

瞬时相互作用近似下介子结构 波函数的一些探讨 (II)

赝标介子和矢量介子的谐振子模型*

北京大学物理系基本粒子理论组¹⁾

提 要

本文在文献[1]基础上讨论由一对正反层子组成的介子结构波函数。假定层子质量很重,相互作用是谐振子位阱,旋量耦合方式符合一定的要求,则可以普遍给出以下结果:(1)自动给出质量谱的平方等距关系,又可以避免通常谐振子基态能级过高的困难;(2)如果层子原始弱流为 V-A 型,层子原始电磁流无反常磁矩项,可以解决赝标介子二体轻子衰变 Cabibbo 角的不谐调和矢量介子衰变到 e^+e^- 几率比的困难;(3)只要在相互作用中引入很小比例的 $SU(3)$ 破坏项,就足以解释现有介子质量的 $SU(3)$ 分裂。这就对为什么 $K-\pi$ 质量差 3.5 倍却在许多情况下表现有相当好的 $SU(3)$ 对称性给以一个合理解释;(4)方程的展开和波函数都有较好的近似性;(5)介子中层子反层子分布半径与现有关于介子电磁半径的实验量级是可以谐调的;(6)介子结构波函数的旋量结构和动量结构都是完全确定的。

一、谐振子模型

在研究强子结构模型时,有两个基本实验规律性特别重要:

1. $SU(6)$ 对称性给出强子分类较好,特别是 0^- 介子与 1^- 介子组成 **35** 维表示, $1^{+}/2$ 重子与 $3^{+}/2$ 重子组成 **56** 维表示。

2. 强子质量平方满足 Regge 线性关系,并且斜率接近相等。

在下面的讨论中将看到,按照层子模型的观点,强子的 $SU(6)$ 分类对有效相互作用的旋量耦合形式的选取加了很强的限制,而 Regge 线性关系则由有效相互作用位势的空间分布形式所决定。

质量谱的 Regge 线性关系唯象地相当于降低了的谐振子谱,如用三维谐振子谱形式表出,介子质量平方可表为

$$m^2 = -C + \left(n + \frac{3}{2}\right) \omega. \quad (1.1)$$

对于 π 和 B 定出

$$C_{0^-} = 2.24\text{GeV}^2, \quad \omega_{0^-} = 1.506\text{GeV}^2. \quad (1.2)$$

对于 ρ 和 δ , A_1 , A_2 , g 如果扣除 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ 耦合,定出

* 1974 年 10 月 10 日收到。

1) 参加本工作的有胡宁、高崇寿、秦旦华、黄朝商等同志。

$$C_{1^-} = 0.699\text{GeV}^2, \quad \omega_{1^-} = 0.856\text{GeV}^2. \quad (1.3)$$

考虑到质量谱的谐振子特征, 我们讨论如下的介子结构模型: 介子是由层子与反层子组成的束缚态, 层子质量 M 远大于介子质量 m ; 层子与反层子结合成介子的超强相互作用在质心系可以近似等效成一个球对称对角耦合的瞬时相互作用; 其等效势是一个平底深位阱, 在研究基态和低激发态时, 波函数主要集中于中心附近较小区域内, 等效势可以用位阱中心深度加一个谐振子位势

$$-A + Br^2 \quad (1.4)$$

来近似描写而略去位势的更高幂次修正.

下面我们将利用文献[1]中给出的普遍方法进行讨论.

二、 0^- 介子的波函数

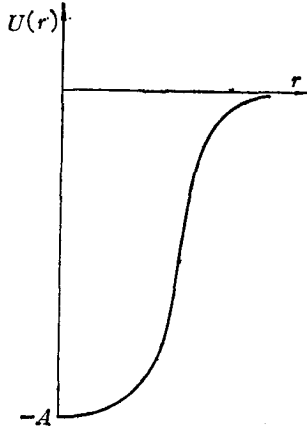


图 1

文献[1]中已给出 0^- 介子波函数所满足的 B-S 方程最后归结为

$$\left(2E^2 - \frac{M^2}{E} U^A + \frac{1}{E} \mathbf{p} V^T \cdot \mathbf{p}\right) \left(2 - \frac{1}{E} U^P\right) \varphi_1 = m^2 \varphi_1. \quad (2.1)$$

