

等离子体的静态稳定性*

霍 裕 平

提 要

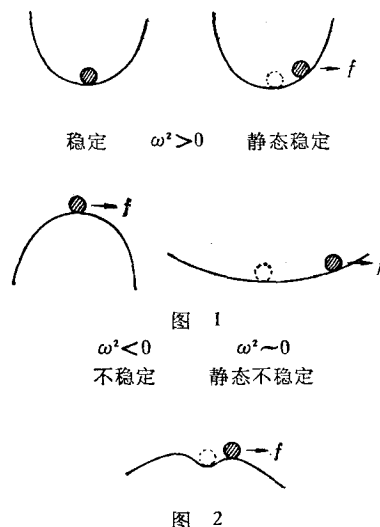
本文讨论了外磁场微小的变动对等离子体平衡位形的影响,即等离子体的静态稳定性问题。指出,只有当附加磁场与等离子体接近不稳定边界的模相耦合时,才可能引起平衡位形很大的变化。由此,我们分析了杂散场对环电流器(托克马克)的影响。

—

在等离子体理论中,稳定性实际上具有两种含义。在通常情况下,等离子体的稳定性是指等离子体对平衡位形作小偏离后,是向平衡恢复还是继续远离而去。在五十年代初就已经肯定,对于磁约束等离子体,这种稳定性(主要指磁流体模)的分析是绝对必要的。因此二十多年来,在这面积累了大量的工作,是等离子体理论中最受重视的领域之一^[1]。另一方面,在分析磁场形态时(所谓磁场拓扑或磁场几何)^[2],就曾发现,在某些磁场上叠加一很小的磁场后,就可以使磁力线及磁面产生很大的变动,因此引入了磁场稳定性的概念。这种不稳定性产生的原因是,磁力线及磁面都是积分效应,虽然空间每一点上磁场强度变化都不大,但叠加后效果很大。将此概念引伸到存在等离子体的情况,问题的提法就应该是,处于平衡并且稳定(指前一种含义)的等离子体,当外界有一小变动(总可以归结为磁场有一个小的改变),平衡形态是否变化很大。为了与通常所指的稳定性有所区别,我们称之为静态稳定性。

从物理上看,等离子体的静态稳定性是与稳定性有密切联系的。这多少类似于非平衡态统计中的涨落耗散定理。以谐振子为例,稳定性与静态稳定性的关系如图1所示。从运动方程: $m\ddot{x} = -\omega^2 x + f$ 出发,稳定性分析取 $f = 0$ 的齐次方程, $\omega^2 < 0$ 表示不稳定;静态稳定分析取 $\ddot{x} = 0$, 则 $x = \frac{f}{\omega^2}$, 在 $\omega \sim 0$ 时,

很小的 f 对应很大的 x , 这就是说静态不稳定是由于接近不稳定所引起。当然,在等离子体中情况要比这复杂一些。另一种情况如图2所示,但这已超出线性分析的范围,或者也可以认为,这



* 1975年3月26日收到。

种情况本来就属于不稳定状态(虽然线性分析的结论是稳定的),因此也不必讨论其静态稳定性问题。

在实践中,等离子体的静态稳定性是一个非常重要的问题。因为任何一个装置在设计 and 建造过程中必然要引入各种偏差,从等离子体角度来看,所有的变动都最终归结为引入一小的附加磁场,我们称之为杂散场。如果等离子体是静态不稳定的,很小的杂散场就可能引起平衡位形很大的变动,使得在装置中根本不能得到平衡的等离子体。例如,在环电流器(托克马克)早期的工作中(T-3 装置)^[3],减小杂散场(相对于纵场强度的 0.1% 以下)是装置成功的决定性因素之一。但是我们知道,在环电流器中等离子体位形变动百分之几是不会有太大效果的。也有实验表明,某些杂散场(例如由于纵场线圈分立而引起纵场在大环方向上不均匀)即使很大,也不引起等离子体根本性的变化。因此,分析等离子体的静态稳定性质,确定杂散场中那些分量会引起等离子体平衡位形很大变动(我们称之为杂散场的危险部分),那些分量只引起与之相对比例一致的变动(杂散场的非危险部分),对于大大降低一个装置的设计及安装工作量,以及保证装置的可靠性,都是极其必要的。

