第25卷 第5期 物理学报 Vol. 25, No. 5
1976年9月 ACTA PHYSICA SINICA Sept., 1976

原子核的单粒位阱(I)*

一个定理

吴式枢
(吉林大学物理系)

提要

本文证明了一个定理并讨论了它的一些应用. 定理给出了单粒子能量与分离能的严格关系.

一、引言

对某一个选定的单粒位阱 $\boldsymbol{u}$, 由本征方程

$$\boldsymbol{h}|\alpha\rangle = (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{u})|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle \tag{1}$$

求得的单粒子能量 ε_α 和 $(N \pm 1)$ 核的能量本征值 $E_n(N \pm 1)$ 之间的关系是一个有实际物理意义的问题. 四十年前, Koopmans[1] 在 Hartree-Fock (简写 HF) 近似的基础上曾证明: 如果忽略由增加或者减少一个粒子而引起的单粒子波函数的改变 (称为轨道变位修正), 则

$$(\varepsilon_\alpha)_{\mathrm{HF}} = \pm [E_{n_\alpha}(N \pm 1) - E_0(N)]_{\mathrm{HF}}. \tag{2}$$

上式中当 α 为粒子态时取上面的符号, 为空穴态时取下面的符号; $E_0(N)$ 为满壳核(粒子数为 N) 基态的能量本征值, 脚标 HF 表示按照 HF 近似计算得到的结果. 由于真实的核力具有强排斥心, 这时HF近似不适用. 最近 Becker 与 Patterson[2] 推广了上述 Koopmans 定理并证明了以下结论: 倘若忽略轨道变位修正, 则有

$$(\varepsilon_\alpha)_{\mathrm{RBHF}} = \pm [E_{n_\alpha}(N \pm 1) - E_0(N)]_{\mathrm{RBHF}}, \tag{3}$$

式中脚标 RBHF 表示按重整化了的 Brueckner-Hartree-Fock 近似求得的结果. 我们的结论和 (2), (3) 式的区别在于: 倘若 $\boldsymbol{u}$ 满足第二节中所述定理的条件, 则严格地有

$$\varepsilon_\alpha = \pm [E_{n_\alpha}(N \pm 1) - E_0(N)], \tag{4}$$

其中 $E_0(N)$ 与 $E_{n_\alpha}(N \pm 1)$ 分别表示满壳核基态与 $(N \pm 1)$ 核的严格能量本征值. 文中第二节将给出定理的内容及其证明. 第三节将讨论定理的一些应用.

鉴于 (4) 式, 我们将要求 ε_α 是实的, 但允许 $\boldsymbol{u}$ 是非厄米的. 为此, 同时也为了阐明文中所用的符号, 这里将先对时间有关的摄动理论作一个简短的注记. 文中希腊字母表示粒子或者空穴态, 拉丁字母 $p, p', \cdots (h, h', \cdots)$ 表示粒子(空穴)态. 体系的哈密顿量可以写为

* 1975年2月26日收到.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1,\\
&\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U}=\sum_a(\boldsymbol{t}_a+\boldsymbol{u}_a)=\sum_a\boldsymbol{h}_a,\\
&\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{V}-\boldsymbol{U}=\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\boldsymbol{v}_{ab}-\sum_a\boldsymbol{u}_a,
\end{aligned}\tag{5}
$$

其中 $\boldsymbol{h}_a$ 表示粒子 a 的哈密顿量，$\boldsymbol{v}_{ab}$ 为粒子 a 与 b 之间的二体相互作用．引入以下双正交系[3]：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}|\alpha\rangle=\varepsilon_\alpha|\alpha\rangle,\\
&\boldsymbol{h}^+|\bar{\alpha}\rangle=\varepsilon_\alpha^*|\bar{\alpha}\rangle=\varepsilon_\alpha|\bar{\alpha}\rangle,\\
&\langle\bar{\alpha}|\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}\tag{6}
$$

令 ξ_α^+ 与 $\bar{\xi}_\alpha^+$ 分别表示态 $|\alpha\rangle$ 与 $|\bar{\alpha}\rangle$ 的产生算符．容易证明[4]，它们满足下述反交换关系：

$$
\begin{aligned}
&\{\xi_\alpha^+,\xi_\beta^+\}=\{\bar{\xi}_\alpha,\bar{\xi}_\beta\}=0,\\
&\{\xi_\alpha^+,\bar{\xi}_\beta\}=\delta_{\alpha\beta};
\end{aligned}\tag{7}
$$

而且 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_1$ 可以写为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{H}_0=\sum_\alpha\varepsilon_\alpha\xi_\alpha^+\bar{\xi}_\alpha,\\
&\boldsymbol{H}_1=\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}v_{\alpha\beta,\gamma\delta}\xi_\alpha^+\xi_\beta^+\bar{\xi}_\delta\bar{\xi}_\gamma-\sum_{\alpha\gamma}u_{\alpha\gamma}\xi_\alpha^+\bar{\xi}_\gamma,
\end{aligned}\tag{8}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&v_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\langle\bar{\alpha}\bar{\beta}|\boldsymbol{v}|\gamma\delta\rangle-\langle\bar{\alpha}\bar{\beta}|\boldsymbol{v}|\delta\gamma\rangle,\\
&u_{\alpha\gamma}=\langle\bar{\alpha}|\boldsymbol{u}|\gamma\rangle.
\end{aligned}\tag{9}
$$

满壳核基态的零级近似波函数可以取为 $|\phi_0\rangle=\prod_{\alpha=1}^{N}\xi_\alpha^+|0\rangle$．显然，$\boldsymbol{H}_0|\phi_0\rangle=E_G^0|\phi_0\rangle$ $\left(E_G^0=\sum_{\alpha=1}^{N}\varepsilon_\alpha\right)$，且 $|\phi_0\rangle$ 应是 $\boldsymbol{H}_0$ 的一个非退化解．对应地有 $|\bar{\Phi}_0\rangle=\prod_{\alpha=1}^{N}\bar{\xi}_\alpha^+|0\rangle$，$\boldsymbol{H}_0^+|\bar{\Phi}_0\rangle=E_G^{0*}|\bar{\Phi}_0\rangle$．令

