

激光等离子体的单频及双频加热*

谭维翰 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文在导出激光等离子体电子、离子耦合方程的基础上求得了单频加热无穷行列特征矩阵的准确解;又求得了在双频加热情况下各种不稳振荡的阈值与增长率,并与单频加热作了比较。

一、引 言

激光作用于固体靶表面,产生高温高密度的等离子体,对激光表现出很强的吸收。除了经典吸收外,当激光功率密度超过一定阈值时,还有各种反常吸收。等离子体的密度、温度分布也是很均匀的,并在加热的过程中发生急剧的变化。要将这些因素都包括进去,将是很复杂的。文献[3, 5]关于激光等离子体单频加热的线性理论中采用温度、密度为均匀分布且线度为无限大的等离子体模型。本文也采用这种模型,作了进一步的工作。

二、电子、离子耦合方程推导

Silin^[1] 最早研究了电子等离子体波、离子声波与电磁波的耦合问题,他是从冷的等离子体动力学方程出发,并略去各种阻尼。Dubois, Goldman^[2] 估算了在弱场作用下,并将Landau 阻尼包括进去,激发参量不稳振荡的阈值。Nishikawa^[3] 对弱场情况下电子、离子耦合方程进行了研究。他讨论了耦合方程特征矩阵的近似解。他做的近似是两方面的,一方面外加电场较弱,可采用近似:

$$\exp \left[i \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \mathbf{k} \cdot \iint \mathbf{E} dt dt \right] \simeq 1 + i \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \mathbf{k} \cdot \iint \mathbf{E} dt dt.$$

另一方面在解耦合方程的无穷行列特征矩阵时,只抽取其中贡献较大的行列作成简化的矩阵,其他行列的贡献均略去。关于弱场近似, Jackson^[4], Dawson^[5] 将

$$\exp \left[i \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \mathbf{k} \cdot \iint \mathbf{E} dt dt \right]$$

用贝塞耳函数展开,强场也就可以适用了。关于不采用简化的矩阵,而是求无穷行列特征矩阵的解,就是我们在下一节所要讨论的。为了分析在单频激励及双频激励情况下的各种不稳振荡,我们在附录一中给出了电子、离子耦合方程推导。这里将结果写下来:

* 1975年1月18日收到;1976年2月25日收到修改稿。

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_e \frac{d}{dt} + \omega_{ke}^2 \right] n_{ek}(t) = \omega_{pe}^2 z n_{ik}(t) \left\{ \exp \left[i \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \iint \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} dt dt \right] - 1 \right\},$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_i \frac{d}{dt} + \omega_{ki}^2 \right] z n_{ik}(t) = \omega_{pi}^2 n_{ek}(t) \left\{ \exp \left[-i \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \iint \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} dt dt \right] - 1 \right\}, \quad (1)$$

$$n_{ek}(t) = \sum n_{ek\omega} \exp(-i\omega t), \quad n_{ik}(t) = \sum n_{ik\omega} \exp(-i\omega t),$$

式中 $n_{ek}(t)$, $n_{ik}(t)$ 分别为电子、离子的密度起伏, 其他记号的涵义见附录一.

三、单频加热

1. 单频加热特征矩阵的准确解

对于单频加热, 电子离子耦合方程(1)中的指数项

$$\exp \left[i \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \iint k_{11} E dt dt \right] = \exp(-i\mu \sin \omega_0 t), \quad \mu = \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \frac{E_0 k_{11}}{\omega_0^2},$$

按贝塞耳函数展开便得 $\exp(-i\mu \sin \omega_0 t) = \sum J_n(-\mu) \exp(in\omega_0 t)$. 代入(1)式并将 z 并到 n_{ik} 中, 便得

$$(-\omega^2 - i\omega\nu_e + \omega_{ke}^2) n_{ek\omega} = \omega_{pe}^2 \left(\sum_n J_n(-\mu) n_{ik\omega+n\omega_0} - n_{ik\omega} \right),$$

$$(-\omega^2 - i\omega\nu_i + \omega_{ki}^2) n_{ik\omega} = \omega_{pi}^2 \left(\sum_n J_n(\mu) n_{ek\omega+n\omega_0} - n_{ek\omega} \right). \quad (2)$$

令

$$a_{m,m+n} = \frac{\omega_{pe}^2 (J_n(-\mu) - \delta_{0,n})}{\omega_{ke}^2 - i(\omega + m\omega_0)\nu_e - (\omega + m\omega_0)^2} = \frac{\theta_n}{\chi_m},$$

$$b_{m,m+n} = \frac{\omega_{pi}^2 (J_n(\mu) - \delta_{0,n})}{\omega_{ki}^2 - i(\omega + m\omega_0)\nu_i - (\omega + m\omega_0)^2} = \frac{\bar{\theta}_n}{\bar{\chi}_m}, \quad (3)$$

式中 $\delta_{0,n} = 1$, 当 $n = 0$; $\delta_{0,n} = 0$, 当 $n \neq 0$. (2) 式可写为

$$n_{ek\omega+m\omega_0} = \sum_n a_{m,m+n} n_{ik\omega+(m+n)\omega_0},$$

$$n_{ik\omega+m\omega_0} = \sum_n b_{m,m+n} n_{ek\omega+(m+n)\omega_0}. \quad (4)$$

由(3)式容易看出, 当 ω 用 $\omega + \omega_0$ 代替后, 有如下的关系:

$$a_{m,m+n}(\omega + \omega_0) = a_{m+1,m+1+n}(\omega),$$

$$b_{m,m+n}(\omega + \omega_0) = b_{m+1,m+1+n}(\omega). \quad (5)$$

(4) 式是关于 $n_{ek\omega+m\omega_0}$, $n_{ik\omega+m\omega_0}$ 无穷元线性方程组. 有解的条件, 应是(4)式所对应的无穷行列特征行列式 $\Delta(\omega)$ 为零. 由(5)式看出, 当 ω 用 $\omega + \omega_0$ 代换后, 只是将 $\Delta(\omega)$ 的行、列沿对角线方向推移一下, 其值不变. 这就证明了 $\Delta(\omega + \omega_0) = \Delta(\omega)$, 亦即 $\Delta(\omega)$ 为 ω 的周期函数, 周期为 ω_0 . 又由(3)式, $a_{m,m+n}$, $b_{m,m+n}$ 有一系列的极点. 这些极点就是 $\Delta(\omega)$ 的极点, 即下式所表示的:

$$\omega = \begin{cases} -m\omega_0 - i\nu_e/2 \pm \sqrt{\omega_{ke}^2 - \nu_e^2/4} = -m\omega_0 \pm \omega_e^{\mp}, \\ -m\omega_0 - i\nu_i/2 \pm \sqrt{\omega_{ki}^2 - \nu_i^2/4} = -m\omega_0 \pm \omega_i^{\mp}. \end{cases} \quad (6)$$

根据刘维定理^[6], 一个没有极点的有界解析函数只能是一常数. 如果将(6)式所表示

的极点从特征行列式 $\Delta(\omega)$ 中减去, 则剩下来的只能是一常数. 故 $\Delta(\omega)$ 可表示为

$$\Delta(\omega) = 1 + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_m}{\omega + m\omega_0 - \omega_e^+} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_m}{\omega + m\omega_0 + \omega_e^-} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{C_m}{\omega + m\omega_0 - \omega_i^+} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{D_m}{\omega + m\omega_0 + \omega_i^-}. \quad (7)$$

又由于 $\Delta(\omega)$ 是一个以 ω_0 为周期的函数, 故有 $A_m = A$, $B_m = B$, $C_m = C$, $D_m = D$.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_e^+} (\omega - \omega_e^+) \Delta(\omega), & B &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_e^-} (\omega + \omega_e^-) \Delta(\omega), \\ C &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_i^+} (\omega - \omega_i^+) \Delta(\omega), & D &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_i^-} (\omega + \omega_i^-) \Delta(\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

