

球对称的 SU_2 规范场和磁单极的 规范场描述*

谷超豪 胡和生
(复旦大学数学系)

提 要

本文讨论球对称的 SU_2 规范场,证明了满足最一般的球对称定义的 SU_2 规范场只能有三种基本类型:(1)同步球对称规范场;(2)狭义球对称规范场;(3)化约为 U_1 子群的球对称规范场.文中详细讨论了球对称的带同位旋向量场(Higgs 场)的 SU_2 规范场,完全决定了它们的类型.如果把这种场看成为由电磁场和带电矢介子构成,那末就有如下的结论:如果磁单极所含的磁荷是最小单位的 m 倍,当 $|m| > 1$ 时,球对称的带 Higgs 场的 SU_2 规范场只能是纯电磁场,而不能有带电矢介子场出现.但当 $m = 0, \pm 1$ 时,球对称的带电矢介子场是可以出现的.从而可见,具有非单位磁荷的磁单极隐含了某种破坏球对称的因素.

一、引 言

在物理学中研究场的理论时,球对称的模型是常见的,球对称的场有着重要的作用.

球对称的标量场、向量场、张量场的一般形式是不难写出的.但对于规范场,因为相互成规范变换的规范场是等价的,所以在定义球对称时就必须考虑到这种规范变换,情况就较为复杂.近年来,球对称 SU_2 规范场^[1]已引起许多注意.吴大峻和杨振宁最先得出两种球对称的无源解^[2],1974年 't Hooft 用某些球对称的 SU_2 规范场来表示磁单极^[3],又引起了一系列的研究^[4,5].在这些研究中,球对称的势形式已变得一般一些了,但还没有回答这样的问题:球对称的 SU_2 规范场到底有哪些形式?

本文的目的就在于定出球对称的 SU_2 规范场,我们既讨论 't Hooft 提出的带同位旋向量场 Q^a 的 SU_2 规范场,也讨论不带 Q 的场.我们首先要给出球对称的一般定义:一个 SU_2 规范场 $\mathcal{F}$,如其规范势经过空间的任一旋转后,能和原来的规范势规范等价,那末场 $\mathcal{F}$ 就是球对称的.然后得出如下的结果:球对称 SU_2 规范场(取适当规范后)实际上只有三种基本类型:(1)同步球对称的场,也就是说,其规范势在经受任一转动 A 的同时又经受同位旋空间的同一旋转后是不变的;(2)狭义球对称的场,即其规范势在任一转动 A 下就是不变的;(3)化约为 U_1 子群的球对称规范场.每一球对称的 SU_2 规范场总是由这三种类型的场以适当方式组合而成.

* 1976年3月24日收到.

1) 同位旋向量场 Q 是一种 Higgs 场.

如果用 't Hooft 建议的公式表示电磁场强度, s 为耦合常数, 则 $\frac{1}{s}$ 为磁荷的最小单位, 又把 SU_2 场看成为电磁场和带电矢介子耦合的场, 那末类型(1)的场容有磁荷为 $\pm \frac{1}{s}$ 的球对称磁单极, 类型(2)的场中无磁荷, 在这两种场中还可以有球对称带电矢介子场出现. 类型(3)的场和普通的 U_1 群整体规范场无本质区别, 可以表示磁荷为 $\frac{m}{s}$ 的磁单极, 它只能是纯电磁场, 即不能出现矢量介子场.

我们论证的方法是: 先设场的势满足一般球对称的定义, 然后区分各种情况, 找到几个规范变换, 在小范围内把规范势变到所需的形式, 然后再把这个结果整体化. 我们先讨论带 Q 的场, 再讨论不带 Q 的场, 最后叙述了对于用 SU_2 群规范场描述磁单极的几点看法.

二、定义和主要结果

我们研究四维平坦时空中的球对称 SU_2 规范场. 如所知, SU_2 群为 2×2 的单模么正阵

$$\zeta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1) \quad (1)$$

所成的群, 其李代数 SU_2' 的基可选为

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

SU_2' 中的一般元素可记为 $q = q_i X_i (i = 1, 2, 3)$, 称为同位旋向量. (2) 式中 X_i 的换位运算为

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k. \quad (3)$$

SU_2 中的伴随变换 $q \rightarrow \zeta q \zeta^{-1}$ 记为 $ad\zeta$. 如果行向量 (q_1, q_2, q_3) 也记为 q , 那末 $ad\zeta$ 使 q 变为

$$q' = qC(\zeta), \quad (4)$$

这里 $C(\zeta)$ 为 SO_3 中的阵, 其元素为

$$\zeta X_i \zeta^{-1} = C_{ij} X_j \quad (5)$$

中的 C_{ij} . 同一 SO_3 中的阵可对应于两个 ζ , 它们差一正负号. 从 (4) 式还容易得出 $C(\zeta_1 \zeta_2) = C(\zeta_2)C(\zeta_1)$. 又记由 X_1 生成的子群为 G_1 , G_1 的一般元素为

$$\exp(\varphi X_1) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & -i \sin \frac{\varphi}{2} \\ -i \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

SU_2 规范场由一组规范势 $b_\lambda^i(x, t) (\lambda = 1, 2, 3, 4)$ 所定义, 这里 $x = x_i e_i$ 表空间的点, e_i 为空间直角坐标的基向量, t 或 x_4 表时间, 已选取单位使 $c = \hbar = 1$. 记 $b_\lambda^i X_i = b_\lambda$, 变换

$$b_\lambda(x, t) \rightarrow \zeta(x, t) b_\lambda(x, t) \zeta^{-1}(x, t) - \partial_\lambda \zeta(x, t) \zeta^{-1}(x, t) \quad (7)$$

称为规范变换, 式中 ∂_λ 记 $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$. 互为规范变换的规范势称为等价的, 它们代表同一个物理的场. 我们假设 $b_\lambda(x, t)$, $\zeta(x, t)$ 等均为 x, t (除空间原点外) 的有一定光滑性的函数.