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0)&=e^{iH_0t}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0t_0}\\
&=\sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{(-i)^\rho}{\rho!}\int_{t_0}^{t}\cdots\int dt_1\cdots dt_\rho\mathrm{T}\{H_1(t_1)\cdots H_1(t_\rho)\},\\
\bar{U}(t,t_0)&=e^{iH_0^+t}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0^+t_0}=U^+(t_0,t),
\end{aligned}\tag{10}
$$

其中 $H_1(t)=e^{iH_0t}\boldsymbol{H}_1e^{-iH_0t}$．容易求得

$$
\begin{aligned}
&\xi_\alpha^+(t)=e^{iH_0t}\xi_\alpha^+e^{-iH_0t}=\xi_\alpha^+e^{i\varepsilon_\alpha t},\\
&\bar{\xi}_\alpha(t)=e^{iH_0t}\bar{\xi}_\alpha e^{-iH_0t}=\bar{\xi}_\alpha e^{-i\varepsilon_\alpha t}.
\end{aligned}\tag{11}
$$

此外，当计算涉及 $t(t_0)=\pm\infty$ 时，将引进绝热近似，即以 $H_1(t)e^{-\eta|t|}$ 代替 $H_1(t)$，积分后再取极限 $\eta\to0^+$．不难检验，满壳核基态波函数 $|\Psi_0\rangle$ 的严格表达式可以写作如下形式：

$$
\lambda|\Psi_0\rangle=\frac{U(0,\pm\infty)|\phi_0\rangle}{\langle\bar{\Phi}_0|U(0,\pm\infty)|\phi_0\rangle},\tag{12·1}
$$

$$
=\frac{\bar{U}(0,\pm\infty)|\bar{\Phi}_0\rangle}{\langle\phi_0|\bar{U}(0,\pm\infty)|\bar{\Phi}_0\rangle},\tag{12·2}
$$

其中 λ 为归一化常数．(12.2) 式指出，因为 $\boldsymbol{H}$ 还可写为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0^++\boldsymbol{H}_1^+$，所以代替 $|\phi_0\rangle$

也可将 $|\bar{\Phi}_0\rangle$ 取为 $|\Psi_0\rangle$ 的零级近似．这两种选择是完全等价的，下面将约定选取前者．格林函数的定义和 $\boldsymbol{u}$ 是厄米时相同，例如，对于单粒子格林函数 $G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)$ 有

$$G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)=\langle\Psi_0|\mathrm{T}\{\boldsymbol{\xi}_\alpha(t_1)\boldsymbol{\xi}^+_\beta(t_2)\}|\Psi_0\rangle. \tag{13}$$

这里，$\boldsymbol{\xi}(t)=e^{iHt}\xi e^{-iHt}$．应用 (10) 与 (12) 式可以证明，$G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)$ 的摄动理论计算公式为

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)&=\frac{\langle\bar{\Phi}_0|\mathrm{T}\{U(\infty,-\infty)\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi^+_\beta(t_2)\}|\phi_0\rangle}{\langle\bar{\Phi}_0|U(\infty,-\infty)|\phi_0\rangle}\\&=\langle\bar{\Phi}_0|\mathrm{T}\{U(\infty,-\infty)\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi^+_\beta(t_2)\}|\phi_0\rangle_L,\end{aligned} \tag{14}$$

其中 L 表示只向相连图求和．由 (7)，(8) 与 (11) 式不难看出，计算 (14) 式时，Wick 定理同样适用，费曼图的画法与计算规则和 $\boldsymbol{u}$ 是厄米时完全相同，如 Schäfer[4] 已指出的那样，只须注意，对应于厄米时的 ξ_α, ξ^+_α, $|\alpha\rangle$ 与 $\langle\alpha|$ 现为 $\bar{\xi}_\alpha$, ξ^+_α, $|\alpha\rangle$ 与 $\langle\bar{\alpha}|$；这点也是很自然的，因为按 (7) 式，态 $|\alpha\rangle$ 的消灭算符为 $\bar{\xi}_\alpha$．例如，我们有以下收缩关系：

$$\begin{aligned}\overbrace{\xi^+_\alpha(t_1)\xi^+_\beta}(t_2)&=\overbrace{\bar{\xi}_\alpha(t_1)\bar{\xi}_\beta}(t_2)=0,\\\overbrace{\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi^+_\beta}(t_2)&=\langle\bar{\Phi}_0|\mathrm{T}\{\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi^+_\beta(t_2)\}|\phi_0\rangle\\&=G^0_{\alpha\beta}(t_1-t_2)=\delta_{\alpha\beta}G^0_\alpha(t_1-t_2)\\&=\delta_{\alpha\beta}[\theta(t_1-t_2)-n_\alpha]\,e^{-i\varepsilon_\alpha(t_1-t_2)},\end{aligned} \tag{15}$$

其中按 $\alpha=p$ 或者 h, n_α 的取值为 0 或者 1；

$$\theta(t_1-t_2)=\begin{cases}1 & t_1>t_2,\\0 & t_1\leqslant t_2.\end{cases}$$

显然，厄米算符在双正交系表象里仍是厄米的．例如，对于总粒子数算符有

$$\mathscr{N}=\sum_\alpha\xi^+_\alpha\bar{\xi}_\alpha=\sum_\alpha\bar{\xi}^+_\alpha\xi_\alpha=\mathscr{N}^+.$$