根据(7)和(8)式, 使得

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= 1 + \frac{\pi}{\omega_0} \left[A \cot \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_e^+) + B \cot \frac{\pi}{\omega_0} (\omega + \omega_e^-) \right. \\ &\quad \left. + C \cot \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_i^+) + D \cot \frac{\pi}{\omega_0} (\omega + \omega_i^-) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式就是特征行列式 $\Delta(\omega)$ 的解析表式. (8)式给出了计算 A, B, C, D 的公式, 但使用起来不方便. 附录二给出了 A, B, C, D 的近似值, 代入(9)式后, 其结果为

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= 1 + \frac{(\Delta(0) - 1) \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_e^+ \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_e^- \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_i^+ \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_i^-}{\sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_e^+) \sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega + \omega_e^-) \sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_i^+) \sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega + \omega_i^-)}, \\ \Delta(0) - 1 &= \frac{K\delta}{\omega_e \omega_{ki}^2 (\delta^2 + \nu_e^2/4)}. \end{aligned} \quad (10)$$

当 ω 很小时, (10)式便过渡到 Nishikawa^[3] 得到的近似结果:

$$\Delta(\omega) \simeq 1 + \frac{K\delta}{\omega_e} \frac{1}{(\omega^2 + i\nu_i \omega - \omega_{ki}^2)(\omega^2 + i\nu_e \omega - \bar{\delta}^2)}, \quad (11)$$

式中

$$\bar{\delta}^2 = \delta^2 + \nu_e^2/4.$$

Nishikawa 利用(11)式计算了参量、双流不稳的阈值与增长率. 现用 Nyquist 图来分析这两种不稳, 为分析双频加热的不稳振荡作准备.

2. 参量与双流不稳的 Nyquist 图分析

不稳振荡的求解问题, 就是确定特征行列式 $\Delta(\omega)$ 是否存在不稳定的特征根, 亦即根的虚部是大于零还是小于零的. 若采用复变数

$$s = -i(\omega + i\gamma) = -i\omega + \gamma$$

表示特征根, 则不稳振荡

$$\exp(st) = \exp(\gamma t - i\omega t)$$

将出现在 s 的右半平面 ($\gamma > 0$), 见图 1. 用 Nyquist 作图法^[7]来分析这个问题是合适的. 该作图法的数学基础是一个关于解析函数 $f(s)$ 的定理^[8,9]:

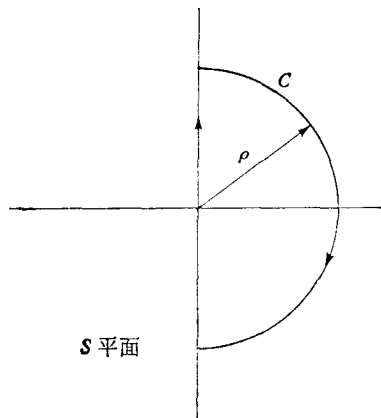


图 1

“如果 $f(s)$ 在一条闭路线 C 的内部有 n 个单零点和 m 个单极点(每一个 k 重零点或 k 重极点就分别算作 k 个单零点或 k 个单极点), 那末, 当 s 以顺时针方向沿着 C 转动一圈时, 向量 $f(s)$ 也就以顺时针方向绕原点转动 $n-m$ 圈”.

现将这定理应用于分析参量不稳与双流不稳. 特征根由 $\Delta(\omega) = 0$ 来确定. 换变数 $s = -i\omega$, 则由 (11) 式得

$$G(s) = (s^2 + \nu_i s + \omega_{ki}^2)(s^2 + \nu_e s + \delta^2) + \frac{k\delta}{\omega_e} = 0, \quad (12)$$

将 ω_{ki} 简写为 ω_i , 并令 $k_c = -\frac{\omega_e}{\delta} \omega_i^2 \delta^2$, 则 $G(s)$ 可写为

$$G(s) = s^4 + (\nu_e + \nu_i)s^3 + (\omega_i^2 + \delta^2 + \nu_e \nu_i)s^2 + (\nu_i \delta^2 + \nu_e \omega_i^2)s + \frac{k - k_c}{\omega_e} \delta. \quad (13)$$

$G(s)$ 在复平面的有限区域没有极点. 在虚轴上 $s = iy$, 代入 (13) 式, 并令 $G(s)$ 的实部与虚部分别为 R 与 I , 于是有

$$R = y^2[y^2 - (\omega_i^2 + \delta^2 + \nu_e \nu_i)] + \frac{k - k_c}{\omega_e} \delta, \quad (14)$$

$$I = i[-(\nu_e + \nu_i)y^3 + (\nu_i \delta^2 + \nu_e \omega_i^2)y].$$

在复平面 $G = R + iI$ 内作图 (见图 2), 便得出当 s 由 $-i\infty \rightarrow 0 \rightarrow i\infty$ 及由 $i\infty \rightarrow -i\infty$ 各段的轨迹.

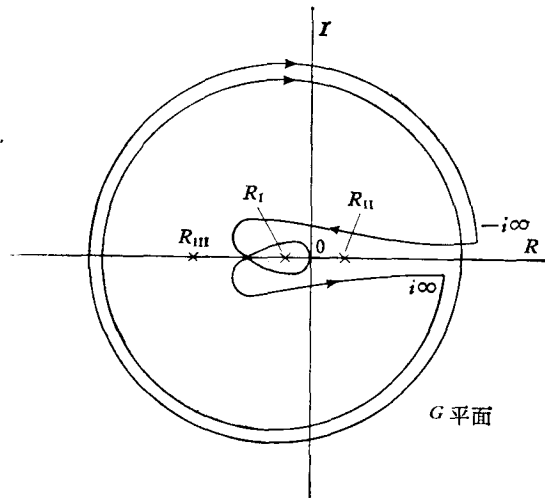


图 2

图 2 中原点取在 $k - k_c = 0$, 即入射激光强度等于双流不稳的阈值强度的地方. 现在来看各段轨迹的走向. 当 s 由 $-i\infty \rightarrow 0$, 这一段在 G 平面内的轨迹两次与实轴相交, 交点由 $I = 0$ 给出:

$$y = 0, \quad (15)$$

$$y = -\sqrt{\frac{\nu_i \delta^2 + \nu_e \omega_i^2}{\nu_e + \nu_i}}.$$

这两点在实轴上的坐标分别为

$$R = 0, \quad (16)$$

$$R = -\frac{v_i \delta^2 + v_e \omega_i^2}{v_e + v_i} \left[\frac{v_e \delta^2 + v_i \omega_i^2}{v_e + v_i} + v_e v_i \right].$$

由 $0 \rightarrow i\infty$ 的轨迹与由 $-i\infty \rightarrow 0$ 的轨迹为对称. 当 s 由 $i\infty$ 沿着无穷大半圆转至 $-i\infty$ 时, $G(s) \simeq s^4 = \rho^4 \exp(i4)$ 转了 4π 角.

参量 k 取什么值, 就决定了坐标原点处在什么地方. 若 $k > k_c$, 则坐标原点移至图 2 中 $R = R_{II}$ 的位置. 当原点处于 $R = R_I$ 的位置时, s 绕闭路 C 转一圈, 在 G 平面中的回路, 将先绕原点 R_I 逆时针方向转两圈 (s 由 $-i\infty \rightarrow 0 \rightarrow i\infty$), 然后又顺时针方向转两圈 (s 由 $i\infty$ 至 $-i\infty$). 总共转的圈数 $n - m = 0$, 在闭路 C 所包含的右半平面内, $G(s)$ 没有极点 $m = 0$, 故有 $n = 0$. 即在右半平面内没有零点, 这个区域是稳定的. 当原点处于 $R = R_{II}$ 的位置时, 回路先绕 R_{II} 逆时针方向转一圈, 再绕 R_{II} 顺时针方向转两圈, 总共转了一圈, 有一个不稳定根, 这就是双流不稳区, $k = k_c$ 为激发双流不稳振荡的阈值. 当原点处于 $R = \frac{k - k_c}{\omega_e} \delta = R_{III}$ 的位置时, 回路绕原点逆时针方向转零圈, 顺时针方向转两圈. 在这一区域, 有两个不稳振荡的根, 分别对应于参量不稳振荡的电子等离子体波与离子声波. 参量不稳的阈值由 (14) 和 (16) 式得出

$$\frac{k - k_c}{\omega_e} \delta = \frac{v_i \delta^2 + v_e \omega_i^2}{v_e + v_i} \left[\frac{v_e \delta^2 + v_i \omega_i^2}{v_e + v_i} + v_e v_i \right]. \quad (17)$$

由 (17) 式, 当 $v_e \gg \omega_i, v_i$ 时,

$$k \simeq \frac{\omega_e v_i}{\delta v_e} \delta^4; \quad \text{当 } \omega_i \gg v_e, v_i \text{ 时, } k \simeq \frac{\omega_e v_e v_i}{\delta} \left[\delta^2 + \frac{(\delta^2 - \omega_i^2)^2}{(v_e + v_i)^2} \right]. \quad (18)$$

四、双频加热

在文献 [10, 11] 中, 提出过双频共振加热的方案, 意即通过两个频率相近的激光的拍频激励离子声波, 而两个激光的频率又与等离子体频率相近, 激励电子等离子体波. 但正如前面指出的, 影响激光加热的因素很多, 这里只就双频加热引起的不稳振荡与单频加热作一比较分析.