按(1.4)式, 各位势可写作:

$$U^P = A^P - B^P r^2, \quad U^A = A^A - B^A r^2, \quad V^T = A^T - B^T r^2, \quad (2.2)$$

其中 $E = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$, 诸 A 至少是 M 的量级, 诸 $B r^2 \ll M$, $|\mathbf{p}| \ll M$. 对方程按 \mathbf{p}^2/M^2 及 $B r^2/M$ 作小量展开, 取至含 \mathbf{p}^2 和 $B r^2$ 的一次项, 可以得到方程

$$(\alpha \mathbf{p}^2 + \beta r^2) \varphi_1 = [m^2 - (2M - A^P)(2M - A^A)] \varphi_1, \quad (2.3)$$

其中

$$\alpha = 4 + (A^A - A^P + 2A^T) \frac{1}{M} - (A^A + A^T) A^P \frac{1}{M^2}, \quad (2.4)$$

$$\beta = 2M(B^A + B^P) - A^A B^P - A^P B^A.$$

这个方程数学结构上相当于一个谐振子的薛定谔方程. 但是要强调的是, 它并不是 0^- 介子满足的方程的非相对论极限. 事实上, 在这个方程中作为本征值出现的并不是系统在质心系的总能量(介子质量 m)或结合能, 而是 $(m^2 - (2M - A^P)(2M - A^A))$. 由于现在是强耦合, 波函数所满足的方程将没有通常意义下的非相对论极限.

(2.3) 式的本征值给出

$$m^2 = (2M - A^P)(2M - A^A) + \left(n + \frac{3}{2}\right) \omega, \quad (2.5)$$

其中

$$\omega = 2 \sqrt{\alpha \beta}. \quad (2.6)$$

基态 $n = 0$ 的本征函数为

$$\varphi_1 = e^{-\frac{\alpha}{\omega} \mathbf{p}^2}, \quad (2.7)$$

它对应于 0^- 介子的解.

下面对各种耦合分类进行讨论. 为方便起见, 引入符号 $a^i = 2M - A^i$, $a'^i = 2M - A'^i$.

1. $\alpha^P = \alpha^A$ 情形

这时质量谱为

$$m^2 = (a^P)^2 + \left(n + \frac{3}{2}\right) \omega,$$

不能满足 (1.1)–(1.3) 式的要求. 物理上反映了基态介子质量过高, 不符合实验. 标量耦合属于这类, 因此有效相互作用不能是纯标量耦合.

如果要质量谱符合实验, 必须要

$$a^P a^A = -C_0. \quad (2.8)$$

这要求 a^P 与 a^A 或者同为 GeV 量级, 或者一个大于 GeV 量级, 一个小于 GeV 量级. 我们再分三种情形讨论.

2. $\alpha^P \approx 0, \alpha^A \gg \omega$ 情形

这时由 (2.4) 和 (2.6) 式给出

$$\alpha = \frac{a^A}{M}, \quad \beta = a^A B^P, \quad \omega = 2a^A \sqrt{\frac{B^P}{M}}, \quad (2.9)$$

并要求

$$a^A > 0, \quad a^P \leq 0.$$

解出波函数为

$$\varphi_1(\mathbf{p}) = e^{-\frac{a^A}{M\omega} \mathbf{p}^2}, \quad \varphi_4(\mathbf{p}) = \frac{m}{a^A} \varphi_1(\mathbf{p}). \quad (2.10)$$