二

为了说明问题,我们先分析轴对称的情况,即没有杂散场的等离子体(我们称之为平衡形态),它是轴对称的,杂散场也是轴对称的。已知在轴对称的情况下存在磁面^[4],磁面函数为 $\phi = RA_\phi$, A_ϕ 为大环方向的矢势,满足麦克斯韦方程:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{R^2}\right)A_\phi + j_\phi = 0, \quad (1)$$

j_ϕ 为大环方向电流密度。根据平衡条件,

$$j_\phi = RP' + (I^2)'/R, \quad (2)$$

其中 $p(\phi)$ 为压力, p , I 都只是 ϕ 的函数, $p' = \frac{dp}{d\phi}$, $p(\phi)$, $I(\phi)$ 的具体形式由能量及粒子流平衡条件决定。平衡(没有杂散场)时方程(1)的解为 $A_\phi^{(0)}$, 若引入杂散场相应的矢势 $A_{\phi m}^{(1)}$ (满足方程 $\left(\nabla^2 - \frac{1}{R^2}\right)A_{\phi m}^{(1)} = 0$), 等离子体电流分布改变 $j_\phi^{(1)}$ 引起矢势的变化为 $A_{\phi r}^{(1)}$ 。取到一级近似, $A_{\phi r}^{(1)}$ 满足

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{R^2} + j'_\phi(A_\phi^{(0)})\right]A_{\phi r}^{(1)} = -j'_\phi(A_\phi^{(0)})A_{\phi m}^{(1)}, \quad (3)$$

其中 $j'_\phi(A_\phi^{(0)}) = \frac{\partial j_\phi}{\partial A_\phi} \Big|_{A_\phi = A_\phi^{(0)}}$ 。由于 j_ϕ 为实函数, $\left[\nabla^2 - \frac{1}{R^2} + j'_\phi(A_\phi^{(0)})\right]$ 是厄米算子。已知厄米算子的本征值 E_n 为实数, 本征函数 $\{\varphi_n\}$ 构成正交完备组,

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{R^2} + j'_\phi(A_\phi^{(0)})\right]\varphi_n = E_n\varphi_n. \quad (4)$$

将 $A_{\phi r}^{(1)}$ 及方程(3)右方对 φ_n 展开, 得到

$$A_{\varphi'}^{(1)} = \sum_n \frac{b_n}{E_n} \varphi_n, \quad (5)$$

其中

$$b_n = \int \varphi_n^* j_{\varphi}'(A_{\varphi}^{(0)}) A_{\varphi_m}^{(1)} ds,$$

积分区域是整个等离子体截面。所以我们看到, 只有当(4)式存在接近于零的本征值 ($E_m \sim 0$), 相应杂散场分量 ($b_m \neq 0$) 就引起很大的 $A_{\varphi'}^{(1)}$ (磁面变动很大), 因此才是危险的。

为了分析(4)式出现零本征值及相应本征函数的含义, 我们从另一个角度来看稳定性判据^[5]。不稳定性开始出现的条件可以看成是在平衡位形 $A_{\varphi}^{(0)}$ 附近出现新的平衡位形 $A_{\varphi}^{(0)} + A_{\varphi}^{(1)}$:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{R^2}\right)(A_{\varphi}^{(0)} + A_{\varphi}^{(1)}) = -j_{\varphi}(A_{\varphi}^{(0)} + A_{\varphi}^{(1)}).$$

因此等离子体在无穷小外力推动下可作任意大的变动。取到一级近似 $A_{\varphi}^{(1)}$ 满足:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{R^2} + j_{\varphi}'(A_{\varphi}^{(0)})\right]A_{\varphi}^{(1)} = 0. \quad (6)$$