双频加热的电矢量 $\mathbf{E}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t + \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t, \\ \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \iint \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} dt &= -\bar{\mu}_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t - \bar{\mu}_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t, \\ \bar{\mu}_1 &= \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \frac{k_{II} E_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2}, \quad \bar{\mu}_2 = \left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \frac{k_{II} E_2}{(\omega_2 + \omega_1)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式中 $\omega_2 - \omega_1, \omega_2 + \omega_1$ 为两个很接近的激光频率, $\omega_2 \gg \omega_1$. 因子

$$\begin{aligned} &\exp[-i\bar{\mu}_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t - i\bar{\mu}_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t] \\ &= \sum J_n(-\bar{\mu}_1) J_m(-\bar{\mu}_2) \exp[in(\omega_2 - \omega_1)t + im(\omega_2 + \omega_1)t]. \end{aligned}$$

如果 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ 很小, 略去高阶项. 并取近似 $J_0(-\bar{\mu}) \simeq 1, J_1(-\bar{\mu}) \simeq -\bar{\mu}/2$. 则电子、离

子的耦合方程(A20)为

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_e \frac{d}{dt} + \omega_{ke}^2 \right] n_{ek}(t) &= \omega_{pe}^2 z n_{ik}(t) (-i\bar{\mu}_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t \\ &\quad - i\bar{\mu}_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t); \\ \left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_i \frac{d}{dt} + \omega_{ki}^2 \right] z n_{ik}(t) &= \omega_{pi}^2 n_{ek}(t) (i\bar{\mu}_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t \\ &\quad + i\bar{\mu}_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t). \end{aligned}$$

在上式中将 z 并到 $n_{ik}(t)$ 中, 并将 $z\omega_{pe}^2(-i\bar{\mu}_1)$, $z\omega_{pe}^2(-i\bar{\mu}_2)$, $\omega_{pi}^2(i\bar{\mu}_1)$, $\omega_{pi}^2(i\bar{\mu}_2)$ 分别用 λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 来作标志. 于是有

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_e \frac{d}{dt} + \omega_{ke}^2 \right] n_{ek}(t) &= n_{ik}(t) [\lambda_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t + \lambda_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t], \\ \left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_i \frac{d}{dt} + \omega_{ki}^2 \right] n_{ik}(t) &= n_{ek}(t) [\mu_1 \cos(\omega_2 - \omega_1)t + \mu_2 \cos(\omega_2 + \omega_1)t]. \end{aligned} \quad (20)$$

对(20)式作傅里叶变换,

$$\begin{aligned} (\omega^2 + i\nu_e\omega - \omega_{ke}^2)n_{ek\omega} + \lambda_1(n_{ik\omega-\omega_1+\omega_1} + n_{ik\omega+\omega_2-\omega_1}) \\ + \lambda_2(n_{ik\omega-\omega_2-\omega_1} + n_{ik\omega+\omega_2+\omega_1}) &= 0, \\ (\omega^2 + i\nu_i\omega - \omega_{ki}^2)n_{ik\omega} + \mu_1(n_{ek\omega-\omega_2+\omega_1} + n_{ek\omega+\omega_2-\omega_1}) \\ + \mu_2(n_{ek\omega-\omega_2-\omega_1} + n_{ek\omega+\omega_2+\omega_1}) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$n_{ek\omega}, n_{ik\omega} = \int dt \exp(i\omega t) n_{ek}(t), n_{ik}(t).$$

根据(21)式, 并采用记号 $L_e(\omega) = \omega^2 + i\nu_e\omega - \omega_{ke}^2$, $L_i(\omega) = \omega^2 + i\nu_i\omega - \omega_{ki}^2$, 容易作出由贡献最大的行列组成的特征行列式 $\Delta(\omega)$:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= \begin{vmatrix} n_{ik\omega-\omega_1} & n_{ik\omega+\omega_1} & n_{ek\omega-\omega_1} & n_{ek\omega+\omega_1} \\ 1 & 0 & \mu_1/L_i(\omega - \omega_1) & \mu_2/L_i(\omega - \omega_1) \\ 0 & 1 & \mu_2/L_i(\omega + \omega_1) & \mu_1/L_i(\omega + \omega_1) \\ \lambda_1/L_e(\omega - \omega_2) & \lambda_2/L_e(\omega - \omega_2) & 1 & 0 \\ \lambda_2/L_e(\omega + \omega_2) & \lambda_1/L_e(\omega + \omega_2) & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - \frac{\lambda_1\mu_1}{L_i(\omega - \omega_1)L_e(\omega - \omega_2)} - \frac{\lambda_1\mu_1}{L_i(\omega + \omega_1)L_e(\omega + \omega_2)} \\ &\quad - \frac{\lambda_2\mu_2}{L_i(\omega + \omega_1)L_e(\omega - \omega_2)} - \frac{\lambda_2\mu_2}{L_i(\omega - \omega_1)L_e(\omega + \omega_2)} \\ &\quad + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{L_i(\omega + \omega_1)L_i(\omega - \omega_1)L_e(\omega + \omega_2)L_e(\omega - \omega_2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

由于 $L_e(\omega \pm \omega_2) \simeq \pm 2\omega_{ke}[\omega \pm (\omega_2 - \omega_{ke}) + i\nu_e/2] = \pm 2\omega_e(\omega \pm \delta + i\nu_e/2)$

$$\omega_e = \omega_{ke}, \quad \delta = \omega_2 - \omega_{ke},$$

$$\frac{1}{L_e(\omega + \omega_2)} + \frac{1}{L_e(\omega - \omega_2)} = -\frac{\delta}{\omega_e} \frac{1}{\omega^2 + i\nu_e\omega - \delta^2}, \quad \delta^2 = \delta^2 + \nu_e^2/4.$$

又假定双频的强度是近乎相等的, 故有 $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$, 于是有

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= 1 + [2\delta\lambda\mu(\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_{ki}^2 + i\nu_i\omega)] / \{\omega_e(\omega^2 + i\nu_e\omega - \delta^2)[(\omega - \omega_1)^2 \\ &\quad + i\nu_i(\omega - \omega_1) - \omega_{ki}^2][(\omega + \omega_1)^2 + i\nu_i(\omega + \omega_1) - \omega_{ki}^2]\}. \end{aligned} \quad (23)$$

令 $k = 2\lambda\mu$, 由 $\Delta(\omega) = 0$, 便得出

$$\begin{aligned} & ((\omega - \omega_1)^2 + i\nu_i(\omega - \omega_1) - \omega_{ki}^2)((\omega + \omega_1)^2 + i\nu_i(\omega + \omega_1) - \omega_{ki}^2)(\omega^2 + i\nu_e\omega - \delta^2) \\ & + \frac{\delta k}{\omega_e}(\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_{ki}^2 + i\nu_i\omega) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

上式前面三个括号的乘积又可以写为

$$\begin{aligned} & (\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_{ki}^2 + i\nu_i\omega)(\omega^2 + \omega_1^2 - \omega_{ki}^2 + i\nu_i\omega)(\omega^2 + i\nu_e\omega - \delta^2) \\ & - \omega_i^2(\omega^2 + i\nu_e\omega - \delta^2)(2\omega + i\nu_i)^2. \end{aligned}$$