3. $\alpha^A \approx 0, \alpha^P \gg \omega$ 情形

这时由 (2.4) 和 (2.6) 式给出

$$\alpha = \frac{a^P}{M} \left(5 - \frac{a'^T}{M}\right), \quad \beta = a^P B^A, \quad (2.11)$$

$$\omega = 2a^P \sqrt{\frac{B^A}{M} \left(5 - \frac{a'^T}{M}\right)},$$

并要求

$$a^P > 0, \quad a^A \leq 0, \quad 5 - \frac{a'^T}{M} > 0.$$

解出波函数得

$$\varphi_1(\mathbf{p}) = e^{-\frac{a^P}{M\omega} \left(5 - \frac{a'^T}{M}\right) \mathbf{p}^2}, \quad (2.12)$$

$$\varphi_4(\mathbf{p}) = \frac{m}{a^P} \varphi_1(\mathbf{p}).$$

4. a^P 与 a^A 均为 GeV 量级且互相反号的情形

这时近似有^[1]

$$\varphi_4(\mathbf{p}) = \frac{1}{m} \left(a^P + \frac{\mathbf{p}^2}{M} + B^P r^2 \right) \varphi_1(\mathbf{p}).$$

由于 a^P , \mathbf{p}^2/M , $B^P r^2$ 是同量级量, 不能把后两者忽略, 因此 φ_4 与 φ_1 的函数形式将不相同, 不像在 2, 3 两情形中它们函数形式相同而只差一个常数因子. 此外, 当 a^P 和 a^A 等参数有所变化时, φ_4 和 φ_1 函数形式之间的关系就要敏感地变化. 因此, 用这样的波函数来进行计算时, 所得的结果对位势参数的选取将是敏感的. 在前两类情形中, 位势参数值有所变化时并不影响 φ_4 与 φ_1 函数形式相同, 只是所差常数因子有所变化.

作为一个唯象模型给出的波函数, 要使和实验比较能给出有意义的结果, 应该对参数的选择有一定的稳定性. 从这点来看, 2, 3 两类情形是值得进一步讨论的.

在过去层子模型的工作中, 用 Bargmann-Wigner 型波函数讨论 0^- 介子二体轻子衰变时, 得到的 Cabibbo 角比三体半轻子衰变得到的大了约一倍^[2]. 当时的分析表明, 而且 Weisskopf 也曾指出^[3], 如果层子的原始弱流为 V-A 型, 并且假定波函数零点值的平方正比于介子物理质量, 这个困难可以解决. 分别考察上述 2, 3 两种情形, 考虑到规一化的要求, 结果表明第 2 种情形自然解决了这个困难, 而第 3 种情形得出的 Cabibbo 角还要加大.

三、对 0^- 介子波函数的一些讨论

综上所述, 从和实验对比来看, 相互作用的耦合形式更可能是属于 $a^P \lesssim 0$, $a^A \gg \omega$ 的类型. 下面从这种类型出发再作一些讨论.

1. 关于介子质量谱的 $SU(3)$ 分裂

π 介子与 K 介子的质量相差约 3.5 倍, 但为什么在许多情形下却表现出相当好的 $SU(3)$ 近似对称性, 这是一个早已为人们所重视但还未很好解释的问题.

我们假定质量谱的 $SU(3)$ 分裂是由于层子与反层子有效相互作用势有一个微小的破坏 $SU(3)$ 的 T_{33} 修正项引起的. 这样由 (2.8) 和 (2.9) 式得到

$$\omega_\pi \approx \omega_K, \\ m_K^2 - m_\pi^2 \approx a_K^P a_K^A - a_\pi^P a_\pi^A \approx (a_K^P - a_\pi^P) a^A.$$

由于 a^A 量级大于 $\sqrt{\omega} \sim \text{GeV}$, $m_K^2 - m_\pi^2 \approx 0.22 \text{GeV}^2$, 因此 $a_K^P - a_\pi^P$ 量级将小于 0.1GeV . 例如 $a^A > 11 \text{GeV}$, 则 $a_K^P - a_\pi^P < 20 \text{MeV}$. $a_K^P - a_\pi^P$ 反映了 $SU(3)$ 分裂所造成的位势修正, 考虑到位势的量级大于 $\sqrt{\omega}$ (一般说来是 M 的量级), 因此 $SU(3)$ 分裂部分只是位势的一个很小的修正. 这就从结构模型的观点说明了为什么尽管 K 介子与 π 介子质量差 3.5 倍却在许多情况下表现出相当好的 $SU(3)$ 对称性.

