega$ ,  $g_1^\varphi$  分别是  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  的零点波函数. 再由低能定理可近似地给出

$$eJ_\gamma(x) \simeq 4\sqrt{2\pi\alpha} \left[ \frac{1}{m_\rho^2} g_1^\rho J_\rho(x) + \frac{1}{m_\omega^2} g_1^\omega J_\omega(x) + \frac{1}{m_\varphi^2} g_1^\varphi \phi_\varphi(x) \right]. \quad (18)$$

考虑到强作用顶点  $G$  宇称守恒有

$$\langle \omega | A_\mu^1(x) | \pi \rangle = \langle \varphi | A_\mu^1(x) | \pi \rangle = 0. \quad (19)$$

因此

$$\begin{aligned} \langle \gamma | A_\mu^1(x) | \pi^+ \rangle &\simeq 4\sqrt{2\pi\alpha} \frac{1}{m_\rho^2} g_1^\rho \langle \rho | A_\mu^1(x) | \pi^+ \rangle \\ &= 4\sqrt{2\pi\alpha} \frac{g_1^\rho}{m_\rho^2} \frac{1}{m_A^2 + (k-q)^2} \langle \rho | J_{A_1}(x) | \pi^+ \rangle \\ &= i4\sqrt{2\pi\alpha} \frac{g_1^\rho}{m_\rho^2} \frac{1}{m_A^2 + (k-q)^2} \frac{e^{i(k-q)x}}{\sqrt{4q_0k_0}} \nu [G_S(\nu) \delta_{\mu\nu} \varepsilon_\nu + G_D(\nu) q_\mu (k \cdot \varepsilon)], \quad (20) \end{aligned}$$

其中  $\varepsilon_\nu$  是光子的极化矢量,  $G_S$  和  $G_D$  是  $A_1 \rightarrow \rho\pi$  衰变过程中  $S$  波、 $D$  波振幅. 由于(20)式左边满足电磁场的规范不变性,由此可得

$$G_D = -\frac{G_S}{\nu}. \quad (21)$$

将(20)和(21)式代入(16)式,就得到

$$\begin{aligned} I_1 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_1 - p_2 - q) \frac{G}{\sqrt{2}} \cos\theta \frac{f_1^A}{m_A^2} \frac{g_1^\rho}{m_\rho^2} \frac{4\sqrt{2\pi\alpha}}{m_A^2 + (k-q)^2} \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{4q_0 k_0 p_{10} p_{20}}} \\ &\quad \times \nu G_S \varepsilon_\nu \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu k_\nu}{\nu} \right] l_\mu. \quad (22) \end{aligned}$$

比较(22)式和(1)式,并将  $\nu$  延拓到零点,得到

$$a(0) = 16\sqrt{2\pi\alpha} \frac{f_1^A g_1^\rho}{m_A^2 m_\rho^2} G_S(0). \quad (23)$$

注意到从复合场论可以有 Weinberg 第二求和规则<sup>[2,8]</sup>

$$f_1^A = g_1^\rho. \quad (24)$$

这表明作为  $P$  波的  $A_1$  介子零点波函数值可以与  $S$  波的  $\rho$  介子零点波函数值一样大,这在  $B$ - $S$  方程的解中是可以允许的<sup>[10]</sup>. 此外,由  $\rho \rightarrow 2e$  的实验可给出

$$g_1^\rho = \frac{m_\rho^2}{10\sqrt{2}}. \quad (25)$$

将(24)和(25)式代入(23)式,就得到

$$a(0) = 8.9 \times 10^{-3} G_S(0). \quad (26)$$

对于  $G_S(0)$  数值可以期望它由  $A_1 \rightarrow \rho\pi$  的宽度实验给出. 注意到当  $\rho$  介子在质壳时已在文献[2]中证明其相应的流算符矩阵元满足 Lorentz 条件,因而就有

$$G_D = -\frac{G_S}{\nu}, \quad (27)$$

其中

$$\nu = (k \cdot q) = \frac{1}{2} [(k+q)^2 - k^2 - q^2] = -\frac{1}{2} (m_A^2 - m_\rho^2 - m_\pi^2). \quad (28)$$

(27)式正好相应于 Das 等人用了较为复杂的计算后才得到的  $G_S$  和  $G_D$  之间的关系<sup>[11]</sup>(参看文献[10]中的(16)式和(22)式), 如果取  $\Gamma_{A_1 \rightarrow \rho\pi} = 200\text{MeV}$ , 就有

$$G_S(0) = 1.28 \frac{1}{m_\pi}, \quad (29)$$

$$a(0) \simeq 1.14 \times 10^{-2} \frac{1}{m_\pi}. \quad (30)$$

再考虑到目前的实验值  $\tau_{\pi^0} = (0.84 \pm 0.10) \times 10^{-16}\text{sec}$ , 那么

$$|F| = 2.64 \times 10^{-2} \frac{1}{m_\pi}. \quad (31)$$

由此可得

$$\gamma_{\text{理}} = \left| \frac{a}{F} \right| = 0.43. \quad (32)$$

注意到  $\tau_{\pi^0} = (0.84 \pm 0.10) \times 10^{-16}\text{sec}$  时, 在(7)式中所给出的  $\gamma_{\text{理}}$  应为 0.3, 这与(32)式的理论值很接近.