现将 $\omega_{ki}^2 - \omega_1^2$ 记为 $\bar{\omega}_i^2$, 并令 $s = -i\omega$, 则 (24) 式可写为

$$\begin{aligned} & (s^2 + \nu_i s + \bar{\omega}_i^2) \left[(s^2 + \nu_e s + \delta^2)(s^2 + \nu_i s + \bar{\omega}_i^2) + \frac{\delta k}{\omega_e} \right] \\ & + (s^2 + \nu_e s + \delta^2)(2s + \nu_i)^2 \omega_i^2 = 0. \end{aligned}$$

用 $(s^2 + \nu_i s + \bar{\omega}_i^2)$ 除上式, 则得出双频加热情况下的 $G(s)$ 为

$$\begin{aligned} G(s) = & (s^2 + \nu_e s + \delta^2)(s^2 + \nu_i s + \bar{\omega}_i^2 + 4\omega_i^2) + \frac{\delta k}{\omega_e} \\ & + 4\omega_i^2(\nu_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2) \left(1 + \frac{(\nu_e - \nu_i)s + (\delta^2 - \bar{\omega}_i^2)}{s^2 + \nu_i s + \bar{\omega}_i^2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

(25) 式的前两项就是单频加热的特征式, 后面一项才是双频加热对单频加热的修正. 这后一项有一对极点

$$s = -\nu_i/2 \pm \sqrt{\nu_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2}. \quad (26)$$

当 $\bar{\omega}_i^2 \geq 0$, 这一对极点不在右半平面, 于是当 s 绕右半平面亦即图 1 闭路 C 转一圈, 相应的 Nyquist 图绕原点转的总圈数, 就是 $G(s)$ 在右半平面内的零点个数. 但当 $\bar{\omega}_i^2 < 0$ 时, 由 (26) 式表示的一对极点中有一个极点已进入右半平面, 另一个仍留在左半平面, 这时 $G(s)$ 在右半平面的零点个数就是 Nyquist 图绕原点转的总圈数加 1.

当激光功率为零的情况下, 不可能激发起不稳振荡, $G(s)$ 在右半平面是没有零点的. 由 (25) 式看出, $G(s)$ 在 $|s| \rightarrow \infty$ 的行为与单频加热的情形一致, 对应的 Nyquist 图顺时针方向绕原点转两圈, 在离开 ∞ 区域后, 也应逆时针方向绕原点转两圈(当 $\bar{\omega}_i^2 > 0$) 或三圈(当 $\bar{\omega}_i^2 < 0$) 才能使得 $G(s)$ 在右半平面内没有零点. 实例计算证明了这一点. 图 3—6 为 G 平面内的 Nyquist 图, 在 (25) 式中令 $s = iy$, 便得出 $G(s)$ 的实部 $\mathcal{R}(y)$ 与虚部 $\mathcal{I}(y)$ 分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(y) = & y^2(y^2 - W_3) + W_5 + \frac{\delta k}{\omega_e} + 4\omega_i^2(\nu_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2) \frac{(\delta^2 - \bar{\omega}_i^2)(\bar{\omega}_i^2 - y^2) + \nu_i(\nu_e - \nu_i)y^2}{\nu_i^2 y^2 + (\bar{\omega}_i^2 - y^2)^2}, \\ \mathcal{I}(y) = & -i(\nu_e + \nu_i)y \left[y^2 - W_2 + W_4 \frac{(\nu_i - \nu_e)(\bar{\omega}_i^2 - y^2) + \nu_i(\delta^2 - \bar{\omega}_i^2)}{\nu_i^2 y^2 + (\bar{\omega}_i^2 - y^2)^2} \right], \\ W_2 = & \frac{(\bar{\omega}_i^2 + 4\omega_i^2)\nu_e + \delta^2\nu_i}{\nu_e + \nu_i}, \quad W_3 = \delta^2 + \bar{\omega}_i^2 + 4\omega_i^2 + \nu_e\nu_i, \\ W_4 = & 4\omega_i^2 \frac{(\nu_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2)}{\nu_e + \nu_i}, \quad W_5 = \delta^2(\bar{\omega}_i^2 + 4\omega_i^2) + 4\omega_i^2(\nu_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2). \end{aligned} \quad (27)$$

图 3—6 的参量为 $\Lambda^2 = \frac{E^2}{4\pi n k T_e} = 0$, $\omega_0 = 1.1$, $\omega_{pe} = 1$, $k\lambda_D = 0.2$,

$$m_i/m_e = 100, \quad T_e \gg T_i, \quad \nu_{ei} = \nu_{ii} = 0.$$

将 ω_1 表示为 $\omega_1 = \omega_{ki} \times D/5$. 图 3—6 的 D 值分别为 0, 1, 3, 6. 图 3, $D = 0$ 为单频激励的 Nyquist 图. 图 4, $D = 1$ 为双频激励的 Nyquist 图, 但 ω_1 较小, 仍保持单频激励的特点. 图 5, $D = 3$, ω_1 已增加得较大, Nyquist 图发生较大的改变, 但 $\bar{\omega}_1^2 = \omega_{ki}^2 - \omega_1^2 > 0$, Nyquist 图与实轴只有一个交点, 绕原点的圈数, 仍为顺时针两圈, 逆时针两圈. 图 6, $D = 6$, $\bar{\omega}_1^2 = \omega_{ki}^2 - \omega_1^2 < 0$, Nyquist 图与实轴有两个交点, 绕原点的圈数, 为顺时针两圈, 逆时针三圈. 这时已存在四个区域; 即稳定区, 没有不稳根; 向右为参量不稳区, 有两个不稳根; 向左为双流不稳区, 有一个不稳根; 再向左为双流参量不稳区, 有三个不稳根. 作为一个例子, 我们将 Δ^2 取值为 3.5, 其他参数不变. 这样, G 平面的原点, 就由稳定区移至具有三个不稳的双流参量不稳区. 将这些参数代到 (25) 式中, 并解 $G(s) = 0$ 的根. 这是一个关于 s 的 6 次方程. 数值计算结果为

	1	2	3	4
实 部	0.20446×10^{-1}	-0.23879×10^{-1}	-0.75073×10^{-1}	0.72534×10^{-1}
虚 部	0	0	$+0.94325 \times 10^{-1}$	-0.94214×10^{-1}

	5	6
实 部	0.72534×10^{-1}	-0.75073×10^{-1}
虚 部	0.94214×10^{-1}	-0.94325×10^{-1}

上面第 1 个根为双流不稳根, 第 4 和第 5 为参量不稳根, 其他均为稳定的根. 图 3—6 在 ∞ 区的两圈与图 2 同, 在图 3—6 中已略去.

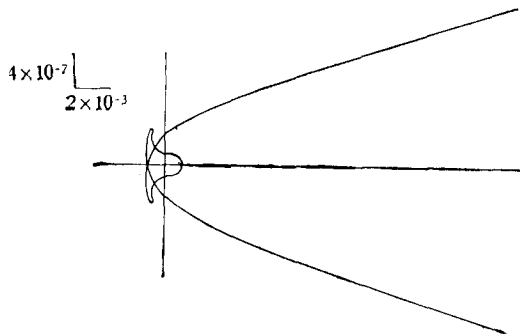


图 3

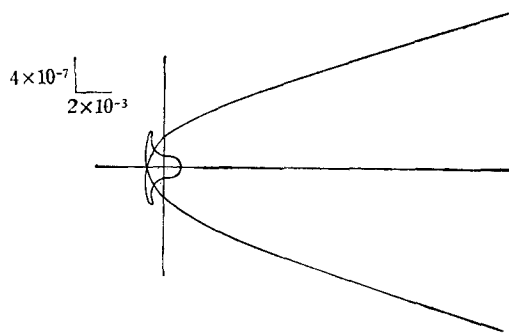


图 4

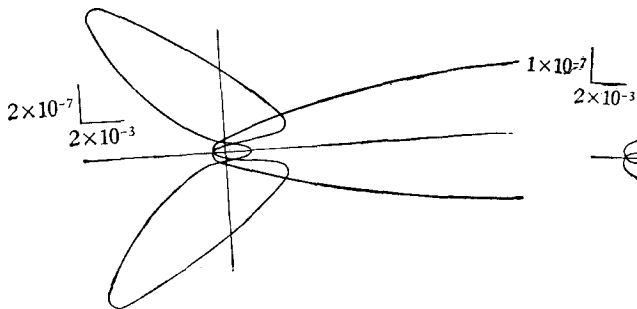


图 5

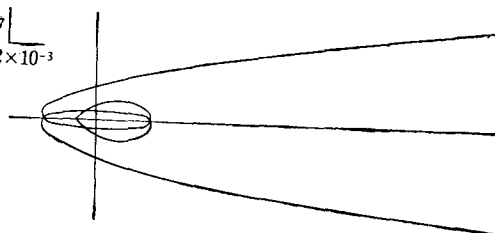


图 6

下面我们比较详细讨论各种不稳振荡的阈值与增率, 并与单频激励情况下进行比较.

