第25卷 第6期　　物 理 学 报　　Vol. 25, No. 6
1976年11月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Nov., 1976

研究简报

强磁场中相对论性电子的拉曼散射*

方励之　刘永镇
(中国科学技术大学)

根据脉冲星的辐射特征推测，在这种中子星的表面存在高达 10^{12}—10^{13} 高斯的强磁场[1]. 有关X射线密近双星的种种探讨，也倾向于认为在其X射线子星上有很强的磁场. 为了处理在这种条件下的辐射转移或者不透明度等天体物理问题，例如X射线在吸积柱或吸积层中的转移等，有必要把有关强磁场的各种基本过程分析清楚.

在中子星周围吸积柱等区域的气体中，电子分布是非简并的. 光子与自由电子之间的一种基本的相互作用过程，是汤姆森散射，或更一般的康普顿散射. 在强磁场中，电子只能沿磁场方向(以下称为纵向)作自由运动，而在沿垂直磁场方向(以下称为横向)的运动受到束缚，致使汤姆森散射截面有所变化[2]. 我们知道，电子的横向运动将发生朗道量子化. 因而，在这些朗道能级之间还可能发生拉曼散射过程. 然而，若采用非相对论讨论，则由于朗道能级的等间距性，不会发生拉曼散射. 这种拉曼散射过程可能发生于下列情况：固体中具有非抛物型能带的载流子[3]；考虑相对论性的电子. 本文的目的就是给出后一种情况的一些结果.

从经典的观点看，非相对论性电子之所以不会产生拉曼散射，是由于电子在垂直于磁场方向是个简谐运动，没有非线性项引起耦合. 而对相对论性电子，则运动方程中出现非线性项，才可能发生拉曼过程，在磁场 $\boldsymbol{H}$ 以及辐射的电场 $\boldsymbol{E}e^{i\omega t}$ 作用下的电子运动方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=e\boldsymbol{E}e^{i\omega t}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H},$$

其中 m 及 e 分别为电子质量及电荷. 可以按 $1/c^2$ 逐级求解，将速度表示成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^0+\boldsymbol{v}^1+\cdots.$$

上标表示含 $1/c^2$ 的阶数. 假定磁场 $\boldsymbol{H}$ 在 z 方向，电场 $\boldsymbol{E}$ 在 x 方向，则在垂直于磁场方向电子运动的解为

$$v_x^0=Ae^{i\omega_0 t+\varphi}+i\frac{eE}{m}\frac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t},$$

$$v_y^0=iAe^{i\omega_0 t+\varphi}-\frac{eE}{m}\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t},$$

$$v_x^1=iv_y^1=\frac{e}{2c^2}\frac{A^2E}{m}\left\{\frac{(\omega-2\omega_0)}{\omega_0^2-(\omega-2\omega_0)^2}e^{i(\omega-2\omega_0)t-2\varphi}+\frac{(\omega+2\omega_0)}{\omega_0^2-(\omega+2\omega_0)^2}e^{i(\omega+2\omega_0)t-2\varphi}\right\},$$

其中 $\omega_0=eH/mc$，A 可以表示横向运动的大小，在 v_x^1，v_y^1 中我们只写了相当于拉曼散射

* 1975年1月18日收到.

的项,其他项没有写. 由这个表达式可知,拉曼过程引起的频率变化为 $\pm 2\omega_0$. 这相当于量子观点中的选择定则,利用偶极辐射公式及 v_x^1, v_y^1 表达式,即可求得微分散射截面的公式,当 $\omega \gg \omega_0$ 时为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_f}{\omega_i} \frac{1}{4} \left(\frac{A}{c}\right)^4 P,$$

其中 ω_i 及 ω_f 分别为入射光及散射光的圆频率,P 为方向因子,若以散射光方向和磁场 $\boldsymbol{H}$ 构成的平面为标准,则当散射光的偏振面在这个平面中时,

$$P = \cos^2 \vartheta_f,$$

其中 ϑ_f 为散射光方向与磁场方向的夹角,当偏振面垂直于上述平面时,

$$P = 1.$$

可见,有一部分散射光在纵向上比较强.