2. 介子中层子分布半径

由 (2.3), (2.5) 和 (2.9) 式给出

$$\langle \mathbf{p}^2 \rangle = \frac{M}{a^4} \frac{3}{4} \omega, \quad \langle r^2 \rangle = 3 \frac{a^4}{M \omega}, \quad (3.1)$$

ω 可由质量谱实验来确定, $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$ 和 $\langle r^2 \rangle$ 完全由位势参量与层子质量之比

$$\frac{a^4}{M} = 2 - \frac{A^4}{M}$$

决定. 层子分布的均方根半径为

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4}{M} \frac{3}{\omega}}. \quad (3.2)$$

如以 $\omega_{0^-} \approx 1.5 \text{ GeV}^2$ 来估计得

$$R \approx 0.14 \sqrt{\frac{a^4}{M}} \text{ Fermi.}$$

实验观察到的介子电磁半径除了由介子中层子分布的贡献外, 还应有光子反冲的贡献和可能存在的某种“云”的贡献, 因此一般说来介子中层子分布半径应小于介子的电磁半径.

3. 方程近似程度的估计

在导出 (2.3) 式时, 我们利用了少量展开条件

$$\frac{\mathbf{p}^2}{M^2} \ll 1, \quad \frac{B r^2}{M} \ll 1.$$

从 (3.1) 式得到

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{M^2} \right\rangle = \left\langle \frac{B^2 r^2}{M} \right\rangle = \frac{3}{4} \frac{\omega}{M a^4}. \quad (3.3)$$

这说明, 在对方程作少量展开时略去的项比保留的最后项小 $\frac{3}{4} \frac{\omega}{M a^4}$ 的量级. 因此只要

$$M a^4 \gg \frac{3}{4} \omega, \quad (3.4)$$

所作展开就是合理的. (3.4) 式与我们引入的假定是自洽的. 在层子质量和位势参量 a^4 已知时, 可以用 (3.3) 式来估计方程的近似程度.

四、矢量介子波函数和 $SU(6)$

文献[1]给出在瞬时相互作用近似下 1^- 介子三维波函数为

$$\begin{aligned} \phi_P(\mathbf{p}) = & i \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}}{M} \varphi_3 + \left(-\mathbf{e} \varphi_3 + \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{p}}{M^2} \varphi_4 \right) \cdot \boldsymbol{\gamma} \\ & + i \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{p}}{M} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 \varphi_6 + \left(\mathbf{e} \varphi_6 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{M^2} \varphi_5 \right) \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma_4. \end{aligned} \quad (4.1)$$

按文献[1]中给出的定义, 1^- 介子顶角函数为

$$\Gamma_P(\mathbf{p}) = i g_s + \mathbf{g}_V \cdot \boldsymbol{\gamma} + i \mathbf{g}_A \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 + \mathbf{g}_T \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma_4, \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} g_s &= \frac{1}{2\pi i} V^s \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}}{M} \varphi_3, \quad g_v = \frac{1}{2\pi i} U^v \left(-\mathbf{e} \varphi_3 + \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{p}}{M^2} \varphi_4 \right), \\ g_A &= \frac{1}{2\pi i} V^A \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}}{M} \varphi_6, \quad g_T = \frac{1}{2\pi i} U^T \left(\mathbf{e} \varphi_6 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{M^2} \varphi_5 \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