't Hooft 在研究磁单极时^[3]引进了一个同位旋向量场 $Q(x, t) = q_i(x, t)X_i$, 对带 Q 的 SU_2 规范场, 在 q_i 不全为 0 之处, 他以

$$f_{\lambda\mu} = \frac{1}{|Q|} q_i f_{\lambda\mu}^i - \frac{e_{abc}}{|Q|^3} q_a D_\lambda q_b C_{\mu c}{}^b \quad (8)$$

作为电磁场张量, 式中 $f_{\lambda\mu}^i$ 为场的强度, $D_\lambda Q_b$ 为 Q 的规范导数^[6], 又

$$|Q| = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2}.$$

现作出球对称性的定义:

定义 设 $\mathcal{S}$ 为 SU_2 规范场, 如果其规范势经过空间的任一旋转后, 都能和原来的规范势相等价, 则称 $\mathcal{S}$ 为球对称的.

容易见到, 这个定义的另一形式是: 对空间的任一旋转 A , 存在一个适当的 $\zeta(A, x, t)$, 使 $\mathcal{S}$ 的势经过 $\zeta(A, x, t)$ 所定义的规范变换和旋转 A 后仍然保持不变, 那末场 $\mathcal{S}$ 称为球对称的. 现要用式子表示这个定义. 以 b 记 b_i , Ab 记 $a_{ij}b_j$, 这里 a_{ij} 是 A 的矩阵元, ∇ 表示三维空间的梯度, 那末这个定义就是说, 对任何 $A \in SO_3$, 必有 $\zeta(A, x, t) \in SU_2$ 使

$$A(\zeta(A, x, t)b(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t) - \nabla\zeta(A, x, t) \cdot \zeta^{-1}(A, x, t)) = b(Ax, t), \quad (9)$$

$$\zeta(A, x, t)b(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t) - \partial_\lambda\zeta(A, x, t)\zeta^{-1}(A, x, t) = b_\lambda(Ax, t) \quad (10)$$

成立. 事实上, 这两个式子左边表示势经过规范变换和旋转后的表达式. 因这时 (x, t) 变为 (Ax, t) , 所以 (9), (10) 两式的右边即为原来的势在 (Ax, t) 的表达式, 这两边相等, 正是球对称的定义.

对带 Q 的场, 除 (9), (10) 式外, 显然还要满足

$$\zeta(A, x, t)Q(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t) = Q(Ax, t), \quad (11)$$

才称为球对称的, 我们假设 $x \rightarrow 0$ 时, $Q \rightarrow 0$.

特别是:

(1) 如果 (9), (10) 式中的 $\zeta(A, x, t)$ 和 x, t 无关, 且 $ad\zeta$ 的阵 $C(\zeta)$ 即为 A^{-1} , 则场 $\mathcal{S}$ 称为同步球对称, 文献[5]中已指出, 同步球对称的势的一般形式为

$$b_i^l = \epsilon_{ilk}x_k V(r, t) + \delta_{il}S(r, t) + x_i x_l T(r, t), \quad b_i^4 = x_i U(r, t). \quad (12)$$

(12) 式中 $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. 当 $V = -\frac{1}{r^2}$, $S = 0$ 时, 场称为特异同步球对称的, 否则称为非异的, 对带 Q 的场来说, 还有

$$q_i = -W(r, t)x_i \quad (W(r, t) \neq 0). \quad (13)$$

在 $W > 0$ 时, 我们称场为正型的, $W < 0$ 时, 场为负型的.

(2) 如 $\zeta(A, x, t)$ 是单位阵 I , 则场称为狭义球对称的, 容易证明

$$b_i^l = R^l(r, t)x_i, \quad b_i^4 = Y^l(r, t). \quad (14)$$

如带 Q , 则 $q_i = q_i(r, t)$. 又若经规范变换后, 能使 $Q\|X_1$ 和 $b_i\|X_1$ 同时成立, 则称场为特异的, 否则就称为非异的.

1) 在 't Hooft 的定义中, 第二项有因子 $\frac{1}{r}$, 我们在第八节再引入这个因子.

(3) 在适当规范下能有 $b_i \parallel X_i$, 则称场化约为子群 G_1 的规范场, 如带 Q , 也要求 $Q \parallel X_1$ ¹⁾. 这种场的球对称性相同于电磁场的球对称性, 即电磁场张量应为球对称的, 特别是其磁场部分为

$$f_{ij} = n \epsilon_{ijk} \frac{x_k}{r^3},$$

n 只能取整数(这就是磁量子化条件, 来源于场的整体性质)^[7], 势函数可取得使 $b_i^2 = b_i^3 = 0$, b_i^1 由电磁场张量依普通的方法定出. 后文还将指出, 当 $n = \pm 1$ 时, 场等价于特异的同步球对称场; $n = 0$ 时, 场等价于特异的狭义球对称场.

我们的主要结果有

定理 1 带 Q 的球对称规范场必属于下述四种类型之一:

(1) 负型的同步球对称规范场; (2) 正型的同步球对称规范场; (3) 狭义球对称规范场; (4) 化约为子群 G_1 的球对称规范场(满足量子化条件), 且 $|n| > 1$.

我们还将注意到, 如果只考虑局部的球对称性, 即球对称条件只在某角状(立体)区域成立时, 量子化条件不出现.