但是，容易看出，对应于“$|\phi_0\rangle$-选择”表达式 $\mathscr{N}=\sum\limits_\alpha\xi^+_\alpha\bar{\xi}_\alpha$ 将更方便，而对应于“$|\bar{\Phi}_0\rangle$-选择” $\mathscr{N}^+=\sum\limits_\alpha\bar{\xi}^+_\alpha\xi_\alpha$ 却更方便．由于 $[\mathscr{N},H_0]=[\mathscr{N},H_1]=0$，计算中粒子数无疑将保持守恒．我们看到，当 $\boldsymbol{u}$ 是非厄米时，虽然为了引进双正交系需要同时求解两个非厄米的单粒子本征方程[参看 (6) 式]，但是在引进了双正交系后，摄动理论的公式演算却并不比 $\boldsymbol{u}$ 是厄米时更为复杂．因此倘若 $\boldsymbol{u}$ 的非厄米选择对于解决某些具体问题能带来其它的简化[见后]或者克服一定的困难时，则它应是一个值得进一步考虑的选择．显然，上述双正交系表象概括了 $\boldsymbol{u}$ 是厄米的情形，因为这时 $\boldsymbol{h}^+=\boldsymbol{h}$，所以只须令 $\bar{\xi}_\alpha=\xi_\alpha$, $\langle\bar{\alpha}|=\langle\alpha|$ 就得到有关厄米的结果．

二、定理及其证明

本节将首先叙述定理的内容并给出其证明，然后对定理中的条件再作一些进一步的说明．

定理　设单粒位阱 $\boldsymbol{u}$ 满足以下条件：

1) $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在[1]. $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 为可约质量算符,其定义为

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}+\sum_{\rho}[u-M(\omega)]_{\alpha\rho}G_{\rho}^{0}(\omega)[u-M(\omega)]_{\rho\beta}$$
$$+\sum_{\rho\lambda}[u-M(\omega)]_{\alpha\rho}G_{\rho}^{0}(\omega)[u-M(\omega)]_{\rho\lambda}G_{\lambda}^{0}(\omega)[u-M(\omega)]_{\lambda\beta}+\cdots, \tag{16}$$

其中 $M(\omega)$ 表示质量算符, $G_{\alpha\beta}^{0}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}G_{\alpha}^{0}(\omega)$ 为单粒子格林函数 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 的零级近似.

2) 至少存在有一个 $\beta(\beta\neq\alpha)$ 使 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha})\neq 0$ 或 $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}(\varepsilon_{\alpha})\neq 0$[2]; 或者 $1-\mathfrak{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_{\alpha})\neq 0$ $\left\{\mathfrak{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_{\alpha})\equiv\left[\frac{d}{d\omega}\mathfrak{M}_{\alpha\alpha}(\omega)\right]_{\omega=\varepsilon_{\alpha}}\right\}$,即以上三个不等式中至少有一个成立时,则必有 (4) 式.

证明很简单. 大家熟知, $G_{\alpha\beta}(t=t_1-t_2)$ 满足以下 Dyson 方程:

$$G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)=\delta_{\alpha\beta}G_{\alpha}^{0}(t_1-t_2)$$
$$+\iint_{-\infty}^{\infty}d\sigma_1 d\sigma_2 G_{\alpha}^{0}(t_1-\sigma_1)\sum_{\gamma}[M_{\alpha\gamma}(\sigma_1-\sigma_2)+iu_{\alpha\gamma}\delta(\sigma_1-\sigma_2)]$$
$$\times G_{\gamma\beta}(\sigma_2-t_2). \tag{17}$$

上式的傅氏变换 $\left[G_{\alpha\beta}(\omega)=i\int_{-\infty}^{\infty}dt e^{i\omega t}G_{\alpha\beta}(t)\right]$ 可以写为

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}G_{\alpha}^{0}(\omega)+\sum_{\gamma}G_{\alpha}^{0}(\omega)[u_{\alpha\gamma}-M_{\alpha\gamma}(\omega)]G_{\gamma\beta}(\omega) \tag{18·1}$$
$$=\delta_{\alpha\beta}G_{\alpha}^{0}(\omega)+G_{\alpha}^{0}(\omega)[u_{\alpha\beta}-M_{\alpha\beta}(\omega)]G_{\beta}^{0}(\omega)$$
$$+G_{\alpha}^{0}(\omega)\sum_{\gamma}[u_{\alpha\gamma}-M_{\alpha\gamma}(\omega)]G_{\gamma}^{0}(\omega)[u_{\gamma\beta}-M_{\gamma\beta}(\omega)]G_{\beta}^{0}(\omega)+\cdots, \tag{18·2}$$

式中

$$G_{\alpha}^{0}(\omega)=-\left[\frac{1-n_{\alpha}}{\omega-\varepsilon_{\alpha}+i\eta}+\frac{n_{\alpha}}{\omega-\varepsilon_{\alpha}-i\eta}\right]. \tag{19}$$

由 (18) 式我们看到,如果定理中的条件 1) 成立,就有

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}G_{\alpha}^{0}(\omega)+G_{\alpha}^{0}(\omega)\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)G_{\beta}^{0}(\omega), \tag{20}$$

或

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=G_{\alpha}^{0}(\omega)^{-1}G_{\alpha\beta}(\omega)G_{\beta}^{0}(\omega)^{-1}-\delta_{\alpha\beta}G_{\beta}^{0}(\omega)^{-1}. \tag{21}$$

根据 (13) 式的定义, $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 也可以严格地写为

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=-\sum_{n}\left\{\frac{g_{\alpha\beta}^{(+)}(n)}{\omega-\mathscr{E}_n^{+}+i\eta}+\frac{g_{\alpha\beta}^{(-)}(n)}{\omega+\mathscr{E}_n^{-}-i\eta}\right\}$$
$$\equiv G_{\alpha\beta}^{(+)}(\omega)+G_{\alpha\beta}^{(-)}(\omega), \tag{22}$$

其中 $\mathscr{E}_n^{\pm}=E_n(N\pm 1)-E_0(N)$,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^{(+)}(n)&=\langle\Psi_0|\xi_{\alpha}|\Psi_n(N+1)\rangle\langle\Psi_n(N+1)|\xi_{\beta}^{+}|\Psi_0\rangle,\\ g_{\alpha\beta}^{(-)}(n)&=\langle\Psi_0|\xi_{\beta}^{+}|\Psi_n(N-1)\rangle\langle\Psi_n(N-1)|\xi_{\alpha}|\Psi_0\rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

以 (19) 与 (22) 式代入(21)式,容易看出, $\lim_{\omega\to\infty}\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=C_{\alpha\beta}\omega$, 即 $\omega=\infty$ 是 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的

1) 这里"存在"一词允许有一定的奇异性.