在文献[5]中, 曾经从这种角度分析了环系统的理想磁流体稳定性。在通常的装置中, 磁流体稳定性总是要被保证的, 但是如果对某些模来说, 比较接近稳定边界 (例如在环流器中, 当运行的 q 值较低时, $m=1$ 扭曲模就接近稳定边界), 相应的 E_m 很小, 当杂散场中含有这种模的分量 ($b_m \neq 0$), 则引起很大变动。其实(4)式很类似于一般稳定分析中的小振动方程, E_n 即相应于 $-\omega^2$ 。差别在于, 在小振动理论中, 整个过程认为是绝热的, 从而给出了 $j_{\varphi}^{(1)}$ 与 $A_{\varphi}^{(1)}$ 的关系 (包含与 $A_{\varphi}^{(1)}$ 的各阶微商有关), 相应方程中的 j_{φ}' 是一个包含微分运算的算子。在我们的问题中, 引入变动的过程一直是保持平衡状态 (包括能量及粒子流的平衡), 因此 j_{φ} 保持为 A_{φ} 的一个固定函数。在实际情况中, 一般模式的振动是由通常计算给出, 但很接近稳定边界的模则应过渡到(4)式。

有了上述讨论, 我们很容易将结果推广到一般情况 (非轴对称)。如果平衡位形磁场矢势为 $\mathbf{A}^{(0)}$, 它满足如下方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{j} \left(\mathbf{r}, \mathbf{A}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{A}, \dots \right). \quad (7)$$

杂散场 $\mathbf{A}_m^{(1)}$ 和它引起的等离子体电流 $\mathbf{j}^{(1)}$ 以及矢势 $\mathbf{A}_i^{(1)}$ 取一级近似:

$$\mathbf{j}^{(1)} = \mathbf{G}(\mathbf{A}^{(0)}) \cdot (\mathbf{A}_m^{(1)} + \mathbf{A}_i^{(1)}),$$

其中 $\mathbf{G}(\mathbf{A}^{(0)})$ 为一张量微分算子, 具体形式由能量平衡决定。同样由于 $\mathbf{G}$ 是厄米算子 (电流是可观测量),

$$\mathbf{A}_i^{(1)} = \sum_n \frac{b_n}{E_n} \varphi_n, \quad (8)$$

其中 φ_n 满足

$$\{\nabla^2 + \mathbf{G}\} \cdot \varphi_n = E_n \varphi_n, \quad b_n = \int \varphi_n^* \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}_m^{(1)} dV. \quad (9)$$

(9) 式与通常小振动方程差别在于 $\mathbf{G}$ 不是由绝热过程给出。

因此我们得到的一般结论是, 只有那些存在靠近稳定边界模式的等离子体才是静态不稳定的, 与这些模相耦合的杂散场才是危险的。

三

我们具体计算一个简单例子。

设想一半径为 a 、长为 L 的面电流等离子体直柱(如图 3), z 方向的磁场 B_z 内外均匀, 纵向总的表面电流 I , 在外部产生角向场

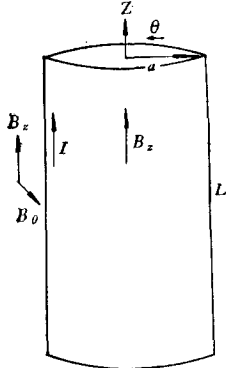


图 3

$$B_\theta(r) = \frac{I}{2\pi r},$$

在内部等离子体压力为一常数:

$$P = B_\theta(a)^2/2,$$

外加扰动场 $\mathbf{B}_m^{(1)} \sim e^{i(kz+m\theta)} = \rho$. 由于只有面电流, 内外磁场总的变动都可以用磁势 φ 来描述 ($\mathbf{B}^{(1)} = \nabla\varphi$):

$$\text{在内部} \quad \varphi_i = c_i \text{Im}(kr)\rho; \quad (10)$$

$$\text{在外部(靠近边界)} \quad \varphi_e = [c_e \text{Im}(kr) + d_e \text{Km}(kr)]\rho.$$

上式中 Im, Km 为虚宗量贝塞耳函数. 由于扰动, 等离子体边界改变

$$r = a + a_1\rho.$$

利用边界上磁场法向分量为零, 我们得到两个关系式:

$$a_1 = -i \frac{\text{Im}'(ka)}{B_z} c_i, \quad (11)$$

$$c_e \text{Im}'(ka) + d_e \text{Km}'(ka) = \delta \text{Im}'(ka) c_i, \quad (12)$$