有一点应当指出,在经典的图象中,不能反映电子自旋的作用. 上述的拉曼散射的经典图象也类似. 从后面量子力学的处理将看到,这里给出的截面,只相当于初态、终态及中间态的自旋态都相同的过程. 如果初终态分别属于不同的自旋状态,或者中间态涉及不同的自旋态,则没有完全的经典对应. 也就是说,有关实的或虚的自旋反转的拉曼散射,应当用量子力学的方法去讨论.

在量子力学的处理中,我们同样取均匀外磁场 $\boldsymbol{H}$ 的方向为 z 轴方向,相对论性电子的能级是[4]

$$\begin{aligned} E_{1n} &= [m^2c^4 + p_z^2c^2 + \varepsilon^2(n+1)]^{1/2}, \\ E_{2n} &= [m^2c^4 + p_z^2c^2 + \varepsilon^2 n]^{1/2}, \\ n &= 0, 1, 2\cdots, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon^2 = 2\dfrac{H}{H_c} m^2c^4$, $H_c = \dfrac{m^2c^3}{e\hbar} = 4.414 \times 10^{13}$ 高斯, p_z 是电子的纵向运动的动量, n 是表示横向运动的量子数,下标 1 及 2 分别表示自旋与磁场平行与反平行的状态,负能态的能级对应为 $-E_{1n}$ 及 $-E_{2n}$. 相应的四类波函数是

$$u_1 = G_1 \begin{bmatrix} (mc^2 + E_{1n})\phi_n \\ 0 \\ p_z c\phi_n \\ \varepsilon(n+1)^{1/2}\phi_{n+1} \end{bmatrix}, \quad u_2 = G_2 \begin{bmatrix} 0 \\ (mc^2 + E_{2n})\phi_n \\ \varepsilon n^{1/2}\phi_{n-1} \\ -p_z c\phi_n \end{bmatrix},$$

$$v_1 = G_3 \begin{bmatrix} (mc^2 - E_{1n})\phi_n \\ 0 \\ p_z c\phi_n \\ \varepsilon(n+1)^{1/2}\phi_{n-1} \end{bmatrix}, \quad v_2 = G_4 \begin{bmatrix} 0 \\ (mc^2 - E_{2n})\phi_n \\ \varepsilon n^{1/2}\phi_{n-1} \\ -p_z c\phi_n \end{bmatrix},$$

$$G_1^{-2} = 2E_{1n}(mc^2 + E_{1n}), \quad G_2^{-2} = 2E_{2n}(mc^2 + E_{2n}),$$

$$G_3^{-2} = 2E_{1n}(E_{1n} - mc^2), \quad G_4^{-2} = 2E_{2n}(E_{2n} - mc^2),$$

$$\phi_n = N_n H_n\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)\exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right)\exp\left(iy\frac{x-2a}{2\lambda^2}\right)\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\lambda^2}\right),$$

其中 $\lambda^2 = \hbar c/eH$, H_n 为厄米多项式, N_n 是归一化常数,每一个函数 ϕ 由 n, a 及 p_z 三个

数确定，a 也具有连续谱，它表示电子的横向运动的平均位置．

λ 是波函数在横向的铺展范围，如果H以高斯为单位，则 $\lambda = 2.5 \times 10^{-4}/\sqrt{H}$ 厘米．所以，当 $H > 10^8$ 高斯时，$\lambda < 10^{-8}$ 厘米，对于直到软X射线的辐射与电子横向运动的相互作用，已可取偶极近似，当 $H \sim 10^{12}$ 高斯时，对一些硬X射线也可以使用偶极近似，在这种近似下，拉曼散射的微分截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_f}{\omega_i} |M_{if}|^2. \tag{1}$$

$$M_{if} = mc^2 \sum_t \left\{ \frac{\langle f|\hat{e}' e^{-ik_z' z}|t\rangle \langle t|\hat{e} e^{ik_z z}|i\rangle}{E_t - E_i - \hbar\omega_i} + \frac{\langle f|\hat{e} e^{ik_z z}|t\rangle \langle t|\hat{e}' e^{-ik_z' z}|i\rangle}{E_t - E_f + \hbar\omega_i} \right\},$$