2) (16) 式可能使我们误认为, $\omega=\varepsilon_{\alpha}$ 或 ε_{β} 应是 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的奇异点. 下面的讨论将指出 [参看 (21) 式], 事实并非如此. 因此在应用 (16) 式计算条件 2) 中的量时,必须予以适当的注意.

极点；此外，例如，对于 $\mathfrak{M}_{p\beta}(\omega)$ 有

$$\mathfrak{M}_{p\beta}(\omega)=G_p^0(\omega)^{-1}\sum_n\left\{-\frac{g_{p\beta}^{(+)}(n)}{\omega-\mathscr{E}_n^++i\eta}-\frac{g_{p\beta}^{(-)}(n)}{\omega+\mathscr{E}_n^--i\eta}\right\}G_\beta^0(\omega)^{-1}-\delta_{p\beta}G_p^0(\omega)^{-1}$$
$$\equiv\mathfrak{M}_{p\beta}^{(+)}(\omega)+\mathfrak{M}_{p\beta}^{(-)}(\omega)+\mathfrak{M}_{p\beta}^{(0)}(\omega).\tag{24}$$

因为 $G_p^0(\omega)^{-1}=-(\omega-\varepsilon_p+i\eta)$，所以倘若 $\mathscr{E}_n^+$ 中有 $\mathscr{E}_{n_p}^+=\varepsilon_p$，则 $\mathscr{E}_{n_p}^+$ 虽是 $G_{p\beta}(\omega)$ 的极点，却不是 $\mathfrak{M}_{p\beta}(\omega)$ 的极点[参看 (30) 式]．因此 (21) 式说明，除了实轴附近的个别极点 ($\mathscr{E}^\pm\mp i\eta,\ \eta\to 0^+$) 以及无穷远处的极点外，$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 应和 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 有相同的解析性．

现假定存在一个 $\beta(\neq p)$ 使 $\mathfrak{M}_{p\beta}(\varepsilon_p)\neq 0$．由 (24) 式可以立即看出，这时 n 中必有一个 n_p 使得

$$\varepsilon_p=\mathscr{E}_{n_p}^+=E_{n_p}(N+1)-E_0(N),\tag{25}$$

而且

$$\mathfrak{M}_{p\beta}(\varepsilon_p)=g_{p\beta}^{(+)}(n_p)G_\beta^0(\varepsilon_p)^{-1}=\mathfrak{M}_{p\beta}^{(+)}(\varepsilon_p).\tag{26}$$

注意，我们必须理解

$$\mathfrak{M}_{p\beta}^{(-)}(\varepsilon_p)=0,\tag{27}$$

即 $\mathfrak{M}_{p\beta}(\varepsilon_p)\neq 0$ 只可能来源于 $\mathfrak{M}_{p\beta}^{(+)}(\varepsilon_p)\neq 0$．为此可以考虑 $G_{pp'}(t>0)$ 或者 $G_{ph}(t>0)$．假定 (25) 式不成立，即 $\mathfrak{M}_{p\beta}(\varepsilon_p)\neq 0$ 是由于 $\mathfrak{M}_{p\beta}^{(-)}(\varepsilon_p)\neq 0$．让我们考虑 $G_{ph}(t>0)$．它满足

$$G_{ph}(t>0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi d\omega e^{-i\omega t}G_{ph}(\omega)\tag{28·1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi d\omega e^{-i\omega t}G_p^0(\omega)\mathfrak{M}_{ph}(\omega)G_h^0(\omega),\tag{28·2}$$

虽然 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 含有极点 $\omega=\infty$，但是因为它不是 $G_\alpha^0(\omega)\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)G_\beta^0(\omega)$ 的极点，所以它对 (26) 式中的积分没有贡献．下面在提到 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}^{(\pm)}(\omega)$ 所含极点对积分的贡献时，将不包括这个极点．显然，(28·2) 式中只有 $G_p^0(\omega)$ 与 $\mathfrak{M}_{ph}^{(+)}(\omega)$ 的极点对积分有贡献，因此

$$G_{ph}(t>0)=\mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_pt}$$
$$-\sum_n\mathrm{Res}\,[G_p^0(\omega)\mathfrak{M}_{ph}^{(+)}(\omega)G_h^0(\omega)]_{\omega=\mathscr{E}_n^+}e^{-i\mathscr{E}_n^+t}$$
$$=\mathfrak{M}_{ph}^{(-)}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_pt}+\sum_n g_{ph}^{(+)}(n)e^{-i\mathscr{E}_n^+t}.\tag{29}$$

现设 $\mathfrak{M}_{ph}^{(-)}(\varepsilon_p)\neq 0$ 且 (25) 式成立．这时[1)]，

$$\mathfrak{M}_{ph}^{(+)}(\omega)=g_{ph}^{(+)}(n_p)G_h^0(\omega)^{-1}-G_p^0(\omega)^{-1}\sum_{n\neq n_p}\frac{g_{ph}^{(+)}(n)}{\omega-\mathscr{E}_n^++i\eta}G_h^0(\omega)^{-1},\tag{30}$$

因此由 (28.2) 式依然有

---

1) 由以下等式 (其中 $t>0$)：

$$\lim_{\eta_i\to 0^+}\frac{-1}{2\pi i}\int_\varphi d\omega\frac{(\omega-a+i\eta_1)}{(\omega-a+i\eta_2)(\omega-a+i\eta_3)}e^{-i\omega t}$$
$$=\lim_{\eta_i\to 0^+}\left\{e^{-iat}\left[\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_3-\eta_2}+\frac{\eta_1-\eta_3}{\eta_2-\eta_3}\right]+o(\eta_i)\right\}$$
$$=e^{-iat}=\lim_{\eta\to 0^+}\frac{-1}{2\pi i}\int_\varphi d\omega\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-a+i\eta}$$