1. 双流不稳

由(27)式的虚部 $\Im(y) = 0$, 定出 Nyquist 图与实轴的交点的 y 值. 每一交点代表向一种不稳振荡的过渡, 将交点的 y 值代入实部 $\Re(y) = 0$ 中, 便得出产生这种不稳振荡的阈值. 由 $\Im(y) = 0$ 可得

$$y^2 - \frac{v_i \bar{\omega}_i^2 + v_e(\bar{\omega}_i^2 + 4\omega_1^2)}{v_e + v_i} + 4\omega_1^2(v_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2) \frac{v_e(y^2 - \bar{\omega}_i^2) - v_i y^2 + v_i \bar{\omega}_i^2}{(v_e + v_i)(v_i^2 y^2 + (y^2 - \bar{\omega}_i^2)^2)} = 0. \quad (28)$$

像单频激励情形一样, $y = 0$ 这个根就是由稳定区向双流不稳区过渡的一个根. 将 $y = 0$ 代到 $\Re(y) = 0$ 中, 便得出产生双流不稳的阈值为

$$k = -\frac{\omega_e}{\delta} (\bar{\omega}_i^2 \bar{\omega}_i^2 + \omega_1^2 v_i^2 \bar{\omega}_i^2 / \bar{\omega}_i^2). \quad (29)$$

改变 ω_1 , 求 k 的极值. 当 $\bar{\omega}_i^2 = \pm \omega_{ki} v_i$, k 具有极小与极大. k 随 ω_1 变化的曲线如图 7. 图 7 的参数与图 6 同.

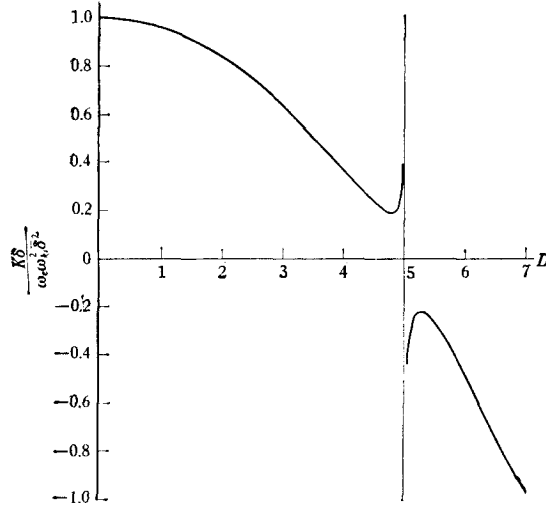


图 7

$$\text{当 } \bar{\omega}_i^2 = \omega_{ki} v_i, \quad k_{\min} = -\frac{\omega_e}{\delta} \bar{\omega}_i^2 (2v_i \omega_{ki} - v_i^2). \quad (30)$$

与单频激励情况下双流不稳阈值 $k = -\frac{\omega_e}{\delta} \bar{\omega}_i^2 \omega_{ki}^2$ 相比, 比值为

$$\frac{2\omega_{ki} v_i - v_i^2}{\omega_{ki}^2} = (2 - v_i / \omega_{ki}) \frac{v_i}{\omega_{ki}} \simeq \frac{2v_i}{\omega_{ki}}, \quad (31)$$

即下降了 $2v_i / \omega_{ki}$ 倍. 在阈值附近的增率, 也可以由(27)式求得

$$\left[v_e(\bar{\omega}_i^2 + 4\omega_1^2) + v_i \bar{\omega}_i^2 + 4\omega_1^2(v_i^2/4 - \bar{\omega}_i^2) \frac{v_e \bar{\omega}_i^2 - v_i \bar{\omega}_i^2}{\bar{\omega}_i^4} \right] \delta s + \delta \left(\frac{\delta k}{\omega_e} \right) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{ds}{dk} = -\frac{\omega_e}{\delta} \frac{1}{\bar{\omega}_i^2 v_e + \bar{\omega}_i^2 v_i + \frac{4\omega_1^2}{\bar{\omega}_i^4} \left[\frac{v_e v_i^2 \bar{\omega}_i^2 - v_i^3 \bar{\omega}_i^2}{4} + \bar{\omega}_i^2 v_i \bar{\omega}_i^2 \right]}.$$

将 k 为极小时的 $\bar{\omega}_i^2 = \omega_{ki}^2 \nu_i$, $\omega_i^2 = \omega_{ki}^2(1 - \nu_i/\omega_{ki}) \simeq \omega_{ki}^2$, 代入 (32) 式, 并设 $\omega_{ki} \gg \nu_i$, 使得

$$\frac{ds}{dk} \simeq \frac{-\omega_e}{4\omega_{ki}\delta\bar{\omega}_i^2}. \quad (33)$$

与单频激励时在阈值附近的增率 $\frac{ds}{dk} \simeq -\frac{\omega_e}{\delta} \frac{1}{\omega_{ki}^2 \nu_e + \bar{\omega}_i^2 \nu_i} \simeq -\frac{\omega_e}{\delta \bar{\omega}_i^2 \nu_i}$ 比较, 减小了 $\frac{4\omega_{ki}}{\nu_i}$ 倍.

2. 参量不稳(当 $\bar{\omega}_i^2 > 0$) 或参量双流不稳 ($\bar{\omega}_i^2 \leq 0$)

(28) 式的第二个方程. 当 $\nu_e \gg \nu_i$, ω_i 可近似求解. 其中一个根在

$$W_i = \frac{\nu_i \bar{\omega}_i^2 + \nu_e (\bar{\omega}_i^2 + 4\omega_i^2)}{\nu_e + \nu_i} \simeq \frac{\nu_e \nu_i}{4}$$

附近. 按 (28) 式这个根可表示为

$$y_i^2 \simeq W_i + \Delta, \quad \Delta = 4\omega_i^2 \bar{\omega}_i^2 \frac{1}{W_i - \bar{\omega}_i^2} \left(1 + \frac{\nu_i \bar{\omega}_i^2 / \nu_e}{W_i - \bar{\omega}_i^2}\right). \quad (34)$$

将这结果代入实部 $\mathcal{R}(y) = 0$, 经过一些演算后, 使得

$$k_i / \left(\frac{\delta^2 \omega_{ki}^2 \omega_e}{\delta} \right) \simeq \frac{\nu_i \bar{\omega}_i^2}{\nu_e \omega_{ki}^2} + 12 \frac{\omega_i^2 \bar{\omega}_i^2}{\omega_{ki}^2 (W_i - \bar{\omega}_i^2)}. \quad (35)$$

这就是参量不稳的阈值 k_i 以 $\frac{\delta^2 \omega_{ki}^2 \omega_e}{\delta}$ 为单位后的近似结果. 图 8 给出了按 (27) 式的 $\mathcal{R}(y) = 0$ 实际计算的参量不稳阈值 k_i 曲线, 也是以 $\frac{\delta^2 \omega_{ki}^2 \omega_e}{\delta}$ 为单位的. 近似结果 (35) 式的第二项为双频激励对单频激励的修正. 当 ω_i^2 比较小, $\bar{\omega}_i^2 > 0$ 的情况下, 这是一个小的符号为正的修正, 故曲线在开始阶段上升; 但当 ω_i^2 比较大, $\bar{\omega}_i^2 < 0$, 这个修正项改变了符号, 故曲线在后一部份向下降.