其中 r_0 是电子的经典半径，$\hat{e} = e_\mu r_\mu$，$\hat{e}' = e'_\mu r_\mu$，e_μ，ω_i，k_z 及 e'_μ，ω_f，k'_z 分别为入射光及散射光的极化矢量、频率及波矢量的 z 分量．初态 $|i\rangle = |n, a, p_z\rangle$，终态 $|f\rangle = |n', a', p'_z\rangle$，中间态$|t\rangle = |n'', a'', p''_z\rangle$．可以证明，在偶极近似下，应有 $a = a' = a''$．并且，在跃迁矩阵元 M_{if} 的第一项求和中取 $p''_z = p_z + \hbar k_z = p'_z + \hbar k'_z$，在第二项求和中取 $p''_z = p_z - \hbar k'_z = p'_z - \hbar k_z$．所以，中间态的求和，实际上只涉及一些 n'' 不同的状态．

计算 M_{if} 中的矩阵元，不难得知偶极近似下的拉曼散射的选择定则．如果初态及终态都属同一类自旋态（即所谓非自旋反转过程），选择定则是 $\Delta n \equiv n' - n = 0, \pm 1, \pm 2$，其中 $\Delta n = 0$ 应属康普顿散射，如果初、终态分属不同类的自旋态(即所谓自旋反转过程)，选择定则应是 $\Delta n \equiv (n')_1 - (n)_2 = 0, \pm 1$，或 $\Delta n \equiv (n')_2 - (n)_1 = 0, \mp 1$，在这里下标 1, 2 同样表示自旋态的类别，注意，其中 $\Delta n = 0$ 过程也是拉曼过程，因为 E_{1n} 及 E_{2n} 与 n 的关系不全同．而 $1 \to 2$ 的 $\Delta n = +1$ 及 $2 \to 1$ 的 $\Delta n = -1$ 过程，其朗道能级却是一致的．这个选择定则还说明，自旋态 $2 \to 1$ 的过程只有斯多克斯型的，而 $1 \to 2$ 的只有反斯多克斯型．

与一般的束缚态电子的拉曼散射不同，现在入射光与散射光的能量（或频率）之差并不完全由 Δn 所确定．这是因为，磁场中的电子只是横向运动受束缚，具有分立谱，而纵向仍是自由的，具有连续谱．初、终态的能量差不全由分立谱上的变化 Δn 决定，从守恒关系看，除了能量守恒

$$\hbar\omega_i - \hbar\omega_f = E_f(n', p'_z) - E_i(n, p_z), \tag{2}$$

z 方向上的动量守恒还是成立的：

$$p_z + \hbar k_z = p'_z + \hbar k'_z.$$

或者写成：

$$\frac{\hbar}{c}(\omega_i \cos\vartheta_i - \omega_f \cos\vartheta_f) = p'_z - p_z, \tag{3}$$

其中 ϑ_i 及 ϑ_f 分别为入射光及散射光的波矢量与磁场的夹角．联立 (2)，(3) 式可见，对于一定的入射光及确定的拉曼过程 Δn，散射光的频率是随着它的方向 ϑ_f 而变化的．就这一点说，它仍具有与自由电子的康普顿散射类似的特征．

现在我们使用一些实际的条件：1．按照目前的估计，中子星等天体上的强磁场仍不大于 10^{13} 高斯，所以一般可以认为 $\frac{H}{H_c} < 1$；2．对于直到X射线的辐射都有 $\hbar\omega \ll mc^2$．此外，如果电子速度较小，即 p_z/mc，$p'_z/mc \ll 1$，这时 (2) 式就近似为

$$\hbar\omega_i - \hbar\omega_f \simeq \Delta n \left(\frac{H}{H_c}\right) mc^2, \qquad \text{非自旋反转过程,} \tag{4}$$

$$\hbar\omega_i - \hbar\omega_f \simeq (\Delta n \pm 1) \left(\frac{H}{H_c}\right) mc^2, \quad \text{自旋反转过程.} \tag{5}$$