值得注意的是, 本文的计算着重考虑了  $A_1$  介子的贡献, 却没有考虑图 2 的贡献, 但如果从我们所用的场流关系式(11)出发<sup>[12]</sup>, 此图是不存在的. 可能是由于所取的展开方式不同, 因而所考虑的图形也略有不同.

从以上的讨论可以得到如下两点结论: 1. 为保证规范不变, 必须将场流关系式(10)改变为(11)式, 只有这样才能得到通常唯象理论中的  $M_{IB}$  项 (即(2)式中的第一项). 2. 由于  $M_{SDV}$  项是由实验定的, 而  $M_{IB}$  项则是由场流关系式(11)的第二、三项计算出来的 (在计算中只作了  $\nu$  延拓到零点的近似, 由于此过程  $\nu$  很小, 影响不大), 因此要想获得  $M_{SDA}$  项, 并得到  $\gamma \approx 0$  的结果, 在场流关系式(11)中必须有  $A_1$  介子的贡献. 但是由于实验上  $A_1$  介子的宽度还很不确定, 而且  $A_1$  介子是否存在也是个疑问,  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ,  $\pi \rightarrow e\nu\gamma$  的实验也还不够精确, 因而还未能定量地验证由(10)式或者(11)式给出的场流关系式.

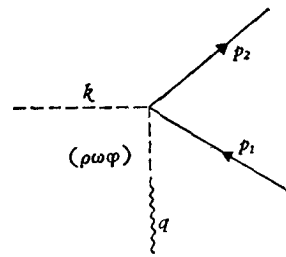


图 2

**附记** 在本文完成后, 看到 A. Stetz 等人 [*Phys. Rev. Letters*, **33** (1974), 1455] 所做的一个新实验, 测得  $\gamma = 0.15 \pm 0.11$ ,  $\gamma = -2.07 \pm 0.11$  的数值. 此外, 还看到近来实验上已倾向于否定  $A_1$  介子的存在 [因为这一“粒子”的相移并未越过  $90^\circ$ , 参看 F. Wagner, *Meson Spectroscopy*, 17th International Conference on High Energy Physics]. 这样, 在场流关系式中将自动地不出现这一项, 因而  $a(0) = 0$ , 理论上将给出  $\gamma = 0$ , 这与  $\gamma = 0.15 \pm 0.11$  的实验结果相近.

## 参 考 文 献

- [1] T. D. Lee, S. Weinberg, B. Zumino, *Phys. Rev. Letters*, 18 (1967), 1209.  
 [2] 何祚麻、黄涛, 物理学报, 23 (1974), 408.  
 [3] 郭硕鸿, 物理学报, 16 (1960), 297.  
 [4] V. G. Vaks, B. L. Ioffe, *Nuovo. Cim.*, 10 (1958), 342; S. A. Bludman, J. A. Young, *Phys. Rev.*, 118 (1960), 602; N. Cabibbo, *Nuovo. Cim.*, 11 (1959), 837.  
 [5] D. E. Neville, *Phys. Rev.*, 124 (1961), 2037.  
 [6] P. Depommier *et al.*, *Phys. Letters*, 7 (1963), 285.  
 [7] T. Das, V. S. Mathur, S. Okubo, *Phys. Rev. Letters*, 19 (1967), 859.  
 [8] S. Weinberg, *Phys. Rev. Letters*, 18 (1967), 507.  
 [9] 同文献 [4].  
 [10] C. H. Llewellyn Smith, *Ann. of Phys.*, 53 (1969), 521.  
 [11] T. Das *et al.*, *Phys. Rev. Letters*, 19 (1967), 1067.  
 [12] 中国科学院数学研究所理论物理研究室, 原子能, 7-8 (1966), 498.

## FIELD-CURRENT IDENTITY AND DECAY OF THE PROCESS

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$$

HE ZUO-XIU      HUANG TAO

*(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)*

## ABSTRACT

This article calculates the radiative decay process  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu + \gamma$  of the  $\pi^+$  meson, by employing the field-current identity of the axial vector current which may be deduced from field algebra theory or the quantum theory of composite fields. The theoretical calculations are compatible with experimental results.