其中 $\text{Im}'(x) = \frac{d}{dx} \text{Im}(x)$, $\delta = 1 + \frac{mB_\theta(a)}{kaB_z}$. 再考虑到边界上压力平衡, $P + B_i^2/2 = B_e^2/2$. 取到一级近似:

$$\delta \{c_e \text{Im} + d_e \text{Km}\} = \left(\text{Im} - \frac{B_\theta^2(a)}{kaB_z} \text{Im}' \right) c_i. \quad (13)$$

令 $\mathbf{B}_m^{(1)}$ 在等离子体内部相应的磁势为 $\varphi_i' = c_i' \text{Im}(kr)\rho$. 由于 $\text{Km}(kr)$ 在 $r=0$ 处发散, $\text{Im}(kr)$ 在无穷远发散, 等离子体面电流(由于 $\mathbf{B}_m^{(1)}$ 引起)在外部产生的磁势只能正比于 $\text{Km}(kr)$, 因此 φ_e 中 $c_e \text{Im} \rho$ 部分只能是外电流所产生. 但外电流都在边界外面, 在我们问题所涉及的区域中产生的磁势正比于 $\text{Im}(kr)\rho$, 而与等离子体存在与否无关. 所以

$$c_i' = c_e. \quad (14)$$

(14)式也可直接证明如下: 利用表面上

$$\mathbf{j}^{(1)} = \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_e^{(1)} - \mathbf{B}_i^{(1)}),$$

求出感生电流 $\mathbf{j}^{(1)}$, 再由之求出 φ_{is} 及 φ_{es} , 我们就得到 $d_e = d_{es}$, $c_{is} = c_i - c_e$, 即(14)式结果.

利用(12)及(13)式消去 d_e , 在长波极限下 ($ka \ll 1$), 并考虑到 $k = -\frac{2\pi n}{L}$, n 为正整数, 则得到

$$c_i = \frac{2\delta}{M(q)} c_e, \quad (15)$$

其中 $M(q) = 1 + \delta^2 - \frac{m}{n^2 q^2}$, $\delta = 1 - \frac{m}{nq}$, $q = \frac{2\pi a B_z}{L B_\theta(a)}$. 我们看到, $M_{n,m}(q)$ 即 (n, m) 扭曲模的稳定判别式^[1]. 当 $M_{n,m}(q) \geq 0$, 很小的 $c_e = c'_i$ 就能引起很大 c_i , 从而使等离子体位移 a_i 很大. 也就是说, 杂散场与扭曲模相耦合, 产生了静态不稳定性. 在这里, 由于平衡计算及小振动计算都取等离子体内部压力为常数, 二者结果 ($M(q)$) 是一致的.

四

作为上述结果的应用, 我们简单分析一下环电流器中杂散场的作用.

在通常环电流器中, 主要需要考虑的理想磁流体模式有两类. 一是长波扭曲模, 分成表面波及内部扭曲模. 前者不稳定性发展就导致等离子体的整个破坏; 后者若扰动限于等离子体内部, 则只使局部扩散及热导加大, 若扩展至表面, 则也可以破坏等离子体. 在一般工作条件下, $q(a)$ 比较小, 一些扭曲模式 ($n = 1, 2; m = 1, 2, 3 \dots$) 是比较接近稳定边界的. 另一是局部模. 这是短波扰动, 局限于有理磁面附近, 沿闭合磁力线. 在环电流器中, 局部稳定要求 $q(r) > 1$, 所以在 $q(a) > 3$ 运行条件下, 只在磁轴附近才接近稳定边界或者不稳定. 其它一些模式, 如 $n = 0, m \neq 0$ (除 $m = 1$ 外) 是轴对称多极畸变, $n \neq 0, m = 0$ 是腊肠模以及气泡模, 在环电流器中都是稳定的. 非理想磁流体模中比较重要的是电阻撕裂模, 由于它只在理想磁流体稳定边界附近起作用 (共振面可从边界外移至表面高阻层内), 在我们的问题中, 是不必再仔细分析的.