对于不带 Q 的 SU_2 规范场, 成立.

定理 2 球对称的 SU_2 规范场有下述三种基本类型:

(1) 非异同步球对称规范场; (2) 非异狭义球对称规范场; (3) 化约为子群 G_1 的球对称规范场(需满足量子化条件). 任一球对称的 SU_2 规范场由它们以适当方式组成.

三、带 Q 的场在一点的分类

在讨论整个场之前, 我们先要弄清在一点的情况.

设已给了一个带 Q 的球对称场 $\mathcal{F}$, 对于任何一点, 必可选取一邻域 Q , 使通过适当规范变换后, 在此邻域中必有 $Q \parallel X_1$, 而且和 X_1 同向. 事实上, 只要在各点作同位旋空间的适当旋转就可以了, 因为 $Q(x, t)$ 是光滑的, 在局部范围内, 这种旋转也可取为光滑地依赖于 x, t 的²⁾.

我们不妨讨论正 x_1 轴上点 (ζ_0, τ) 的一个邻域. 在 Q 中已有

$$q_2(x, t) = q_3(x, t) = 0, \quad q_1(x, t) > 0. \quad (15)$$

当 (x, t) 和 (x_0, τ) 相距不远, $A\xi_0$ 和 ξ_0 相距不远时(在后面, 当我们讨论局部性质时, 一般都略去这种限制性的说明), 由 (11) 式得知, $\zeta(A, x, t) \in G_1$, 而 $C(\zeta(A, x, t))$ 为

$$C(\zeta(A, x, t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

式中 $\varphi = \varphi(A, x, t)$. 又记

$$D(\varphi(A, x, t)) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (17)$$

1) $b_i \parallel X_i$, Q 不平行于 X_1 的情况是可能出现, 但它包含于情形 (2) 之中.

2) 严格的证明可利用 (27) 式所定义的正交阵.

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} b_1^2(x, t) & b_1^3(x, t) \\ b_2^2(x, t) & b_2^3(x, t) \\ b_3^2(x, t) & b_3^3(x, t) \end{pmatrix}, \quad b^i(x, t) = \begin{pmatrix} b_1^i(x, t) \\ b_2^i(x, t) \\ b_3^i(x, t) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

(9) 式就可写成为

$$B(Ax, t) = AB(x, t)D(\varphi(A, x, t)), \quad (19)$$

$$b^i(Ax, t) = A(b^i(x, t) - \nabla\varphi(A, x, t)). \quad (20)$$

设 $R(\theta)$ 为绕 x_1 轴的转动, 转角为 θ , 即

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

取 $x = \xi_0, t = \tau, A = R(\theta)$, 则 (19) 式化为

$$B(\xi_0, \tau) = R(\theta)B(\xi_0, \tau)D(\varphi). \quad (22)$$

先证明

引理 1 如果对于任何 θ 必有 φ , 使 (22) 式成立, 则 $B(\xi_0, \tau)$ 必属于下列四种情形之一:

$$\begin{aligned} (1) \quad B(\xi_0, \tau) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \varphi = \theta; \\ (2) \quad B(\xi_0, \tau) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad \varphi = -\theta; \\ (3) \quad B(\xi_0, \tau) &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = 0; \\ (4) \quad B(\xi_0, \tau) &\text{的一切元素为零.} \end{aligned} \quad (23)$$

在情形 (1), (2), (3) 中 a, b 不全为零.

证明 由 (22) 式知道, 对每一 θ 必有 φ , 使

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (24)$$

显然有 SO_2 中的阵 S, T 使

$$S \begin{pmatrix} b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^2 & b_3^3 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

因为 SO_2 中的阵可交换, 所以用 S 和 T 左乘和右乘 (24) 式, 就有

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (26)$$

由此易见, 当 λ_1, λ_2 不全为零时, 必有 $\lambda_1 = \pm \lambda_2$, 并分别对应 $\theta = \pm \varphi$, 从而由 (25) 式可见

$$b_2^2 = \pm b_3^2, \quad b_2^3 = \mp b_3^3.$$

再由 (22) 式可见 $b_2^1 = b_3^1 = 0$, 因而就有情形 (1) 和 (2).

当 λ_1, λ_2 全为零时, 如 b_1^2, b_1^3 不全为零, 就有情形 (3).

余下来就是情形 (4). 引理 1 证毕.

这个引理给出了带 Q 的球对称 SU_2 场在一点分类. 我们将分别讨论这四种情形.

四、情形 (1) 和 (2) 的讨论

设对 (ξ_0, τ) 出现情形 (1), 则对邻近的 (x_0, t) 也如此, 这里 x_0 仍记 x_1 轴上的点.

引理 2 阵

$$P(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} & -\frac{x_2}{r} & -\frac{x_3}{r} \\ \frac{x_2}{r} & 1 - \frac{x_2^2}{r(r+x_1)} & -\frac{x_2 x_3}{r(r+x_1)} \\ \frac{x_3}{r} & -\frac{x_2 x_3}{r(r+x_1)} & 1 - \frac{x_3^2}{r(r+x_1)} \end{pmatrix} \quad (27)$$

当 $x \rightarrow -re_1$ 时为解析, 属于 SO_3 , 将 $x_0 = re_1$ 变为 $x = x_i e_i$. 又 $P(x_0) = E$, 这里 E 为单位阵.

证明 这些性质都可以从 $P(x)$ 的表达式直接看出.