(5)式中正号对应 $2 \to 1$ 过程,负号对应 $1 \to 2$ 过程. 这就是说,在上述条件下,入射光与散射光的能量差才主要由朗道能级决定,具有束缚电子的拉曼散射的基本特征. 反之,如果电子速度很大,在 p_z/mc, $p'_z/mc \gg 1$ 情况,入射光与散射光的能量差往往主要由电子的纵向运动决定,朗道能级不再有明显的影响,也即是在极端相对论情况,拉曼过程相当于康普顿散射的一个修正项,缺乏独立的特征,是不重要的.

利用(1)式,经过较长的但是标准的计算,可以写出各种拉曼过程的微分截面的严格表达式. 然而,这些表达式过于繁复. 不容易看清它们的基本物理特征,所以,下面我们只明显给出在有实用意义的条件 $\left(\text{即} \frac{H}{H_c} < 1,\ \hbar\omega_{i,f} \ll mc^2,\ p_z,\ p'_z \ll mc\right)$ 下的近似表达式.

对于非自旋反转过程,当 $\Delta n = 2$ 时拉曼散射的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_f}{\omega_i} \frac{(n+1)(n+2)}{4} \left(\frac{H}{H_c}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{\omega_i\omega_f \cos\vartheta_i \cos\vartheta_f}{\left(\omega_i - \frac{H}{H_c}\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}\right]^2 P. \tag{6}$$

方向因子 P 由入射光及散射光的偏振性质决定. 如果仍以波矢量 $\boldsymbol{k}$ 及磁场 $\boldsymbol{H}$ 构成的平面为标准,偏振面与这个面相合的标以∥,偏振面与之垂直的标以⊥. 则可以分为四种情况: 1. 入射∥,散射∥; 2. 入射⊥,散射⊥; 3. 入射∥,散射⊥; 4. 入射⊥,散射∥. 这四种情况的 P 因子分别是

$$P_1 = \cos^2\vartheta_i \cos^2\vartheta_f, \quad P_2 = 1,\ P_3 = \cos^2\vartheta_i, \quad P_4 = \cos^2\vartheta_f. \tag{7}$$

(6),(7)式与经典结果是一致的. 如果计及入射光的偏振特征,经典的方向因子与(7)式全同. 对于 $\Delta n = 1$ 的过程,没经典对应,截面表达式也类似计算,下面只写出当入射⊥、散射∥情况的结果:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_f}{\omega_i} \frac{(n+1)}{2} \left(\frac{H}{H_c}\right) \left(\frac{\cos\vartheta_i \sin\vartheta_f}{1 - \frac{H}{H_c}\frac{mc^2}{\hbar\omega_i}}\right)^2. \tag{8}$$

对于自旋反转过程,同样没有经典对应,当 $\Delta n = 1$ 时,微分截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_f}{\omega_i} \frac{(n+1)}{8} \left(\frac{H}{H_c}\right) \left[\frac{\hbar\omega_i \cos\vartheta_i - \hbar\omega_f \cos\vartheta_f}{mc^2}\right]^2 \cdot \left[1 - \frac{\omega_i\omega_f \cos\vartheta_i \cos\vartheta_f}{\left(\omega_i - \frac{H}{H_c}\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}\right]^2 P, \tag{9}$$

其中因子 P 仍与(7)式相同. $\Delta n = 0$ 的反转过程,量级较小不再写出.

这些过程的量级与强磁场中其他的特有过程[5]是相当的,所以同样是一种重要的过程. 在我们所讨论的条件下,康普顿散射(即非自旋反转的 $\Delta n = 0$ 过程)截面仍然是比

拉曼散射截面大．因而，对不透明度的影响，也仍然比拉曼过程大．但是，从改变光子的能量角度看，$\Delta n = 0$ 过程只涉及 (4) 式中已略掉的一些较小的项，而拉曼散射引起的能量改变要大得多．当辐射不足以发生对产生过程时，拉曼过程就是辐射在磁场电子气中能量转化的一种较主要的机制．因而，例如对于辐射(如X射线)在强磁场电子气中的扩散，拉曼散射是其能谱变化的一个重要原因，是这类辐射转移问题中不能不考虑的．