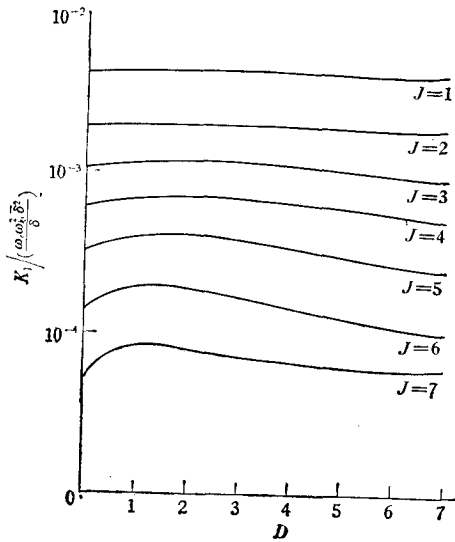


图 8

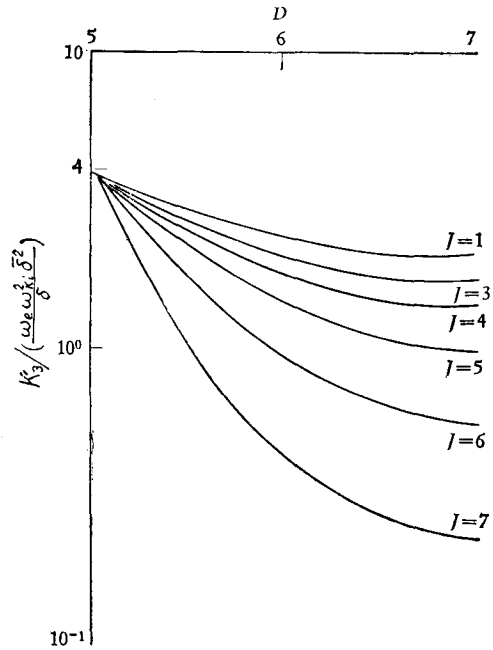


图 9

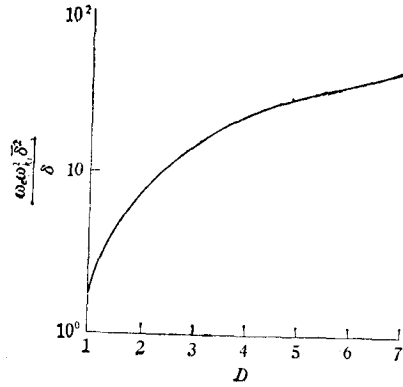


图 10

由(35)式还可以求出在阈值附近的增率 γ 应满足:

$$k_1 / \left(\frac{\delta^2 \omega_{ki}^2 \omega_e}{\delta} \right) \simeq \frac{(\nu_i + 2\gamma) \delta^2}{(\nu_e + 2\gamma) \omega_{ki}^2} + 12 \frac{\omega_i^2 \bar{\omega}_i^2}{\omega_{ki}^2 (W_2 - \bar{\omega}_i^2)}. \quad (36)$$

这与单频激励情况下在参量不稳阈值附近的增率相近。但在超过阈值很多的情况下激励时,增率有增加。结果为

$$\gamma^2 \simeq \frac{-\delta^2}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k\delta}{\omega_e} + 4\omega_i^2(-\bar{\omega}_i^2)} \frac{\delta^2}{-\frac{\delta^2}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k\delta}{\omega_e}}}. \quad (37)$$

故当 $(-\bar{\omega}_i^2) > 0$ 时,增率比单频激励情况下增加了。

当 $\bar{\omega}_i^2 \leq 0$ 时,我们讨论(28)式的另一个根。

先看 $\bar{\omega}_i^2 = 0$ 的情况,这时(28)式给出近似解

$$\gamma_2^2 \simeq \frac{\omega_i \nu_i}{\sqrt{1 + \frac{4\omega_i^2 \nu_e}{\delta^2 \nu_i}}}. \quad (38)$$

将这结果代入 $\mathcal{R}(\gamma) = 0$, 经演算后,便得出相应的阈值公式

$$k_2 / \left(\frac{\delta^2 \omega_{ki}^2 \omega_e}{\delta} \right) \simeq -4 + \frac{\nu_i}{\omega_{ki}} \left(2 + \frac{4\omega_i^2 \nu_e}{\nu_i \delta^2} \right) / \sqrt{1 + \frac{4\omega_i^2 \nu_e}{\nu_i \delta^2}}. \quad (39)$$

图 9 是按(27)式实际计算的 $k_2 / \left(\frac{\delta^2 \omega_{ki}^2 \omega_e}{\delta} \right)$ 曲线。起点的纵坐标与上式给出的值是相近的。

现在讨论 $-\bar{\omega}_i^2 \gg \nu_i^2$ 的情形,这时由(28)式给出的近似结果为

$$\gamma_3^2 \simeq \bar{\omega}_i^2 + 2\omega_i \sqrt{\frac{-\bar{\omega}_i^2}{1 + \frac{\nu_e(\omega_{ki}^2 + 3\omega_i^2)}{\nu_i \delta^2}}}. \quad (40)$$

同样代入 $\mathcal{R}(\gamma) = 0$ 的表式中,便得出相应的阈值公式:

$$k_3 / \left(\frac{\omega_e \omega_{ki}^2 \delta^2}{\delta} \right) \simeq -4 + \frac{4\omega_i^2}{\omega_{ki}^2} \left[1 - \left(1 - \frac{\sqrt{-\bar{\omega}_i^2}}{\omega_i} \right)^2 \right]. \quad (41)$$

(41) 式可说明图 9 曲线后一部份变化的情况。

现按 (39) 式求在阈值附近的增率 y .

$$\begin{aligned} \text{由于 } (s+y)^2 + v_i(s+y) + \omega_{ki}^2 &= s^2 + (v_i + 2y)s + (y^2 + v_i y + \omega_{ki}^2) \\ &\simeq s^2 + (v_i + 2y)s + (v_i y + \omega_{ki}^2), \end{aligned}$$

故具有增率 y 的确定参量 k 的公式, 可参照 (39) 式写出来, 只需将其中 v_i, ω_{ki}^2 分别换为 $v_i + 2y, v_i y + \omega_{ki}^2$ 即可.

$$k / \left(\frac{\omega_e \omega_{ki}^2 \bar{\delta}^2}{\delta} \right) \simeq -4 + 2 \frac{v_i + 2y}{v_i y + \omega_{ki}^2},$$

由此得出

$$y = \frac{\left(\frac{k\delta}{\omega_e \omega_{ki}^2 \bar{\delta}^2} + 4 \right) \frac{\omega_{ki}^2}{2} - v_i}{2 - \left(\frac{k\delta}{\omega_e \omega_{ki}^2 \bar{\delta}^2} + 4 \right) \frac{v_i}{2}}. \quad (42)$$

阈值公式 (39), (41) 及增率公式 (42) 是属于 $\omega_i^2 \leq 0$ 的情况下的参量不稳振荡的. 在单频激励情况下没有这种不稳振荡.

图 8—10 的参数为

$$\omega_0 = 110, \quad \omega_{pe} = 100, \quad m_i/m_e = 1800, \quad T_e \gg T_i, \quad v_{ei} = 2, \quad v_{ii} = 0,$$

$$k\lambda_D = J/30, \quad W_{11} = \frac{WI \times D}{5}.$$

这一组参数是考虑到物理条件^[5,13] $v_{ei}/\omega_{pe} \simeq 1/50, m_i/m_e = 1800, k\lambda_D$ 在 0.03—0.23 内变化而取定的. 而前面图 3—7 参数的取定, 则主要是为了作图的方便.

对于图 8—10 的参数来说, 是满足条件 $v_e \gg v_i, \omega_{ki}$ 的. 例如当 $k\lambda_D = 0.2$ 时, $v_e = 4.058, v_i = 0.0192, \omega_{ki} = 0.470$.

现将双频激励的结果小结如下:

1. 双流不稳阈值比单频激励下双流不稳阈值低很多, 但在阈值附近的增率亦有所下降.