现希望由 (19) 式定出 $\varphi(A, x, t)$. 在 (19) 式中取 A 为 $P(x)$, 得

$$B(x, t) = P(x)B(x_0, t)D(\varphi(P(x), x_0, t)). \quad (28)$$

记

$$\varphi(P(x), x_0, t) = \varphi(x, t), \quad (29)$$

则

$$B(Ax, t) = P(Ax)B(x_0, t)D(\varphi(Ax, t)). \quad (30)$$

由 (19) 式及 (28) 式可见

$$B(Ax, t) = AP(x)B(x_0, t)D(\varphi(x, t))D(\varphi(A, x, t)), \quad (31)$$

从而得到

$$B(x_0, t) = P^{-1}(Ax)AP(x)B(x_0, t)D(\varphi(A, x, t) + \varphi(x, t) - \varphi(Ax, t)). \quad (32)$$

$P^{-1}(Ax)AP(x)$ 使 x_0 保持不变, 所以等于某一 $R(\theta)$, 这里

$$\theta = \theta(A, x) = P^{-1}(Ax)AP(x) \text{ 的转角}. \quad (33)$$

由 (32) 式及引理 1 情况 (1) 可见

$$\varphi(A, x, t) = \theta(A, x) + \varphi(Ax, t) - \varphi(x, t). \quad (34)$$

现通过规范变换来简化 $\varphi(A, x, t)$. 取 $\zeta(x, t) \in SU_2$, 使 $ad\zeta$ 的阵 $C(\zeta)$ 即为 $R(-\varphi(x, t))$. 利用 $\zeta(x, t)$ 作规范变换, 规范势 b_λ 变为 b_λ , $\varphi(A, x, t)$ 变为 $\varphi_1(A, x, t)$.

这时

$$B_1(x, t) = B(x, t)D(-\varphi(x, t)), \quad (35)$$

从而得

$$\begin{aligned} B_1(Ax, t) &= B(Ax, t)D(-\varphi(Ax, t)) \\ &= AB(x, t)D(\varphi(A, x, t) - \varphi(Ax, t)). \end{aligned} \quad (36)$$

另一方面

$$\begin{aligned} B_1(Ax, t) &= AB_1(x, t)D(\varphi_1(A, x, t)) \\ &= AB(x, t)D(\varphi_1(A, x, t) - \varphi(x, t)). \end{aligned} \quad (37)$$

比较 (36) 和 (37) 式的右边, 又利用 (34) 式, 就得出

$$\varphi_1(A, x, t) = \varphi(A, x, t) - \varphi(Ax, t) + \varphi(x, t) = \theta(A, x). \quad (38)$$

从而可见 $\mathcal{S}$ 等价于一个场 $\mathcal{S}_1$, 它的 $\varphi_1(A, x, t)$ 即为 (33) 式定义的 $\theta(A, x)$. 因而不妨设对 $\mathcal{S}$ 就已经成立

$$\varphi(A, x, t) = \theta(A, x). \quad (39)$$

再证明 $\mathcal{S}$ 等价于同步球对称的规范场. 为此, 对任一 x_0 邻近的 x , 作 $\zeta(x)$, 使 $C(\zeta(x)) = P^{-1}(x)^D$, 用 $\zeta(x)$ 作规范变换, 则 Q 化为 Q_1 , 它和向径平行且同向, 又 $|Q_1|$ 只是 r 的函数. 记所得的规范势为

$$b_1(x, t) = \zeta(x)b(x, t)\zeta^{-1}(x) - \partial_i\zeta(x)\zeta^{-1}(x). \quad (40)$$

对任一 $A \in SO_3$, 作 $\zeta(A, x) \in SU_2$, 使 $C(\zeta(A, x)) = R(-\theta(A, x))$. 又作 ζ_A , 使 $C(\zeta_A) = A^{-1}$. 因为 $P^{-1}(Ax)AP(x) = R(\theta(A, x))$, 所以

$$C(\zeta(A, x)) = C(\zeta^{-1}(Ax)\zeta_A\zeta(x)),$$

从而就得

$$\zeta(Ax)\zeta(A, x)\zeta^{-1}(x) = \pm \zeta_A. \quad (41)$$

再从 (40) 式作

$$\begin{aligned} b_1(Ax, t) &= \zeta(Ax)b(Ax, t)\zeta^{-1}(Ax) - (\nabla\zeta(x))_{Ax}\zeta^{-1}(Ax) \\ &= A\zeta(Ax)\zeta(A, x)b(x, t)\zeta^{-1}(A, x)\zeta^{-1}(Ax) \\ &\quad - A\zeta(Ax)\nabla\zeta(A, x)\zeta^{-1}(A, x)\zeta^{-1}(Ax) - (\nabla\zeta(x))_{Ax}\zeta^{-1}(Ax), \end{aligned}$$

这里 $(\nabla\zeta(x))_{Ax}$ 记 $\nabla\zeta(x)$ 中置 x 为 Ax 的结果, 再利用 (40) 式得

$$b(x, t) = \zeta^{-1}(x)b(x, t)\zeta(x) - (\nabla\zeta^{-1}(x))\zeta(x).$$

又直接计算可知

$$\begin{aligned} &A\zeta(Ax)\nabla\zeta(A, x)\zeta^{-1}(A, x)\zeta^{-1}(Ax) + (\nabla\zeta(x))_{Ax}\zeta^{-1}(Ax) \\ &= A\nabla(\zeta(Ax)\zeta(A, x))(\zeta(Ax)\zeta(A, x))^{-1}, \\ &A\zeta(Ax)\zeta(A, x)(\nabla\zeta^{-1}(x))\zeta(x)\zeta^{-1}(A, x)\zeta^{-1}(Ax) \\ &\quad + A\nabla(\zeta(Ax)\zeta(A, x))(\zeta(Ax)\zeta(A, x))^{-1} = A\nabla\zeta_A\zeta_A^{-1} = 0, \end{aligned}$$

从而可见

$$b_1(Ax, t) = Ab(x, t)A^{-1}. \quad (42)$$

同样也有

$$b_1(Ax, t) = b_1(x, t)A^{-1}, \quad (43)$$

$$Q_1(Ax, t) = Q_1(x, t)A^{-1}. \quad (44)$$

1) 这种 ζ 除正负号外为唯一确定的, 由于我们在局部范围中讨论问题, 所以符号取法无关紧要.

