

一个自由界面的磁面方程一维的模型解*

庆 承 瑞 周 玉 美

(中国科学院物理研究所)

近来文献[1]证明: 对于准均匀的或趋肤的电流分布, 自由界面的磁面方程, 化为似线性椭圆型方程后, 可以用一简单迭代法求出最大解, 并且指出, 这一方程或者只有平庸解, 或者会有三个以上的解(包括平庸解). 但现有的计算方法, 对寻找除最大解以外的其他解还不太有效. 但是找出第三个解, 并且研究这些解的性质, 将是十分重要的. 因为特别是对有快磁压缩的环形装置, 如带状装置上, 原则上不能排除等离子体会平衡在不同的位型上. 这样就出现下面的问题: 不同的平衡位型中, 哪一个才是最稳定的? 为此目的, 在进行数值计算的同时, 我们解析地研究了如下的一维模型.

如果环形装置真空室的截面的高度和宽度相比很大, 如带状压缩装置的情况就是如此, 则粗略地可以将这一磁场形态看作是由无限高的两同心圆柱组成. 等离子体处于两同心圆柱之间的空间内. 令同心圆柱的半径分别为 r_1 和 r_2 , 等离子体内外侧边界的半径分别为 r_3 和 r_4 . 很明显, 被约束的等离子体必定满足 $r_1 < r_3 < r_4 < r_2$ 的关系. 此外, 为简单起见, 我们假定等离子体电流分布是准均匀的, 并且不存在成形场. 于是, 在 $r_3 < r < r_4$ 的区域内, 磁面方程为^[1]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{8\pi^2}{c} \frac{j_0}{\phi_0} \left[\frac{r^2}{r_0} \beta_p + r_0(1 - \beta_p) \right], \quad (1)$$

式中 r_0 是磁轴, j_0 是磁轴处电流密度, β_p 是磁轴处的角向磁压比. ϕ_0 原应为 ψ 在 r_0 处之值, 但因为在计算中我们对函数 ψ 在 r_0 处没有归一, 所以 ϕ_0 只为一任意常数.

在 $r_1 < r < r_3$ 和 $r_4 < r < r_2$ 的区域内则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

在边界上应满足

$$\begin{aligned} u|_{r=r_1} &= u|_{r=r_2} = -g, \\ u|_{r=r_3, r_4} &= \psi|_{r=r_3, r_4} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_3, r_4} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=r_3, r_4}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 g 是某一正常数.

不难看出, 方程(2)的解为

$$u = \frac{l_i}{2} r^2 + m_i,$$

* 1976年7月13日收到.

l_i 和 m_i 是积分常数, i 取 1 或 2, 用以标明等离子体内侧或外侧两真空区.

方程(1)的解则是

$$\phi = \frac{A}{8} r^4 + \frac{d}{2} r^2 + e + \frac{B}{2} \left(r^2 \ln r - \frac{1}{2} r^2 \right),$$

其中 d 和 e 是积分常数, $A = -\frac{8\pi^2}{c} \frac{j_0}{\phi_0} \beta_p$, $B = -\frac{8\pi^2}{c} \frac{j_0}{\phi_0} r_0(1 - \beta_p)$.

将上述解代入(3)式,立即得到以下关于界面的联立方程:

$$\begin{aligned} \frac{2g}{R_3 - R_1} - \frac{B}{2} \ln R_3 - \frac{A}{2} R_3 &= \frac{2g}{R_4 - R_2} - \frac{B}{2} \ln R_4 - \frac{A}{2} R_4, \\ \frac{A}{8} R_3^2 - \frac{1}{2} R_3 \left(\frac{2g}{R_3 - R_1} - \frac{B}{2} \right) &= \frac{A}{8} R_4^2 - \frac{1}{2} R_4 \left(\frac{2g}{R_4 - R_2} - \frac{B}{2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $R_1 = r_1^2$, $R_2 = r_2^2$, $R_3 = r_3^2$, $R_4 = r_4^2$, 除 R_3 和 R_4 是待求的以外, 其余都是给定的.

方程(4)表明, 自由界面问题存在多重解. 但物理上有意义的解必须是正解, 且满足

$$R_1 < R_3 < R_4 < R_2.$$

因为解析地寻求方程组(4)的根较为困难, 我们采用了数值解法求根. 所选取的参数如下: 长度取 0.6 米为单位, 电流用电磁单位, ϕ_0 取高斯-米²单位. 在以上单位中 $j_0 = 50$, $\phi_0 = 1500$, $\beta_p = 0.5$, $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1.167$, $r_0 = 0.9$, $g = 1$. 在这样的参数范围内, 可以找到两组根:

$$1) R_3 = 0.6363, R_4 = 0.9478; \text{ 和 } 2) R_3 = 0.3821, R_4 = 1.1999.$$

物理上有意义的其他根在所研究的参数区域内没有发现. 另一方面, 用文献[1]的迭代法找到对应方程(1)和(2)的最大解为

$$R_3 = 0.38, R_4 = 1.20.$$

在计算误差范围内和解析结果完全重合. 对于最大解, 可以得出等离子体宽度和真空室宽度比为 1:1.7, 压缩倍数小于 2. 但对第一组解, 宽度比为 1:3.7, 压缩倍数大于 2.