2. 参量不稳 ($\omega_i^2 > 0$) 的阈值稍有降低, 但不算很大. 对阈值附近的增率影响不大, 但在超过阈值很多的情况下激励, 增率比相应的单频激励的增率大.

3. 在 $\omega_i^2 < 0$ 时, 上面的参量不稳就变成参量双流不稳. 另外, 还有一种在单频激励情况下不出现的参量不稳, 它的阈值差不多就是单频激励情况下双流不稳阈值 $-\frac{\omega_e \omega_{ki}^2 \bar{\delta}^2}{\delta}$ 的四倍 (当 $\omega_i^2 = 0$); 当 ω_i 继续增大, 这阈值也继续下降, 最低可到 0.23 倍, 这由图 9 可看出来.

附 录 一

参考文献 [12], 电子的 Vlasov 方程为

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} - \nabla \phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \right] f_e = 0, \quad \nabla^2 \phi = 4\pi e (\int f_e d^3v - z \int f_i d^3v). \quad (\text{A1})$$

这里 f_e 为电子的分布函数, f_{e1} 为偏离平衡的分布部份, f_{e0} 为平衡分布部份, $f_e = f_{e0} + f_{e1}$. 对于离子的分布函数, 也有同样的表示. 于是有

$$f_e = f_{e0} + f_{e1}, \quad f_i = f_{i0} + f_{i1}, \quad f_{e0} = n_{e0} (2\pi u_{e0}^2)^{-3/2} \exp(-u^2/2u_{e0}^2), \quad u_{e0}^2 = \frac{kT_e}{m_e};$$

$$f_{i0} = n_{i0} (2\pi u_{i0}^2)^{-3/2} \exp(-u^2/2u_{i0}^2), \quad u_{i0}^2 = \frac{kT_i}{m_i}. \quad (\text{A2})$$

(A1) 式中 $\mathbf{E}$ 为外加的辐射场, $\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}_0, \omega_0} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega_0} (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)$. 将 (A2) 式代入 (A1) 式, 并略去 f_{e1}, f_{i1} 的二级小量 $\nabla \phi \cdot \frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}_e}$, 于是有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e} \right) f_{e1} + \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} - \nabla \phi) \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}_e} = 0. \quad (\text{A3})$$

现设 $\mathbf{E}$ 的各个谐波分量均按同一方向传播, 即波矢 $\mathbf{k}_0$ 除了大小不同外, 方向是相同的. 现在我们考虑这样一些电子密度起伏, 波矢 $\mathbf{k}$ 在 $\mathbf{E}$ 方向的分量 $k_{\parallel}$ 为常数. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = k_{\parallel} E$. 并令

$$f_{e1} = F_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \exp\left(-i\mathbf{k} \cdot \int \frac{e\mathbf{E}}{m_e} dt dt\right), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_e - \int \frac{e\mathbf{E}}{m_e} dt. \quad (\text{A4})$$

将 (A4) 式代入 (A3) 式, 并考虑到在截止密度附近

$$k_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{pe}^2}/c \rightarrow 0,$$

于是有

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i\mathbf{k} \cdot \int \frac{e\mathbf{E}}{m_e} dt \right] F_e = \frac{e}{m_e} (\nabla \phi - \mathbf{E}) \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}_e} \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \int \frac{e\mathbf{E}}{m_e} dt dt\right). \quad (\text{A5})$$

因为 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = k_{\parallel} E$, 故 (A5) 式两端只与 $k_{\parallel}$ 有关, 与 $k_{\perp}$ 无关. 现将 $F_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ 按下式展开:

$$F_e(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \sum F_{ek}(\mathbf{u}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (\text{A6})$$

代入 (A5) 式, 使得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \right] F_{ek} + i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{u}} \frac{e}{m_e} \phi_k \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \int \frac{e\mathbf{E}}{m_e} dt dt\right) = 0,$$

$$\phi_k = \frac{4\pi e}{k^2} \left\{ n_{ek} \exp\left(-i\mathbf{k} \cdot \frac{e}{m_e} \int \mathbf{E} dt dt\right) - z n_{ik} \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \frac{ze}{m_i} \int \mathbf{E} dt dt\right) \right\}. \quad (\text{A7})$$

现在解 (A7) 式的第一个方程

$$F_{ek} = \int_{-\infty}^t \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(t-t')] \left[-\frac{ie}{m_e} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{u}} \phi_k \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \int \frac{e\mathbf{E}}{m_e} dt' dt'\right) \right] dt'. \quad (\text{A8})$$

注意到

$$\int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{u}} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(t-t')] d^3u = ik^2(t-t') \exp[-u_{e0}^2(t-t')^2/2].$$

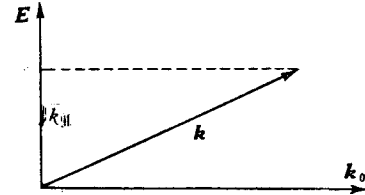
于是电子的密度起伏为

$$n_{ek}(t) = \int F_{ek}(\mathbf{u}, t) d^3u$$

$$= \omega_{pe}^2 \int_0^\infty \tau \exp(-k^2 u_{e0}^2 \tau^2/2) \left\{ n_{ek}(t-\tau) - z n_{ik}(t-\tau) \exp\left[i\left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e}\right) \int \int^{t-\tau} \mathbf{E} dt' dt'\right] \right\} d\tau, \quad (\text{A9})$$

式中

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m_e}.$$



附录图 1

用 $\exp(-i\omega t)$ 乘上式, 并对 t 积分, 便得

$$\left[1 - \omega_{pe}^2 \int_0^\infty \tau \exp(-k^2 u_{e0}^2 \tau^2 / 2 - i\omega \tau) d\tau\right] n_{ek\omega} = -\omega_{pe}^2 \int_0^\infty \tau \exp(-k^2 u_{e0}^2 \tau^2 / 2 - i\omega \tau) d\tau N_{ik\omega},$$

式中

$$n_{ek\omega} = \int_{-\infty}^\infty n_{ek}(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (A10)$$

$$N_{ik\omega} = \int_{-\infty}^\infty \left\{ n_{ik}(t) \exp\left[i\left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e}\right) \iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} dtdt\right]\right\} \exp(-i\omega t) dt.$$

利用积分等式

$$\int_0^\infty x \exp(-p^2 x^2) \sin ax dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{4p^3} \exp(-a^2/4p^2), \quad (A11)$$

$$\int_0^\infty x \exp(-p^2 x^2) \cos ax dx \simeq \frac{1}{a^2} (1 + 6p^2/a^2) \quad \text{当 } |a|^2 \gg p^2, \quad (A12)$$

故 (A10) 式可写为

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \varepsilon_e) n_{ek\omega} &= -\omega_{pe}^2 N_{ik\omega}, \\ \varepsilon_e &= \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{3k^2 u_{e0}^2}{\omega^2}\right) - i\omega \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{u_{e0}^2} \frac{\omega^2}{k^3} \exp(-\omega^2/2k^2 u_{e0}^2). \end{aligned} \quad (A13)$$

对于离子, 也同样有

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \varepsilon_i) z n_{ik\omega} &= -\varepsilon_i N_{ek\omega}, \\ \varepsilon_i &= \omega_{pi}^2 \left(1 + \frac{3k^2 u_{i0}^2}{\omega^2}\right) - i\omega \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pi}^2}{u_{i0}^2} \frac{\omega^2}{k^3} \exp(-\omega^2/2k^2 u_{i0}^2). \end{aligned} \quad (A14)$$

(A13), (A14) 式成立的条件是 $|\omega| \gg k u_{e0} > k u_{i0}$, 只有在这种情况下, 才能应用近似积分 (A12) 式.