这样,我们就证明了: $\mathcal{S}$ 局部地等价于同步球对称的场.

再证明,这种同步球对称的场必为非异的. 先证

引理 3 在进行规范变换 (40) 式时,

$$B_1(x_0, t) = B(x_0, t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

证明 由 $\zeta(x)$ 的定义可知

$$\zeta^{-1}(x)X_i\zeta(x) = p_{ij}(x)X_j. \quad (46)$$

这里 $p_{ij}(x)$ 为 $P(x)$ 的矩阵元. 将 (46) 式微分, 将所得结果左乘 $\zeta(x)$, 右乘 $\zeta^{-1}(x)$, 就得到

$$\zeta\partial_\lambda\zeta^{-1}X_i + X_i\partial_\lambda\zeta\zeta^{-1} = \partial_\lambda p_{ij}p_{kj}X_k,$$

或

$$[X_i, \partial_\lambda\zeta\zeta^{-1}] = \partial_\lambda p_{ij}p_{kj}X_k. \quad (47)$$

如置

$$\partial_\lambda\zeta\zeta^{-1} = W_\lambda^i X_i, \quad (48)$$

则

$$W_\lambda^i = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \partial_\lambda p_{ij} p_{kj}. \quad (49)$$

又由 (27) 式易见

$$(dp_{ij})_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{dx_2}{r} & -\frac{dx_3}{r} \\ \frac{dx_2}{r} & 0 & 0 \\ \frac{dx_3}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

从此就得出

$$(W_\lambda^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad W_4^i = 0. \quad (51)$$

从规范变换的定义就得到 (45) 式, 引理 3 证毕.

把 (45) 式和同步球对称的规范势 (12) 式相比较, 就得

$$S = b_2^3(x_0, t), \quad V = \frac{1}{r} b_2^3(x_0, t) - \frac{1}{r^2},$$

因 $b_2^3(x_0, t)$, $b_2^3(x_0, t)$ 不全为零, 所以

$$S = 0, \quad V = -\frac{1}{r^2}$$

不会同时成立, 因而场是非异同步球对称的.

从而得到结论: 属于情形 (1) 的场局部等价于负型的、非异的同步球对称场.

情形 (2) 和情形 (1) 可通过同位旋空间转动

$$X_1 \rightarrow -X_1, \quad X_2 \rightarrow -X_2, \quad X_3 \rightarrow X_3 \quad (52)$$

而互化, 这也是一种规范变换, 但情形 (2) 化为情形 (1) 后, 同位旋向量场 Q 和 X_1 反向, 因而有结论: 属于情形 (2) 的场局部地等价于正型的、非异的同步球对称场.

五、情形 (3) 和 (4) 的讨论. 局部结构小结

现讨论情形 (3), 记四维时空中的半平面 $x_2 = x_3 = 0, x_1 > 0$ 为 Π . 如果 Π 上有一点 (ξ_0, τ) 属于情形 (3), 那末必有这点的一个 Π 上的邻域, 在其中 $B(x_0, t)$ 的秩数 ≥ 1 , 而且 $b_1^2(x_0, t), b_1^3(x_0, t)$ 不全为零. 据引理 1, 在这个邻域中每点 (x_0, t) , $B(x_0, t)$ 必须属于情形 (3). 因而 (19) 式仍然可以写成为 (28) 式的形式, 照上节相同的方式可以证明, (34) 式现在变为

$$\varphi(A, x, t) = \varphi(Ax, t) - \varphi(x, t). \quad (53)$$

仍然可以作规范变换, 使 $\varphi(A, x, t)$ 化为零, 从而 (9), (10) 和 (11) 式便化为

$$\begin{aligned} b(Ax, t) &= Ab(x, t), \\ b_4(Ax, t) &= b_4(x, t), \\ Q(Ax, t) &= Q(x, t), \end{aligned} \quad (54)$$

这便是狭义球对称的情形, 而且是非异的. 从而得知: 在情形 (3) 的点的周围, 场 $\mathcal{F}$ 是非异的狭义球对称规范场.

再讨论情形 (4). 如果在一点 (ξ_0, τ) 出现情形 (4). 先假设 Π 上有 (ξ_0, τ) 的一个邻域, 其中的点均属于情形 (4). (9), (10) 式化为

$$\begin{aligned} b_1^a(x, t) &= 0 \quad (a = 2, 3), \\ b^i(Ax, t) &= A(b^i(x, t) - \nabla\varphi(A, x, t)). \end{aligned} \quad (55)$$

如果把 $b_1^i(x, t)$ 看成 G_1 群的规范势, 那末场就化为球对称的 G_1 群规范场, 即化为电磁场的情况 (G_1 群和 U_1 群同构, $\exp(\varphi X_1)$ 和 $\exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right)$ 相对应, 关于 φ 的周期是 4π). 这时场的强度除 $f_{\lambda\mu}^1 = f_{\lambda\mu}^2 = 0$ 外, $f_{\lambda\mu}^3$ 为一球对称的张量, 应有

$$H_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} f_{jk}^3 = H(r, t)x_i, \quad (56)$$

$$E_i = -f_{i4}^3 = E(r, t)x_i. \quad (57)$$

此外, Bianchi 恒等式 (即第一套 Maxwell 方程) 给出

$$H_i = \frac{hx_i}{r} \quad (h = \text{const}). \quad (58)$$

根据 (57) 和 (58) 式, 在局部范围内可以解出 b_1^i 作为势函数, 并且除了关于 G_1 群的规范变换外, b_1^i 是唯一确定的, 在这种局部的考虑中, 对 h 也暂时不出现量子化条件.