容易看出，(30)式右端第一项的写法是正确的，这里不存在"不确定性"．

$$G_{ph}(t>0)=[\mathfrak{M}_{ph}^{(+)}(\varepsilon_p)+\mathfrak{M}_{ph}^{(-)}(\varepsilon_p)]G_h^0(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_p t}$$
$$+\sum_{n\neq n_p} g_{ph}^{(+)}(n)e^{-i\mathscr{E}_n^+ t}=\mathfrak{M}_{ph}^{(-)}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_p t}$$
$$+\sum_n g_{ph}^{(+)}(n)e^{-i\mathscr{E}_n^+ t}. \tag{29'}$$

另外,根据 (13) 式的定义,或者以 (22) 式代入 (28.1) 式,可以求得

$$G_{ph}(t>0)=\sum_n g_{ph}^{(+)}(n)e^{-i\mathscr{E}_n^+ t}. \tag{31}$$

对比 (29) 与 (31) 式,立即得到

$$\mathfrak{M}_{ph}^{(-)}(\varepsilon_p)=0.$$

因此,若 $\mathfrak{M}_{p\beta}(\varepsilon_p)\neq 0(p\neq\beta)$, 必有 (25) 式. 同理, 若 $\mathfrak{M}_{h\beta}(\varepsilon_h)\neq 0$ $(h\neq\beta)$,必有

$$\varepsilon_h=-\mathscr{E}_{n_h}^-=E_0(N)-E_{n_h}(N-1), \tag{32}$$

而且

$$\mathfrak{M}_{h\beta}(\varepsilon_h)=g_{h\beta}^{(-)}(n_h)G_\beta^0(\varepsilon_h)^{-1}=\mathfrak{M}_{h\beta}^{(-)}(\varepsilon_h), \tag{33}$$

即这时应理解 $\mathfrak{M}_{h\beta}^{(+)}(\varepsilon_h)=0$ [为此可考虑 $G_{hh'}(t<0)$ 或者 $G_{hp}(t<0)$]. 显然, 条件 2) 中所述其它命题可以同样证明. 定理因此证毕.

根据以上论据不难看出,条件 2) 实际上[1]也是(4)式严格成立的必要条件[在条件 1) 的前提下]. 现考虑以下非齐次线性积分方程:

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}+\sum_\gamma [u-M(\omega)]_{\alpha\gamma}G_\gamma^0(\omega)\mathfrak{M}_{\gamma\beta}(\omega) \tag{34·1}$$

或者

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=[u-M(\omega)]_{\alpha\beta}+\sum_\gamma \mathfrak{M}_{\alpha\gamma}(\omega)G_\gamma^0(\omega)[u-M(\omega)]_{\gamma\beta}. \tag{34·2}$$

从定理的证明容易看出,代替条件 1) 可以更一般地引进

1.1) (34) 式有解[注意, 其解必满足 (20) 式, 因这时按(20)式定义的 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 必满足(18)式].

因为 (34) 式的迭代解就是条件 1) 中的无穷级数, 所以条件 1) 只是实现 1.1) 的一个途径. 另一个熟知的实现 1.1) 的途径为

1.2) $A(\omega)=(1-[u-M(\omega)]G^0(\omega))^{-1}$ 或者
$B(\omega)=(1-G^0(\omega)[u-M(\omega)])^{-1}$存在.

这时 (34) 式的解可以写为

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=\{A(\omega)[u-M(\omega)]\}_{\alpha\beta} \tag{35·1}$$

或者

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)=\{[u-M(\omega)]B(\omega)\}_{\alpha\beta}. \tag{35·2}$$

另外,由 (18) 式有

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=G_\alpha^0(\omega)A_{\alpha\beta}(\omega) \quad 或者 \quad G_{\alpha\beta}(\omega)=B_{\alpha\beta}(\omega)G_\beta^0(\omega). \tag{36}$$

1) 例如,若条件 2) 不满足,但(25)式成立,则对任一 β,必有

$$g_{p\beta}^{(+)}(n_p)=g_{\beta p}^{(+)}(n_p)=0.$$

(23) 式说明,这时 (25) 式成立只是偶然的[显然,这里隐含着所考虑的是断续谱区]. 此外, 若 (4) 式不成立, 则条件 2) 不满足.

应用上式可导得 $A(\omega)$ 与 $B(\omega)$ 的解析性或者奇异性. 联立 (35) 与 (36) 式,容易求得

$$G^0(\omega)\mathfrak{M}(\omega) = G(\omega)[u - M(\omega)] \tag{37·1}$$

或者

$$\mathfrak{M}(\omega)G^0(\omega) = [u - M(\omega)]G(\omega), \tag{37·2}$$

由此根据 (18) 式,可立即得到 (20) 式, 即如果 $A(\omega)$ 或者 $B(\omega)$ 存在, 则 (20) 式必成立. 条件 1) 与 1.2) 的关系是众所周知的,因为 (16) 式就是 (35) 式的幂级数展开. 我们注意, (34) 式并不比 (18.1) 式更简单, 引进 (34) 式的目的主要是为了说明, 即使 (16) 式中的级数不收敛, $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 仍可能存在.

由于定理的证明只用到单粒子格林函数的性质以及 (20) 或者 (21) 式, 因此可以直接将 (21) 式取为 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的定义,这样还可将条件 1) 叙述为

1.3)　(18.1) 式有解, 即 $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 存在.

显然,如果上述条件能够得到满足,由 (18) 与 (21) 式就可以导得 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 所满足的等式与方程. 例如,若摄动理论适用, 以 (18.2) 式代入 (21) 式,就可立即求得 (16) 式. 为了判断 (4) 式是否成立, 通常的途径为: 首先算出 $E_{n_\alpha}(N \pm 1) - E_0(N)$ 或给出其计算公式,然后和 ε_α 相比较. 本文的目的在于探讨是否还存有其它的途径和判据. 因此,如果只能依赖 (21) 与 (22) 式来计算 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$, 取条件 2) 为 (4) 式成立的判据是无意义的. 定理的意义在于实际存在着其它(即无需事先求出 $\mathscr{E}_n^+$ 与 $\mathscr{E}_n^-$ 的) 计算 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的方法. 下一节将指出,若条件 2) 中的量不等于零,它们都有直接的物理意义(参看 (41), (44)—(46)式),此外定理还有一些其它的应用.