对于上述两组解, 可以从能量变分的原理进行讨论. 因为磁流体平衡方程可以从某一泛函的变分而得^[2,3]. 但在变分时必须考虑相应的约束条件. 如选下列变分函数^[4]:

$$I_1 = - \int \left(\frac{B^2}{8\pi} + \frac{P}{r-1} \right) dv, \quad (5)$$

式中 $r = C_p/C_v$. 相应的约束条件是在等离子体内磁通不变, 以及要求运动的等熵性和能量守恒^[5]. 第一个条件给出:

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}],$$

后两条件给出:

$$\delta P = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p - \gamma P \operatorname{div} \boldsymbol{\xi},$$

$\boldsymbol{\xi}$ 是等离子体的位移矢量. 对(5)式进行变分, 考虑上述条件, 立即得到

$$\delta I_1 = \frac{1}{c} \int \boldsymbol{\xi} \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dv - \int \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P dv + \frac{1}{4\pi} \left(\int \xi_n B^2 ds - \int (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi}) B_n ds \right). \quad (6)$$

(6) 式中第三项应在等离子体表面积分. 如果认为等离子体表面紧靠导体壁, 则 $\xi_n = 0$, B_n 在等离子体面上也为零. 这样, 由 $\delta I_1 = 0$ 就得到平衡方程. 可是如果等离子体并非紧靠导体壁, ξ_n 就未必是零. 这样变分函数(5)式就不一定合适.

如果选取下列形式的变分函数^[4]:

$$I_2 = - \int \left(\frac{P}{\gamma - 1} - \frac{B^2}{8\pi} \right) dv, \quad (7)$$

相应约束条件应取等离子体内纵向电流不变, 即

$$\delta \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}] + \nabla \varphi,$$

式中 φ 为任一标量函数. P 的变分同前. 这样, 对 (7) 式变分得到

$$\delta I_2 = \frac{1}{c} \int \boldsymbol{\xi} \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dv - \int \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P dv + \frac{1}{4\pi} \int B_n \varphi ds.$$

利用磁场法向分量在等离子体面上为零的条件立即得到平衡方程.

但按 (5) 或 (7) 式定义的 I , 取负号后, 并非任何条件下都可以作为位能看待. 只有在约束条件和真实的扰动所满足的物理条件相一致时, I_1 或 I_2 才能解释为位能. 按这一要求取 (7) 式的定义将更具有普遍性. 有兴趣的是: 用前面所得到的两组解分别计算 I_1 和 I_2 的值. 对于第一组解得到

$$-I_1 = 7.27, \quad -I_2 = -5.35;$$

对于第二组解, 即最大解:

$$-I_1 = 57.0, \quad -I_2 = -23.4.$$

这样, 如果选取 $-I_2$ 为位能, 则从静磁流体力学的位能曲线上看, 最大平衡解的位能最低. 可以期望, 这一结论, 在二维情况下, 也有可能成立. 另外, 以上讨论虽然只是对准均匀电流分布的, 但因为一切具有趋肤趋势的电流分布¹⁾的磁面方程都有最大解^[1], 所以对于这类电流分布可能都适用. 此外, 这一特例还说明文献[5]所得到的关于压缩比的极限可能仅对最大解才成立.

参 考 文 献

- [1] 张恭庆, 科学通报, **5** (1976), 225.
- [2] M. D. Kruskal, R. M. Kulsrud, *Phys. Fluids*, **1** (1958), 265.
- [3] H. Grad, H. Rubin, *Proc. Secand U. N. Inter. Conf. PUAE*, (1958), p. 1386.
- [4] V. D. Shafranov, *Reviews of Plasma Phys.*, **2** (1966), 103.
- [5] A. Kadish, *Nucl. Fusion*, **13** (1973), 756; G. Becker, *Nucl. Fusion*, **14** (1974), 319.
- [6] W. A. Newcomb, *Ann. Phys.*, **10** (1960), 232.

A SOLUTION OF THE EQUATION FOR A MAGNETIC SURFACE WITH A FREE BOUNDARY BASED ON A ONE-DIMENSIONAL MODEL

QING CHENG-RUI ZHOU YU-MEI
(Institute of Physics, Academia Sinica)

1) 具有趋肤趋势的电流分布指从等离子体中心到边界逐渐增加的电流分布. 趋肤的电流分布可以看作是这一分布的极限. 在趋向极限时要求满足条件 (3) 式^[6].