φ 与 g 的关系为

$$\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}}{M} \varphi_3 = \frac{2\pi i}{E(4E^2 - m^2)} (-2\mathbf{p}^2 g_s - 2M \mathbf{g}_v \cdot \mathbf{p} + m \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{p}). \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{e} \varphi_3 + \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{p}}{M^2} \varphi_4 &= \frac{2\pi i}{E(4E^2 - m^2)} \\ &\times (2M \mathbf{p} g_s + 2E^2 \mathbf{g}_v - 2\mathbf{g}_v \cdot \mathbf{p} \mathbf{p} - m \mathbf{g}_A \times \mathbf{p} - m M \mathbf{g}_T). \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{p}}{M} \varphi_6 &= \frac{2\pi i}{E(4E^2 - m^2)} \\ &\times (-m \mathbf{g}_v \times \mathbf{p} - 2\mathbf{p}^2 g_A + 2\mathbf{g}_A \cdot \mathbf{p} \mathbf{p} + 2M \mathbf{g}_T \times \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \varphi_6 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{M} \varphi_5 &= \frac{2\pi i}{E(4E^2 - m^2)} \\ &\times (-m \mathbf{p} g_s - m M \mathbf{g}_v + 2M \mathbf{g}_A \times \mathbf{p} + 2M^2 \mathbf{g}_T + 2\mathbf{g}_T \cdot \mathbf{p} \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中(4.4)和(4.6)式分别可由(4.5)和(4.7)式导出,因此只要将(4.3)式代入(4.5)和(4.7)式即得 1^- 介子波函数的联立方程. 对于这一组方程原则上也可像 0^- 介子方程类似地讨论. 但由于现在是 4 个函数 $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ 的联立方程, 并且方程是矢量形式出现, 讨论起来远为复杂. 在本文中, 暂不讨论 1^- 介子方程的一般求解问题, 而是从基态 $SU(6)$ 对称性的要求进行一些讨论.

实验上, 显示 0^- 介子和 1^- 介子可以很好地按 $SU(6)$ 进行分类. 按照 $SU(6)$ 的观点, 它们分别是层子与反层子的 1S_0 和 3S_1 束缚态, 这表现为它们结构波函数的大分量应代表 S 波, 即是球对称的. 前面讨论的 0^- 介子波函数显然是符合这个要求的. 对于 1^- 介子, 大分量只能是 φ_3 或 φ_6 . $SU(6)$ 对称性还要求 1^- 介子波函数所满足的方程与 0^- 介子波函数所满足的方程形式相似, 波函数的形式亦应相似, 这样与 0^- 介子 φ_1 是大分量对应, 1^- 介子应为 φ_3 和 φ_6 两者之一的大分量. 符合上述要求的耦合形式为下两类情形:

$$1. \quad a^v \lesssim 0, \quad a^v > 0, \quad a^{v^2} \gg \omega_{1^-}, \quad A'^A \approx -2M. \quad (4.8)$$

这时 φ_6 是大分量, $\varphi_3 = \frac{m}{a^v} \varphi_6$.

$$2. \quad a^v \lesssim 0, \quad a^v > 0, \quad a^{v^2} \gg \omega_{1^-}, \quad A'^s \approx -2M. \quad (4.9)$$

这时 φ_3 是大分量, $\varphi_6 = \frac{m}{a^v} \varphi_3$.

如果原始层子电磁流没有反常磁矩项, 则在 $1^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$ 衰变中起作用的是 $\chi(0) = \int \varphi_3 d^3\mathbf{p}$. 考虑到规一化的要求, 得到

$$\Gamma(\rho^0 \rightarrow e^+e^-) : \Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-) : \Gamma(\varphi \rightarrow e^+e^-)$$

$$= \begin{cases} \frac{9}{m_\rho} : \frac{1}{m_\omega} : \frac{2}{m_\phi} & (4.8) \text{ 式情形,} \\ \frac{9}{m_\rho^3} : \frac{1}{m_\omega^3} : \frac{2}{m_\phi^3} & (4.9) \text{ 式情形.} \end{cases}$$

与现有实验比较, (4.9) 式情形不符合, (4.8) 式情形近似符合, 特别是它比过去用 Bargmann-Wigner 型波函数给出的结果大大改进. 因此层子与反层子之间的有效相互作用势可能是属于

$$\begin{aligned} a^P \lesssim 0, a^A > 0, a^{A'} \gg \omega_0^-, M a^A \gg \omega_0^-; \\ a^T \lesssim 0, a^V > 0, a^{V'} \gg \omega_1^-, M a^V \gg \omega_1^-, A'^A \approx -2M \end{aligned} \quad (4.10)$$

的某种耦合.