三、定理的一些应用

定理的一个主要应用已包含在它的结论[参看(4)式]中,这里将讨论它的一些其它应用. 首先我们指出,由它可以得到以下判据:

(1) 因为 $E_0(N)$ 与 $E_n(N \pm 1)$ 分别是满壳核基态与 $(N \pm 1)$ 核的严格能量本征值, 所以它们的数值可由实验测定. 倘若 ε_p 与 $E_{n_p}(N+1) - E_0(N)$ 或 ε_h 与 $E_0(N) - E_{n_h}(N-1)$ 差别较大时,这说明 $u_{\alpha\beta}$ 不满足条件 1) 或者 2). 如果根据 (16) 或(35)式进行的近似计算足以判断 $u_{\alpha\beta}$ 满足条件 2), 则它必不满足条件 1), 即它是一个不恰当的选择.

(2) 设 $u_{\alpha\beta}$ 是某一选定的单粒位阱, 由它所确定的单粒子能量 ε_α 不满足条件 2). 例如,让我们考虑 $\alpha = h$ 时的情形. 这时 (32) 式不成立,且

$$\mathfrak{M}_{h\beta}(\varepsilon_h) = \mathfrak{M}_{\beta h}(\varepsilon_h) = 1 - \mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h) = 0.$$

根据 (19) 与 (20) 式,容易求得

$$G_{hh}(t<0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frown} d\omega e^{-i\omega t}[G_h^0(\omega) + G_h^0(\omega)\mathfrak{M}_{hh}(\omega)G_h^0(\omega)]$$

$$= -[1 - \mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h)]e^{-i\varepsilon_h t} - \sum_n g_{hh}^{(-)}(n)e^{i\mathscr{E}_n^- t} \tag{38·1}$$

$$= -\sum_n g_{hh}^{(-)}(n)e^{i\mathscr{E}_n^- t}. \tag{38·2}$$

(38.1) 式中方括号内的第二项为二重极点 $(\varepsilon_h + i\eta)$ 的贡献, 最后一项是 $\mathfrak{M}_{hh}^{(-)}(\omega)$ 所含

极点的贡献. (38)式说明, $G_{hh}(t<0)$ 不包含时间随 $\exp(-i\varepsilon_h t)$ 变化的项. 但是,按摄动理论进行计算, 如果只取有限项, 则 $G_{hh}(t<0)$ 将含有上述项. 例如, 根据 (15) 式, $G_{hh}(t<0)$ 的零级近似为 $G^0_{hh}(t<0)=-\exp(-i\varepsilon_h t)$, 所以当 ε_h 不满足条件 2) 时,取 $G_{hh}(t<0)\simeq G^0_{hh}(t<0)$ 或者只取摄动展开中少数最低级的项都可能导致错误的结论.

下面假定 $u_{\alpha\beta}$ 满足定理中的条件,我们看到,定理的结论还可能对 $G_{\alpha\beta}(t)$ 的计算带来以下简化. 先考虑 $G_{p'p}(t>0)$. 容易求得

$$G_{pp}(t>0)=[1-\mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]e^{-i\varepsilon_p t}+\bar{P}_{pp}, \tag{39·1}$$

$$G_{p'p}(t>0)=\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'})G^0_p(\varepsilon_{p'})e^{-i\varepsilon_{p'}t}+\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_p)G^0_{p'}(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_p t}+\bar{P}_{p'p} \quad (p'\neq p), \tag{39·2}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{P}_{pp}&=\sum_{n\neq n_p}g^{(+)}_{pp}(n)e^{-i\varepsilon^+_n t},\\ \bar{P}_{p'p}&=\sum_{n\neq(n_{p'},n_p)}g^{(+)}_{p'p}(n)e^{-i\varepsilon^+_n t}\quad (p'\neq p),\end{aligned} \tag{40}$$

而且

$$1-\mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)=g^{(+)}_{pp}(n_p), \tag{41·1}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'})G^0_p(\varepsilon_{p'})&=g^{(+)}_{p'p}(n_{p'}),\\ \mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_p)G^0_{p'}(\varepsilon_p)&=g^{(+)}_{p'p}(n_p).\end{aligned}\right\}\ (p'\neq p) \tag{41·2}$$

设所选 $u_{\alpha\beta}$ 是厄米的,注意,如果 $\Psi_{n_p}(N+1)=A\xi^+_p|\Psi_0\rangle$ (A 为归一化常数),则根据 (23) 式 $\bar{P}_{pp}$ 与 $G_{p'p}(t>0)(p'\neq p)$ 均等于零. 虽然一般 $\Psi_{n_p}(N+1)\neq A\xi^+_p|\Psi_0\rangle$, 但由于 (25) 式可以期望 $\langle\Psi_n(N+1)|\xi^+_p|\Psi_0\rangle(n\neq n_p)$ 和 $\langle\Psi n_p(N+1)|\xi^+_p|\Psi_0\rangle$ 相比是高一级小量,由此 $\bar{P}_{pp}$ 与 $\bar{P}_{p'p}$ 中所含最大的项将是二级小量. 注意,只要 $u_{\alpha\beta}$ 满足定理中的条件, (25) 与 (39—41) 式就成立,因此在这些 $u_{\alpha\beta}$ 中还可作进一步的选择,以使

$$|\langle\Psi_n(N+1)|\xi^+_{p'}|\Psi_0\rangle/\langle\Psi_{n_p}(N+1)|\xi^+_p|\Psi_0\rangle| \qquad (n\neq n_{p'})$$

尽可能地小. 当 $\bar{P}_{pp}$ 与 $\bar{P}_{p'p}$ 可以忽略时,由 (39) 式将得到一个关于 $G_{p'p}(t>0)$ 的准确且又相当简单的表达式, 而且这时 $G_{p'p}(t>0)(p'\neq p)$ 和 $G_{pp}(t>0)$ 相比一般是高一级小量. 无疑,以上预计仍是粗略的,还需要通过具体计算予以进一步检验.