如果 (ξ_0, τ) 是 Π 上属于情形 (1) (或情形 (2)) 的点的极限点, 依连续性, 在球面

$S: r=r_0, t=\tau$ 上, 规范场是负型(或正型)同步特异球对称的, 这时应有 $h=-1$ (或 $+1$), 点 (ξ_0, τ) 不可能是属于情形(2)(或情形(1))和(3)的点的极限点. 又如果 (ξ_0, τ) 是 Π 上属于情形(3)的点的极限点时, 在这个球面上, 场是特异狭义球对称的, 因而 $h=0$.

这样, 我们在一切可能情况下确定了 (ξ_0, τ) 的一个邻域中球对称场的结构, 得到

定理 3 设带 Q 的 SU_2 规范场在 (ξ_0, τ) 的一个邻域中为球对称的, 那末场在该点附近的结构必为下述情况之一:

(1) 为正型非异同步球对称的; (2) 为负型非异同步球对称的; (3) 为非异狭义球对称的; (4) 为子群 G_1 的球对称规范场; (5) 为正型同步球对称的, 在过 (ξ_0, τ) 的球面 S 上为特异, 并为非异情况的极限; (6) 为负型同步球对称的, 在 S 上为特异, 并为非异情况的极限; (7) 为狭义球对称的, 在 S 上为特异, 并为特异情况的极限.

六、带 Q 的球对称场的整体结构

现设 $\mathcal{S}$ 是带 Q 的球对称 SU_2 规范场, 其势除空间原点外处处为光滑, 由于 SU_2 群和 S^3 同胚, 其任何连通的二维子流形可以在其中连续收缩为一点, 所以在定义 $\mathcal{S}$ 时没有必要用分解域的概念.

记 $S(r, t)$ 为以原点为中心, r 为半径的球面, t 为时间. 先证

引理 4 $S(r, t)$ 上任何两点只能同属于引理 1 所列举的同一种情形.

证明 由定理 3 显然可见, 对 $S(r, t)$ 上每点, 均可选取一球面上的邻域, 使其中各点都属于引理 1 所列举的同一种情形. 在 $S(r, t)$ 上任取二点 P_1, P_2 , 把它们用曲线弧 P_1P_2 连结起来, 那末可以有有限个球面区域 $Q_1, \dots, Q_i$ 覆盖弧 P_1P_2 , 每一 Q_i 中的点同属于引理 1 的同一种情况, 而且 $P_1 \in Q_1, P_2 \in Q_i, Q_i$ 和 Q_{i+1} 相交, 因此 P_1 和 P_2 属于同一种情况. 引理证毕.

再证

引理 5 如果 $S(r, t)$ 上有一点 P_0 属于情形(4), 那末在这球面上成立磁量子化条件

$$H_i = \frac{nx_i}{r^3}, \quad (59)$$

这里 n 是整数.

证明 若有点 P_0 的一个四维邻域, 其中各点均属于情形(4), 那末在 $S(r, t)$ 的周围, 就有一整体的 G_1 群规范场, 依照 G_1 群整体规范场的性质^[7,8], 并注意到 $\exp(\varphi X_i)$ 的周期为 4π , 就得出(59)式. 若 P_0 点为属于情形(1), (2)或(3)的点的极限, 那末由 H_i 的连续性也得出(59)式, 且 $n=-1, 1$ 或 0 . 引理证毕.

四维时空可以看作由 Π 旋转而成. 记 Π 中属于情形(1), (2), (3), (4)的点的集合为 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$. 由第四和第五节的讨论可知 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 在 Π 上都是开集, 它们的边界无公共点. 我们证明 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 中至多只能有一个非空. 例如, 设 Σ_1 为非空, 由函数 $r^2 H_i = n$ 的连续性可知, n 在 Π 上必须为 -1 , 所以 Σ_2, Σ_3 必为空集, 所以当 $n=-1$ 时, $\Pi = \Sigma_1 \cup \Sigma_4$, 我们就有负型同步球对称场, 这就是定理 1 中的情形(1), 当 Σ_4 为空集时, 整个场是非异的, 当 Σ_1 为空集时, 整个场是特异的, 同时也等价于 G_1 群的规范场. 同理, 当

$n = +1$ 或 0 时, 就有定理 1 中的情形 (2) 和 (3), 当 $|n| > 1$ 时, 必有 $\pi = \Sigma_4$, 有定理 1 中的情形 (4). 这样, 我们就完全证明了定理 1, 定出了带 Q 的球对称场的一切情况.