当外加辐射场 $\mathbf{E} \rightarrow 0$, $N_{ek\omega}$, $N_{ik\omega} \rightarrow n_{ek\omega}$, $n_{ik\omega}$, 解联立方程 (A13) 和 (A14), 确定电子等离子体的振荡频率 ω_e 为

$$\begin{aligned} \omega_e &= \omega_{ek} - i\nu_{ek}, \\ \omega_{ek}^2 &= \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + 3 \frac{\omega_{pe}^2 u_{e0}^2 + \omega_{pi}^2 u_{i0}^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} k^2, \\ \nu_{ek} &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{ek}^2}{k^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{u_{e0}^2} \exp\left(-\frac{\omega_{ek}^2}{2k^2 u_{e0}^2}\right) + \frac{\omega_{pi}^2}{u_{i0}^2} \exp\left(-\frac{\omega_{ek}^2}{2k^2 u_{i0}^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (A15)$$

由 (A13) 和 (A15) 式得

$$(\omega^2 + 2i\nu_{ek\omega} - \omega_{ek}^2) n_{ek\omega} = -\varepsilon_e z (N_{ik\omega} - n_{ik\omega}). \quad (A16)$$

这就是电子等离子体的振荡方程. 除了这种振荡外, 还有频率较低的离子密度起伏, 也就是离子声波. 离子声波频率 ω 一般在 $k u_{e0} \gg |\omega| \gg k u_{ei}$ 范围内. 等式 (A14) 仍成立, 但 (A13) 式将采取不同的形式. 这是因为在 $k u_{e0} \gg |\omega|$, 即 $p^2 \gg |a|^2$ 的情况下, 近似积分 $\int_0^\infty x \exp(-p^2 x^2) \cos ax dx \simeq \frac{1}{2p^2}$, 相应的 (13) 式中的 ε_e 为

$$\varepsilon_e = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_{e0}^2} \omega^2 - i\omega \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{u_{e0}^2} \frac{\omega^2}{k^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 u_{e0}^2}\right). \quad (A17)$$

由 (A17) 和 (A14) 式确定的等离子声频 ω_i 为

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_{ik} - i\nu_{ik}, \\ \omega_{ik}^2 &= \left(\frac{T_e + 3T_i}{m_i}\right) k^2, \\ \nu_{ik} &= \omega_{ik} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left[\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i} - \frac{3}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (A18)$$

离子密度起伏方程为

$$(\omega^2 + 2i\nu_{ik\omega} - \omega_{ik}^2) z n_{ik\omega} = -\varepsilon_i (N_{ek\omega} - n_{ek\omega}). \quad (A19)$$

(A16), (A19) 式中的 ν_{ek} , ν_{ik} 为 Landau 阻尼, 当考虑到电子与离子的碰撞时, 在 ν_{ek} 中应加上表示碰撞吸收的项 ν_{ei} , 在 ν_{ik} 中应加上 ν_{ii} , ν_{ei} , ν_{ii} 分别为电子离子及离子离子间的碰撞频率^[12,11], 令 $\nu_e = 2(\nu_{ei} + \nu_{ek})$, $\nu_i = 2(\nu_{ii} + \nu_{ik})$, 并由算子关系 $-i\omega \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, 则 (A16) 和 (A19) 式可写为

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_e \frac{d}{dt} + \omega_{ek}^2\right] n_{ek}(t) &= \omega_{pe}^2 z n_{ik}(t) \left\{ \exp\left[i\left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e}\right) \iint \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} dtdt\right] - 1 \right\}, \\ \left[\frac{d^2}{dt^2} + \nu_i \frac{d}{dt} + \omega_{ik}^2\right] z n_{ik}(t) &= \omega_{pi}^2 n_{ek}(t) \left\{ \exp\left[-i\left(\frac{ze}{m_i} + \frac{e}{m_e}\right) \iint \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} dtdt\right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (A20)$$

附 录 二

参照(3)和(7)式,并考虑到电场 E 不是很强的情况下,可保留 μ 项,略去 μ^2 及高于 μ^2 的项.亦即只保留 $\theta_{\pm 1}$, $\bar{\theta}_{\pm 1}$ 的项,略去 θ_0 , $\bar{\theta}_0$, $\theta_{\pm 2}$, $\bar{\theta}_{\pm 2}$, $\dots$ 等项.这样便得到 $\Delta(\omega)$ 的近似表式如下:

$$\begin{aligned}\Delta(\omega) &= 1 - \theta_1 \bar{\theta}_{-1} \sum \left(\frac{1}{\chi_m \chi_{m-1}} + \frac{1}{\chi_m \chi_{m-1}} \right) \\ &= 1 - \theta_1 \bar{\theta}_{-1} \left\{ A_2 \sum \frac{1}{\omega + m\omega_0 - \omega_e^*} + B_2 \sum \frac{1}{\omega + m\omega_0 + \omega_e^*} \right. \\ &\quad \left. + C_2 \sum \frac{1}{\omega + m\omega_0 - \omega_i^*} + D_2 \sum \frac{1}{\omega + m\omega_0 + \omega_i^*} \right\}, \\ A_2 &\simeq \frac{1}{2\omega_e} \left[\frac{1}{(\omega_e + \omega_0)^2 - \omega_i^2} + \frac{1}{(\omega_e - \omega_0)^2 - \omega_i^2} \right], \quad B_2 = -A_2, \\ C_2 &\simeq \frac{1}{2\omega_i} \left[\frac{1}{(\omega_i + \omega_0)^2 - \omega_e^2} + \frac{1}{(\omega_i - \omega_0)^2 - \omega_e^2} \right], \quad D_2 = -C_2,\end{aligned}\tag{A21}$$

式中

$$\omega_e = \sqrt{\omega_{ke}^2 - \nu_e^2/4}, \quad \omega_i = \sqrt{\omega_{ki}^2 - \nu_i^2/4}.$$

特别是当 $\omega_e \rightarrow \omega_0 \pm \omega_i$ 时,即 $\omega_e = \omega_0 \pm \omega_i + \epsilon$,

$$A_2 = \frac{1}{2\omega_e} \times \frac{\pm 1}{2\omega_i \epsilon} = \pm C_2.\tag{A22}$$

根据(A21), (A22)式, $\Delta(\omega)$ 就可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta(\omega) &= 1 + \frac{(\Delta(0) - 1) \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_e^* \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_e^* \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_i^* \sin \frac{\pi}{\omega_0} \omega_i^*}{\sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_e^*) \sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega + \omega_e^*) \sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega - \omega_i^*) \sin \frac{\pi}{\omega_0} (\omega + \omega_i^*)}, \\ \Delta(0) &= 1 + \frac{k\delta}{\omega_e \omega_{ke}^2 (\delta^2 + \nu_e^2/4)}, \\ \delta &= \omega_0 - \omega_e.\end{aligned}\tag{A23}$$

参 考 文 献

- [1] V. P. Silin, *Soviet Phys.-JETP*, **21** (1965), 1127.
- [2] D. F. Dubois and M. V. Goldman, *Phys. Rev. Letters*, **14** (1965), 544.
- [3] K. Nishikawa, *J. Phys. Soc. Japan*, **24** (1968), 916; 1152.
- [4] E. A. Jackson, *Phys. Rev.*, **153** (1967), 235.
- [5] P. K. Kaw and J. M. Dawson, *Phys. of Fluids*, **12** (1969), 2586.
- [6] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论 (1965), 科学出版社.
- [7] H. Nyquist, *B. S. T. J.*, **11** (1932), 126.
- [8] 钱学森, 工程控制论 (1958), 科学出版社.
- [9] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis* (1943).
- [10] K. Nishikawa, Proc. Japan-U. S. Seminar "Laser Interaction with matter" (1972), 267.
- [11] C. Yamanaka, T. Yamanaka, T. Sasaki, M. Waki, K. Shimamura and H. B. Kang, Proc. Japan-U. S. Seminar "Laser Interaction with matter" (1972), 283.
- [12] V. L. Ginzburg, *The Propagation of Electromagnetic waves* (1970).
- [13] J. W. Shearer and J. J. Duderstadt, *Nuclear Fusion*, **13** (1973), 401.

SINGLE AND DOUBLE FREQUENCY RESONANCE HEATING IN LASER-IRRADIATED PLASMAS

TAN WEI-HAN XU ZHI-ZHAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper accurate solutions for the single frequency heating conditions have been obtained based on equations derived for laser plasma electron-ion coupling. The threshold values and rate of increase of various unstable oscillations under double frequency resonance heating conditions have also been obtained and compared with those under single frequency heating conditions.