同样有

$$G_{hh}(t<0)=-[1-\mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h)]e^{-i\varepsilon_h t}+\bar{P}_{hh}, \tag{42·1}$$

$$G_{h'h}(t<0)=-\mathfrak{M}_{h'h}(\varepsilon_{h'})G^0_h(\varepsilon_{h'})e^{-i\varepsilon_{h'}t}-\mathfrak{M}_{h'h}(\varepsilon_h)G^0_{h'}(\varepsilon_h)e^{-i\varepsilon_h t}+\bar{P}_{h'h}\quad (h'\neq h), \tag{42·2}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{P}_{hh}&=-\sum_{n\neq n_h}g^{(-)}_{hh}(n)e^{i\varepsilon^-_n t},\\ \bar{P}_{h'h}&=-\sum_{n\neq(n_{h'},n_h)}g^{(-)}_{h'h}(n)e^{i\varepsilon^-_n t}\quad (h'\neq h),\end{aligned} \tag{43}$$

而且

$$1-\mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h)=g^{(-)}_{hh}(n_h), \tag{44·1}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_{h'h}(\varepsilon_{h'})G^0_h(\varepsilon_{h'})&=g^{(-)}_{h'h}(n_{h'}),\\ \mathfrak{M}_{h'h}(\varepsilon_h)G^0_{h'}(\varepsilon_h)&=g^{(-)}_{h'h}(n_h);\end{aligned}\right\}\ (h'\neq h) \tag{44·2}$$

以及

$$G_{ph}(t>0)=\mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_p t}+\bar{P}_{ph}^{(+)},$$
$$\bar{P}_{ph}^{(+)}=\sum_{n\neq n_p}g_{ph}^{(+)}(n)e^{-i\varepsilon_n^+ t},\tag{45·1}$$
$$\mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)=g_{ph}^{(+)}(n_p);$$
$$G_{ph}(t<0)=-\mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_h)G_p^0(\varepsilon_h)e^{-i\varepsilon_h t}+\bar{P}_{ph}^{(-)},$$
$$\bar{P}_{ph}^{(-)}=-\sum_{n\neq n_h}g_{ph}^{(-)}(n)e^{i\varepsilon_n^- t},\tag{45·2}$$
$$\mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_h)G_p^0(\varepsilon_h)=g_{ph}^{(-)}(n_h);$$
$$G_{hp}(t>0)=\mathfrak{M}_{hp}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)e^{-i\varepsilon_p t}+\bar{P}_{hp}^{(+)},$$
$$\bar{P}_{hp}^{(+)}=\sum_{n\neq n_p}g_{hp}^{(+)}(n)e^{-i\varepsilon_n^+ t},\tag{46}$$
$$\mathfrak{M}_{hp}(\varepsilon_p)G_h^0(\varepsilon_p)=g_{hp}^{(+)}(n_p);\cdots$$

很明显，上面对 $G_{p'p}(t>0)$ 所作的讨论也适用于 $G_{h'h}(t<0),\cdots$.

最后，讨论一下 $u_{\alpha\beta}$ 的非厄米选择：

$$u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta).\tag{47}$$

仍先考虑 $G_{p'p}(t>0)$. 另文中将证明，这时

$$\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_p)=0^{1)}.\tag{48}$$

显然，代替 (47·1) 式也可引入

$$u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha),\tag{47'}$$

由此将有

$$\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'})=0.\tag{48'}$$

下面将只针对 (47) 式进行讨论，因为同样的论据适用于 (47′) 式. 由于 (48) 式，(39·2) 式简化为

$$G_{p'p}(t>0)=\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'})G_p^0(\varepsilon_{p'})e^{-i\varepsilon_{p'}t}+P_{p'p}\qquad(p'\neq p).\tag{49}$$

此外，根据 (41) 式有

$$g_{p'p}^{(+)}(n_p)=\langle\Psi_0|\xi_{p'}|\Psi_{n_p}(N+1)\rangle\langle\Psi_{n_p}(N+1)|\xi_p^+|\Psi_0\rangle=0\quad(p'\neq p).\tag{50}$$

因为已假定 $u_{\alpha\beta}$ 满足定理中的条件，可以预计 $\langle\Psi_{n_p}(N+1)|\xi_p^+|\Psi_0\rangle\neq 0$，所以由 (50) 式有

$$\langle\Psi_0|\xi_{p'}|\Psi_{n_p}(N+1)\rangle=0\quad(p'\neq p).\tag{51}$$

注意，除了和 ε_p 或者 ε_h [参看 (25) 或者 (32) 式]对应的态外，$(N\pm 1)$ 核还可以有集体运动态，后者将用脚标 n_c 表示. 由 (40) 式并应用 (23) 与 (51) 式可得

$$P_{pp}=\sum_{p'(\neq p)}g_{pp}^{(+)}(n_{p'})e^{-i\varepsilon_{p'}t}+\sum_{n_c}g_{pp}^{(+)}(n_c)e^{-i\varepsilon_{n_c}^+ t}$$
$$=\sum_{n_c}g_{pp}^{(+)}(n_c)e^{-i\varepsilon_{n_c}^+ t}.\tag{52·1}$$

---

1) 注意，由 (36) 式可得 $A_{p'\gamma}(\omega)=G_{p'}^0(\omega)^{-1}G_{p'\gamma}(\omega)$. 因此当 $p'\neq p$ 时，按 (25) 式，$\omega=\varepsilon_p-i\eta$ 可能是 $A_{p'\gamma}(\omega)$的极点. 所以，虽然 $u_{\gamma p}=M_{\gamma p}(\varepsilon_p)$，却不能根据 (35) 式由

$$\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_p)=\Sigma_\gamma A_{p'\gamma}(\varepsilon_p)[u-M(\varepsilon_p)]_{\gamma p}$$

立即导得 $\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_p)=0$.