五、结 论

在本文中, 我们考虑了如下的介子结构模型: (1) 介子是层子与反层子的束缚态, 层子质量远大于介子质量; (2) 在质心系层子反层子间相互作用 (超强) 可以近似等效成球对称对角耦合瞬时相互作用; (3) 位势为 (1.4) 式形式, 耦合方式为符合 (4.10) 式的某种耦合. 则普遍给出以下结果:

1. 自动给出质量谱的平方关系, 并且可以给出符合实验要求的质量平方 Regge 线性关系.

2. 如果层子原始弱流为 V-A 型, 层子原始电磁流无反常磁矩项, 可以解决 0^- 介子二体轻子衰变 Cabibbo 角的困难和 $1^- \rightarrow e^+e^-$ 衰变几率比的困难.

3. 只要在相互作用中引入占很小比例的 $SU(3)$ 的 T_{33} 破坏项, 就足以解释现有介子的 $SU(3)$ 质量分裂. 这就对为什么 $K-\pi$ 质量差 3.5 倍却在许多情况下表现有相当好的 $SU(3)$ 对称性给以一个合理的结构模型微扰论观点的解释.

4. 方程的近似展开和波函数都有较好的近似性.

5. 介子中层子反层子分布半径与耦合方式有简单关系, 并且从物理上与现有关于介子电磁半径的实验量级是可以协调的.

6. 波函数 (在质心系) 的旋量结构和动量结构都是完全确定的, 可以用来讨论介子的静态性质和质心系过程.

能够符合 (4.10) 式要求的耦合形式很多, 它们都能给出上述结果, 究竟应为哪一种耦合形式, 需要进一步研究其它过程和实验的比较来确定.

参 考 文 献

- [1] 北京大学物理系基本粒子理论组, 物理学报, **25** (1976), 316.
- [2] 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组, 原子能, **3** (1966), 151.
- [3] R. Van Royen, V. F. Weisskopf, *Nuovo Cimento*, **50A** (1967), 617.

**SOME DISCUSSIONS OF THE STRUCTURE WAVE FUNCTIONS
OF MESONS IN THE APPROXIMATION OF
INSTANTANEOUS INTERACTION (II)
THE HARMONIC OSCILLATOR MODEL OF PSEUDO-SCALAR
AND VECTOR MESONS**

ELEMENTARY PARTICLE THEORY GROUP, DEPARTMENT OF
PHYSICS, BEIJING UNIVERSITY

ABSTRACT

On the basis of our previous report this paper discusses the structure wave functions of mesons formed from a straton and anti-straton pair. We assume that the straton is very heavy and that the interaction is the potential of a harmonic oscillator. Provided the spinor type coupling satisfies certain conditions then the following general results are obtained: (1) The equal spacing relation of the squared mass levels are obtained automatically, and at the same time the usual difficulty of too high energy values for the ground states is avoided; (2) If the intrinsic weak current of the straton is of the $V-A$ type, and also if its intrinsic electro-magnetic current contains no anomalous magnetic moment, then the inconsistency in the Cabibbo angle for the two body lepton decay of the pseudo-scalar meson and the difficulty in explaining the branching ratios of e^+e^- decay of various vector mesons may be avoided; (3) A very small $SU(3)$ violation term is sufficient to explain the observed $SU(3)$ mass breaking of mesons. This gives a reasonable explanation why the mass of K is 3.5 times that of the pion while $SU(3)$ symmetry is still manifested in many situations; (4) The expansion of the equation with respect to \mathbf{p}^2/M^2 gives fairly good approximation; (5) The radius of distribution of the straton and anti-straton is compatible in order of magnitude with the observed electro-magnetic radius of the meson; (6) The spinor and momentum structures of the structure wave functions are completely determined by the theory.