七、不带 Q 的球对称场

引理 6 设 $\mathcal{S}$ 为球对称的 SU_2 规范场, f_{ik}^a 是它的场强, 记

$$h_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} f_{jk}^a, \quad (60)$$

$$H(x, t) = (h_i^a), \quad E(x, t) = (-f_{ia}^a), \quad (61)$$

则对任何 $A \in SO_3$ 成立

$$\begin{aligned} H(Ax, t) &= AH(x, t)C(\zeta(A, x, t)), \\ E(Ax, t) &= AE(x, t)C(\zeta(A, x, t)). \end{aligned} \quad (62)$$

证明 为节省篇幅计, 这里用一下外微分形式记号. 令

$$\omega = b_\lambda^a dx_\lambda X_a \quad (63)$$

为 $\mathcal{S}$ 的势形式^[8], 记 $Ax = \tilde{x}$, 易见 (9), (10) 式可写为

$$\tilde{\omega}\zeta = \zeta\omega - d\zeta, \quad (64)$$

这里 $\tilde{\omega} = \omega(Ax, dAx)$. 对 (64) 式进行外微分, 得

$$d\tilde{\omega}\zeta - \tilde{\omega} \wedge d\zeta = d\zeta \wedge \omega + \zeta d\omega.$$

利用 (64) 式消去 $d\zeta$, 就得到

$$\zeta(d\omega + \omega \wedge \omega) = (d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega})\zeta, \quad (65)$$

或

$$\zeta(d\omega + \omega \wedge \omega)\zeta^{-1} = d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}. \quad (66)$$

写开来, 根据场强的定义和 (60), (61) 式, 就推出 (62) 式.

附注 这个引理适用于任何球对称的规范场, 只须把 ζ 的意义改一下就行了.

现在讨论场在一点 (ξ_0, τ) 附近的结构. 设在这点 H (或 E) 的秩数为 3, 由 (62) 式得

$$C^{-1}(\zeta(A, x, t)) = H^{-1}(Ax, t)AH(x, t), \quad (67)$$

由此可见, 对 $B \in SO_3$, 有

$$C^{-1}(\zeta(AB, x, t)) = C^{-1}(\zeta(A, Bx, t)\zeta(B, x, t)), \quad (68)$$

因而在适当地选取符号后, 就有

$$\zeta(AB, x, t) = \zeta(A, Bx, t)\zeta(B, x, t). \quad (69)$$

现在证明, 可取规范变换, 使变换后成立

$$\zeta(P(x), x_0, t) = I. \quad (70)$$

事实上, 任取 $\zeta(x, t)$ 作规范变换, $H(x, t)$ 变为 $H(x, t)C(\zeta(x, t))$, 从 (67) 式可见, $\zeta(A, x, t)$ 变为 $\zeta(Ax, t)\zeta(A, x, t)\zeta^{-1}(x, t)$. 取 $\zeta(x, t)$ 为 $\zeta^{-1}(P(x), x_0, t)$ 又取 A 为 $P(x)$, $x = x_0$, 从而可见 $\zeta(P(x), x_0, t)$ 变为 $\zeta^{-1}(P(x), x_0, t)\zeta(P(x), x_0, t)\zeta(P(x_0), x_0, t)$, 但 $\zeta(P(x_0), x_0, t) = I$, 所以 $\zeta(P(x), x_0, t)$ 就变为 I .

在 (62) 式中取 $x = x_0$, $A = R(\theta)$, 我们得

$$H(x_0, t) = R(\theta)H(x_0, t)C(\zeta(R(\theta), x_0, t)). \quad (71)$$

考察第一行元素,得

$$(h_1^1, h_1^2, h_1^3)C(\zeta(R(\theta), x_0, t)) = (h_1^1, h_1^2, h_1^3). \quad (72)$$

因 $H(x_0, t)$ 为非异, 故 (h_1^1, h_1^2, h_1^3) 为非零向量, 可作规范变换, 使 h_1^2, h_1^3 变为零, 可选取这个规范变换的 $\zeta(x, t)$ 使得 $\zeta(Ax_0, t) = \zeta(x_0, t)$, 从而不影响 (70) 式. 这时由 (72) 式可得 $\zeta(R(\theta), x_0, t) \in G_1$. 取 $H(x_0, t)$ 的第二、三列构成矩阵 $B'(x, t)$, 那末它也满足 (22) 形式的关系, 从而就可以应用引理 1. 由于 H 为非异, 故只能出现情形 (1) 和 (2), 而情形 (2) 又可通过规范变换变为情形 (1), 所以我们有

$$C(\zeta(R(\theta), x, t)) = R(-\theta). \quad (73)$$

和第四节相类似, 我们有

$$P^{-1}(Ax)AP(x)B'(x_0, t)C(\zeta(A, x_0, t)) = B'(x_0, t). \quad (74)$$

由引理 1 的情形 (1), (73) 和 (33) 式关于 $\theta(A, x)$ 的定义可见

$$C(\zeta(A, x, t)) = R(-\theta(A, x)). \quad (75)$$

从此可见, 这里的 $\zeta(A, x)$ 和第四节中 (41) 式中所用的 $\zeta(A, x)$ 相同, 那时的论述也适用于现在的情况. 所以, 如在 (ξ_0, τ) , H (或 E) 的秩数为 3, 则有一 (ξ_0, τ) 的邻域, 在其中场为非异同步球对称的 (因为特异同步球对称空间中 H 和 E 的秩数为 1), 但这时没有正型和负型的区别.

如在一区域中 H (或 E) 的秩数为 2, H 中各列向量构成一个二维平面, 这平面的法线是转动下的不变同位旋向量场; 如 H (或 L) 在一区域中的秩数是 1, 则 H 中各列向量共线, 也存在转动下的不变向量场, 从而带 Q 的场的讨论在这里都适用. 又若 H 和 L 在一区域中的秩数均为零, 那末场就是平凡的, 即可化为 $b_i^1 = 0$ 的情形 (这时也可以把它看成同步球对称、狭义球对称或化约的 G_1 群的规范场).

分析了这些情况以后, 我们就得出了定理 2.