同理有

$$P_{p'p} = \sum_{n_c} g^{(+)}_{p'p}(n_c) e^{-i\varepsilon^+_{n_c} t} \quad (p' \neq p). \tag{52·2}$$

(49) 与 (52) 式应看为是非厄米选择 (47) 式的优点. 自然我们更关心的是: 是否 $P_{p'p}$ 与 $\bar{P}_{p'p}$ 均可忽略或者只是其中之一可以忽略? 要想准确地回答这一问题还有待于具体的数值计算. 根据"最大抵销原则", Jones 与 Mohling[5] 曾指出 (47) 式的非厄米选择有比 Brandow[6] 与 Kirson[7] 所建议的位阱更好的抵销性. J-M 只明显地考虑了 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ 的二级近似. 另文中我们将对 (47) 式的抵销性作更全面的探讨并将指出, (39.2) 式与 $\bar{P}_{p'p}$ 分别简化为 (49) 式与 $P_{p'p}$ 正是由于抵销的结果. 由于 (49) 与 (52) 式, 我们觉得, (47) 式的选择虽是非厄米的, 却是一个值得进一步研究的选择¹⁾.

同理, (42.2) 式与 $\bar{P}_{h'h}$ (包括 $h' = h$) 分别简化为

$$G_{h'h}(t<0) = -\mathfrak{M}_{h'h}(\varepsilon_{h'}) G^0_h(\varepsilon_{h'}) e^{-i\varepsilon_{h'} t} + P_{h'h} \quad (h' \neq h),$$

$$P_{h'h} = -\sum_{n_c} g^{(-)}_{h'h}(n_c) e^{i\varepsilon^-_{n_c} t}, \tag{53}$$

且

$$\langle \Psi_{n_h}(N-1) | \xi_{h'} | \Psi_0 \rangle = 0 \quad (h' \neq h). \tag{54}$$

此外, 对应于 (45·2) 与 (46) 式有

$$G_{ph}(t<0) = P^{(-)}_{ph} = -\sum_{n_c} g^{(-)}_{ph}(n_c) e^{i\varepsilon^-_{n_c} t}, \tag{55}$$

$$G_{hp}(t>0) = P^{(+)}_{hp} = \sum_{n_c} g^{(+)}_{hp}(n_c) e^{-i\varepsilon^+_{n_c} t}, \tag{56}$$

且

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_{n_h}(N-1) | \xi_p | \Psi_0 \rangle = 0, \\ &\langle \Psi_0 | \xi_h | \Psi_{n_p}(N+1) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

虽然根据"最大抵消原则"的观点, (47) 式比 B-K 的建议更优越, 但是, 由 (47) 式所给出的 u_{ph} 与 u_{hp} 和 Kirson[9] 关于 u_{ph} 与 u_{hp} 的建议相比, 却各有优点, 这点将在另文中作进一步的阐述.

最后, 我们注意, 根据 (47) 式有 $\{[u_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}(\omega)] G^0_\beta(\omega)\}_{\omega=\varepsilon_\beta} = M'_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ (参看另文), 所以 (47) 式的选择也便于直接应用 (16) 与 (35) 式对 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)(\alpha \neq \beta)$ 和 $1 - \mathfrak{M}'_{\alpha\alpha}(\varepsilon_\alpha)$ 进行计算. 由 (16) 与 (35) 式不难看出, 做近似计算时这些量一般不等于零. 但是, 当条件1) 成立而 (4) 式不成立时, 它们必须近似地等于零. 此外, 通过研究 $\omega \to \varepsilon_\alpha$ 时, 它们逼近于零的速率, 还可以对 $\varepsilon_\alpha \approx \pm [E_{n_\alpha}(N \pm 1) - E_0(N)]$ 的情形作进一步的判断.

参 考 文 献

[1] T. Koopmans, *Physica*, **1** (1934), 104.
[2] R. L. Becker, M. R. Patterson, *Nucl. Phys.*, **A178** (1971), 88.

1) 根据 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的二级摄动近似, Becker 与 Jones[8] 曾指出 $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ 是复的, 从而 ε_α 也将是复的. 为此 B-J 建议将 (47) 式改选为

$$u_{\alpha\beta} = \mathrm{Re} M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta). \tag{F1}$$

因为由摄动展开式所反映的极点并不是 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 真正的极点 [除非级数收敛很快], 另文中我们将指出, 对于 ε_α 的低能断续谱区, $[M_{\alpha\beta}(\omega)]_{\eta=0}$ 的真正极点一般不与 ε_β 相重, 因此当切断近似适用时, 为了保证这一区域的 ε_α 是实的, 并不一定需要将 (47) 式改选为 (F1).

[3] P. M. Morse, H. Feshbach, Methsds of Theoretical Physics (1953), p. 884.
[4] L. Schäfer, *Nucl. Phys.*, A217 (1973), 361.
[5] R. W. Jones, F. Mohling, *Nucl. Phys.*, A151 (1970), 420.
[6] B. H. Brandow, *Phys. Rev.*, 152 (1966), 863; *Ann. of Phys.*, 57 (1970), 214.
[7] M. W. Kirson, *Nucl. Phys.*, A115 (1968), 49.
[8] R. L. Becker, R. W. Jones, *Nucl. Phys.*, A174 (1971), 449.
[9] M. W. Kirson, *Nucl. Phys.*, A139 (1969), 57.

ON NUCLEAR SINGLE-PARTICLE POTENTIALS (I) A THEOREM

WU SHI-SHU

(Department of Physics, Jilin University)

ABSTRACT

In this paper a theorem is proved and some of its applications discussed. The theorem gives an answer to the question: Under what conditions does the following relation

$$\varepsilon_\alpha = \pm[E_\alpha(N\pm1)-E_0(N)]$$

hold exactly? In the above relation, the ε_α's are the single-particle (sp) energies determined by the corresponding sp potential, $E_0(N)$ is the exact ground state energy of a closed-shell nucleus N, and the $E_\alpha(N\pm1)$'s denote the exact energy eigenvalues of its neighbouring $N\pm1$ nucleus.