如果我们将 r, θ 取成自然坐标系^[4], 则平衡位形 $\mathbf{B}^{(0)}, \mathbf{j}^{(0)}$ 都只与 r 有关. 因此 $\nabla^2 + \mathbf{G}$ 对 θ 及 φ 平移不变, 即其本征函数用 n, m 标志:

$$\varphi_{n,m} \sim e^{i(n\varphi + m\theta)}.$$

与 $\varphi_{n,m}$ 耦合的, 也只能是杂散场中 n, m 的分量

$$\mathbf{B}_{n,m}^{(1)} e^{i(n\varphi + m\theta)}.$$

根据以上对环电流器稳定性的分析, 只有 n 很小 ($n = 1$ 为主) 以及 m 较小 ($m = 1, 2, 3 \dots$) 的杂散场分量, 由于和扭曲模耦合, 有可能是危险的. 其它分量 (包括与局部模耦合的) 则是不危险的. 更具体, 可以将杂散场分为以下几类:

1. 轴对称杂散场 ($n = 0$), 除 $m = 1$ 是均匀场引起整体移动外, 其它都是不危险的, 只引起等离子体截面的多极畸变. 若等离子体边界的移动

$$\Delta(\theta) = \sum_m \Delta_m e^{im\theta},$$

可以得到简单的近似估计公式:

$$\Delta_m = \frac{1}{m-1} \frac{\Delta B_m}{B_\theta} a,$$

其中 ΔB_m 是杂散场相应的傅氏分量, B_θ 是角向场. 但是还必须指出, 在环电流器中, 还有一部分轴对称杂散场 (主要是空心变压器的剩余场, 涡流场中的轴对称部分), 主要是在放电初期起作用, 它们是否只限于影响磁面结构还应该作进一步研究.

2. 大环方向的局部或短波扰动是不危险的, 因为相应的 n 很大. 此结论为铜壳开缝及纵场波纹度的实验 (ST 上) 所证实. 在文献 [6] 中, 曾分析了这类扰动对平衡的影响. 但由于一开始所取各量间的比例不对 (取等离子体对杂散场的响应比杂散场小一 ε 量级, 从而在对 ε 展开后可直接求解), 所得结果是不正确的, 也不能得到与稳定性的联系.

3. 在 T-3 装置上, 杂散场的影响所以比较大, 是铁心变压器的漏磁场与扭曲模耦合. 铁心变压器的中柱与侧边不对称, 漏磁场中有很强 $m = 1, 2, \dots$ 的分量 (TFR 装置上即以之来维持径向平衡), 又因只有两臂, 如果完全对称, 则 $n = 2$, 略不对称, 则含有 $n = 1$ 的分量. 根据 T-3 装置估计, 在一般环电流器中, $n = 1, m = 1, 2, 3$ 的杂散场分量至少要小于纵场的千分之一¹⁾. 类似地我们可以推论, TFR 装置上由于变压器有八臂, 漏磁场 $n = 8$ 是比较不危险的.

4. 即使在同一装置上, 放电情况不同 (例如总电流不同, 即 q 值不同), 杂散场的作用也不同.

本文的结果也可类似地应用于其它稳态装置上.

参 考 文 献

- [1] Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, Вып. 2.
- [2] А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, Вопросы теории плазмы, Вып. 2.
- [3] Р. А. Арцимовиг, *Nuclear Fusion*, **12** (1972), 215.
- [4] Л. С. Соловьев, Ф. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, Вып. 5.
- [5] Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуци, Вопросы теории плазмы, Вып. 5.
- [6] A. Sestero, *J. Plasma Phys.*, **15** (1973), 709.

THE STATIC STABILITY OF PLASMA

HUO YU-PING

ABSTRACT

In this article, the effects of the small magnetic field perturbation on the equilibrium of plasma are discussed (the problem of the static stability of plasma). It is pointed out that a large variation in the equilibrium configuration may take place only when the small magnetic perturbations couple with the plasma modes which are almost neutrally stable. Accordingly, the effects of the main classes of the stray field in Tokamak devices are analysed.

1) 本工作完成后, 看到 Pulsator 上的实验结果. 不仅定性上表明 $n = 1, m = 2$ 的扰动是危险的, 而且粗略估计场强也与这里所给出的限制是一致的. 由于运行在 $q(a) \sim 3.5$, 因此可以预计 $l = 3$ 绕组产生的场应该更危险.