由(6)，(7) 及 (9) 式可见，散射光的角分布在平行(或反平行)于磁场的方向较强，即一些拉曼过程倾向于把辐射转换到纵向，这一点是同磁场中电子的一种主要辐射——迴旋加速辐射——很不相同的，迴旋加速辐射的角分布是在横向较强．

最后，讨论在天体条件下受激拉曼散射的可能作用问题．我们知道，受激拉曼散射不同于其他受激发射，不需要造成粒子数反转的条件，对工作能级没有太多的要求，在多种情况都可实现，发生受激拉曼散射的阈条件是[3]

$$\frac{16\pi^2 c^2}{\hbar\omega_f^3}\frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{I_i}{\Gamma} > \sigma_a, \tag{10}$$

其中 Γ 是工作能级的宽度，I_i 是入射光的能流，σ_a 是对散射光的吸收截面．在高能天体条件下，常常有非热致辐射，具有非黑体的连续谱，也有线状谱．若用等效辐射温度 T 来描写它们的强度，则当 $T \gg \hbar\omega_i/k$ 时，$\frac{I_i}{\Gamma} \simeq \frac{kT}{\pi^2 c^2}\omega_i^2$．在电子气中 σ_a 主要由康普顿散射引起，所以 $\sigma_a \sim r_0^2$．用这些条件，并将截面 (8) 式代入 (10) 式，则得

$$\left(\frac{\omega_i}{\omega_f}\right)^2\left(\frac{H}{H_c}\right)\frac{mc^2}{\hbar\omega_i}\frac{kT}{mc^2}\left(\frac{1}{1-\frac{H}{H_c}\frac{mc^2}{\hbar\omega_i}}\right)^2 > 1,$$

X射线脉冲星发射谱的辐射温度为 10^8—10^9K．所以，当 $\hbar\omega_i$ 近于 $\frac{H}{H_c}mc^2$，并且发射线的辐射温度有上述量级或更高时，阈条件是可能满足的．这个估计当然是较为粗糙的，但其数量级大体是成立的．譬如对于 1 千电子伏的软X射线发射线，当 $T \sim 10^8$K，若磁场达到 10^{10} 高斯，就可能引起受激的拉曼散射．

对于连续谱的辐射转移问题，拉曼散射的作用是在辐射转移方程中增加一个源项．任何散射过程的源项中都包含正过程及逆过程两部分[6]，新的源项中也应含有拉曼散射(自发的及受激的)的正过程及逆过程．所以，总的效果要由正、逆过程之差决定，粗略地说取决于辐射的温度及电子体系温度之差，这种情况，与上段关于发射线的讨论，是不相同的．但关于阈条件的估计，在这里仍然有物理意义，它是关于拉曼过程源项的重要性的估计．当这个条件成立时，拉曼过程源项才有可能与其他源项相比拟，而不能加以忽略．

目前，对于来自星际气体的射电波段的受激发射，已经初步得到了证实，进行了不少的观测及理论工作，而对于光波段或更短波段上的受激发射，还没有开展什么观测工作．综合上述分析，具有强磁场的X射线星，就有可能存在这类受激发射，或者是受激发射对辐射转移起重要作用的一种天体．

参 考 文 献

[1] M. Ruderman, *Ann. Rev. Astro. Astrophys.*, **10** (1972), 427.
[2] V. Canuto, J. Lodenquai, M. Ruderman, *Phys. Rev.*, **D3** (1971), 2303.
[3] R. B. Dennis *et al.*, *Proc. Roy. Soc.*, **A331** (1972), 203.
[4] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (1959).
[5] T. Erber, *Rev. Mod. Phys.*, **28** (1966), 628.
[6] J. P. Cox, Principles of Stellar Structure, Vol. 1 (1968).

RAMAN SCATTERING OF RELATIVISTIC ELECTRONS IN A STRONG MAGNETIC FIELD

FANG LI-ZHI LIU YONG-ZHEN