八、关于用带 Q 的 SU_2 场表示球对称磁单极的讨论

取 s 为任一实数, 以 sX_i 代替 (2) 式中的 X_i , 那末 (6) 式就化为

$$\exp(\varphi X_1) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s\varphi}{2} & -i \sin \frac{s\varphi}{2} \\ -i \sin \frac{s\varphi}{2} & \cos \frac{s\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad (76)$$

换位运算化为

$$[X_i, X_j] = s\epsilon_{ijk}X_k, \quad (77)$$

而 Hooft 张量化为

$$f_{\lambda\mu} = \frac{1}{|Q|} q_a f_{\lambda\mu}^a - \epsilon_{abc} \frac{1}{s|Q|^3} q_a D_\lambda q_b D_\mu q_c. \quad (78)$$

$s = e$ 时, 就有 Schwinger 量子化条件; $s = 2e$ 时, 就有 Dirac 量子化条件, $\frac{1}{s}$ 是磁荷的最小单位.

在同步球对称的情形, 可以算出

$$f_{ij} = -\frac{W}{s|W|} e_{ijk} \frac{x_k}{r^3}, \quad (79)$$

$$f_{i4} = -\frac{W}{|W|} \left(U + r \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial S}{\partial s} - r^2 \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{x_i}{r}. \quad (80)$$

因此, 正型同步球对称场的磁荷总是 $\frac{1}{s}$, 负型同步球对称场的磁荷总是 $-\frac{1}{s}$ ¹⁾, 电磁场强度张量远不能确定 SU_2 规范场. 事实上, 给了磁荷为 $\pm \frac{1}{s}$ 的电磁场张量之后, $|W|$, U , V , S , T 之中还有三个是任意的, 除规范变换外, 规范场还包含相当大的自由度.

在狭义球对称的情况, 总成立

$$f_{ij} = 0.$$

因而磁单极不出现, 此时电磁场张量也不能决定规范场.

从上面的论述我们可以见到:

(1) 磁荷为 $\frac{n}{s}$ 的球对称磁单极, 其电磁场都可以用带 Q 的 SU_2 规范场来描述, 但 n 必须为整数;

(2) 磁荷为 $\frac{n}{s}$ 的球对称磁单极, 当 $|n| > 1$ 时, 它相应的带 Q 的 SU_2 规范场必化约为 G_1 群的规范场, 这个场由电磁场张量唯一确定;

(3) 同步球对称的带 Q 的 SU_2 规范场可用来描述磁荷为 $\pm \frac{1}{s}$ 的球对称磁单极, 但这个场不能由电磁场张量唯一确定;

(4) 狭义球对称的带 Q 的 SU_2 规范场可用来描述无磁荷的球对称电磁场, 但这个场不能由电磁场张量唯一确定;

(5) 用化约的 G_1 群规范场描述磁单极, 实质上就是用 U_1 群规范场(整体)来描述电磁场, 但它可以利用 SU_2 群的规范变换, 化为只需用一个坐标区域来描述^[7].

用 U_1 群整体规范场来描述磁单极, 有电磁场和 U_1 群规范场一一对应的优点. 如把带 Q 的 SU_2 规范场理解为电磁场和带电矢介子场的偶合, 那末由以上论述可以见到, 在非单位的磁单极周围出现的球对称的场只能是电磁场, 不能再有带电矢介子场. 因而具有非单位的磁荷的磁单极隐含了某种破坏球对称性的因素.

究竟是否存在磁单极, 磁单极有否球对称性, 用什么理论体系来描述它才是正确的, 这些问题终将有待于实践去解决, 伟大的领袖和导师毛主席指出: “许多自然科学理论之所以被称为真理, 不但在于自然科学家们创立这些学说的时候, 而且在于为尔后的科学实践所证实的时候.” 对于磁单极的学说, 也完全是这样.

参 考 文 献

- [1] C. N. Yang & R. L. Mills, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 191.
- [2] T. T. Wu & C. N. Yang, In *Properties of Matter under Unusual Conditions* (edited by H. Mark and S. Fernbach, Interscience 1969), 349.
- [3] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **79B** (1974), 276.

1) 同步球对称场和狭义球对称场的磁荷, 也可以由文献[9, 10]的结论中推出.

- [4] 侯伯宇, 科学通报, **20** (1975), 273.
- [5] 胡和生, 复旦学报(自然科学版), 1976, 1, 72.
- [6] 谷超豪、杨振宁, 中国科学, 1975, 471; *Scientia Sinica*, **18** (1975), 483.
- [7] T. T. Wu & C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.
- [8] 谷超豪, 复旦学报(自然科学版), 1975, 4, 83.
- [9] 侯伯宇、段一士、葛墨林, 兰州大学学报(自然科学版), 1975, 2, 26.
- [10] J. Arafune, P. G. O. Freund & C. J. Goebel, *Jour. Math. Phys.*, **16** (1975), 433.

ON SPHERICALLY SYMMETRIC SU_2 GAUGE FIELDS AND MONOPOLES

GU CHAO-HAO HU HE-SHENG

(Fudan University)

ABSTRACT

In this paper we consider some general properties of spherically symmetric SU_2 gauge fields. We prove that the SU_2 gauge fields which are spherically symmetric in the most general sense may be divided into three basic types only: (1) synchro-spherically symmetric SU_2 gauge fields, (2) strict-spherically symmetric SU_2 gauge fields, (3) spherically symmetric SU_2 gauge fields reducible to U_1 gauge fields.

The spherically symmetric SU_2 gauge fields with a Higgs field are investigated in detail and their types are completely determined. If such a field is regarded as due to the interaction of an electromagnetic field and electrically-charged vector bosons, then the following conclusion is obtained: In the spherically symmetric case there cannot exist an electrically-charged vector boson field around an m -unit monopole except for $m = \pm 1, 0$.