

超导桥约瑟夫森效应的微观理论*

刘 福 绥

(北京大学物理系)

提 要

用格林函数方法及两个桥区能隙模型,证明了超导 Dayem 桥的经验公式

$$I = \sum_n I_n \cdot \sin(n\phi),$$

并且定量地解释了实验上观察到的微波感应阶梯高度. 本文还给出了超导桥经验公式的充分条件,并讨论了约瑟夫森电流密度和桥长度的关系.

一、引 言

超导桥和隧道结一样,也具有约瑟夫森效应^[1]. 对此已有大量实验研究,相应地也有不少理论探讨,但大多数理论工作局限在 G-L 唯象理论,因而只能涉及 $T-T_c$ 温度范围^[2,3]. И. О. Кулик 等人曾对超导桥作过微观理论讨论^[4],但有杂质极限的限制,实际上桥常用纯 Nb 或纯 Pb 等材料制作,只靠桥区几何尺寸的收缩,杂质极限条件一般不满足. 本文将证明不用杂质极限的约瑟夫森电流公式.

本文首先把约瑟夫森隧道结微观理论讨论^[5]推广到桥,对桥区能隙函数的两种模型^[2,6-8],都得到约瑟夫森电流位相关系正是文献^[9]所给出的经验公式,预言了桥约瑟夫森电流和桥区长度的关系. 并对所给出的各级展开系数的正确性尽量用已有的实验^[10]作了检验,对比结果表明理论相当好地符合实验数据.

二、非均匀区超导电流公式

已知电流密度可用下式由格林函数表达^[10]:

$$\mathbf{j} = \frac{ie}{m} T \sum_{\omega} [(\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}}) G_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] |_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}, \quad (1)$$

其中 $G_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 是温度格林函数,与 Горьков 的 $F_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 函数共同满足一微分方程组(即 Горьков 方程组^[11]). 考虑到对于桥可用简化的一维模型(例如 z 方向不均匀),这时 Горьков 方程可写成下述形式:

$$\left(i\omega + \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \xi_0 \right) G_{\omega}(z, z') - \Delta(z) F_{\omega}^{+}(z, z') = \delta(z - z'),$$

* 1976年7月26日收到.

$$\left(-i\omega + \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \xi_q\right) F_{\omega}^+(z, z') + \Delta^*(z) G_{\omega}(z, z') = 0, \quad (2)$$

其中 $\xi_q = \mu - (q_x^2 + q_y^2)/2m$, 其负值为相对于化学势 μ 而言的 z 方向运动动能, $G_{\omega}(z, z')$ 及 $F_{\omega}^+(z, z')$ 是普通格林函数及 Горьков 函数对变量 $(x - x'), (y - y')$ 的傅氏分量, 与 ξ_q 有关. 为简单起见, 不再写出 ξ_q 变量了. 本文取 $\hbar = \hbar = 1$.

正常金属的格林函数满足

$$\left(i\omega + \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \xi_q\right) G_{\omega}^0(z, z') = \delta(z - z'). \quad (3)$$

由此可求出正常金属格林函数为

$$G_{\omega}^0(z - z') = -\frac{m}{ir_{\omega}} \cdot \exp(-ir_{\omega}|z - z'|). \quad (4)$$

其中 $r_{\omega} = [2m(\xi_q + i\omega)]^{\frac{1}{2}}$, $\text{Im}r_{\omega} < 0$. 因为 $\omega \sim T_c \ll \mu$, 得到

$$r_{\omega} \cong -(2m\xi_q)^{\frac{1}{2}} \text{sign } \omega - i|\omega|/\nu, \quad (5)$$

其中 $\nu = \sqrt{2\xi_q/m}$, 在正常金属自由电子近似下, ν 代表 z 方向电子运动速度.

可用正常金属格林函数表达超导体格林函数为如下的闭合方程组:

$$\begin{aligned} G_{\omega}(z, z') &= G_{\omega}^0(z, z') - \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 G_{\omega}^0(z - z_1) \Delta(z_1) \\ &\quad \cdot G_{-\omega}^0(z_1 - z_2) \Delta^*(z_2) G_{\omega}(z_2, z'). \end{aligned} \quad (6)$$

把(6)式代入(1)式, 即可求出超导电流 j 的表达式, 其 z 方向分量为 j

$$\begin{aligned} j &= -\frac{ie}{2\pi} T \sum_{\omega} \int_0^{\mu} d\xi_q \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \cdot G_{\omega}^0(z - z_1) \Delta(z_1) G_{-\omega}^0(z_1 - z_2) \Delta^*(z_2) G_{\omega}(z_2, z') \Big]_{z=z'=0}. \end{aligned} \quad (7)$$

为了以后计算上的方便, 把(7)式改写一下, 使 $-\omega$ 角标换到超导体格林函数上, 而且微商是对正常金属格林函数作的, 为此只要把格林函数的闭合表达式(6)叠代, 则有

$$\begin{aligned} j &= -\frac{ie}{2\pi} T \sum_{\omega} \int_0^{\mu} d\xi_q \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 \Delta(z_1) \Delta^*(z_2) \left[\left(\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \cdot G_{\omega}^0(z - z_1) G_{\omega}^0(z_2 - z') \Big]_{z=z'=0} G_{-\omega}(z_2, z_1). \end{aligned} \quad (8)$$

把正常金属格林函数表达式(4)代入上式, 得出以后要用的电流密度表达式.

$$\begin{aligned} j &= -\frac{ie}{2\pi} T \sum_{\omega} \int_0^{\mu} d\xi_q \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 (\text{sign } z_1 - \text{sign } z_2) \Delta(z_1) \\ &\quad \cdot \Delta^*(z_2) G_{\omega}^0(z_1 - z_2) G_{-\omega}(z_2, z_1). \end{aligned} \quad (9)$$

三、桥的约瑟夫森电流

桥的位形如图 1 所示, 以下我们选取两种桥区模型讨论约瑟夫森电流.

按文献[6]的分析, 能隙函数可取为

$$\Delta(z) = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\varphi_1} & z < -d/2, \\ \Delta_0 [f(z) e^{i\varphi_1} + (1 - f(z)) e^{i\varphi_2}] & |z| < d/2, \\ \Delta_2 e^{i\varphi_2} & z > d/2, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $f(z)$ 在 $z = -d/2$ 处取值为 +1, 在 $z = +d/2$ 处取值为零.

把格林函数闭合表达式(6)代入电流密度表达式(9), 并且逐次用(6)式叠代, 就得到一个级数表达的电流密度公式

$$j = \sum_{n=1}^{\infty} j'_n, \quad (11)$$

例如第一项为

$$j'_1 = -i \frac{em}{2\pi} T \sum_{\omega} \int_0^{\mu} d\xi_q \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 (\text{sign} z_1 - \text{sign} z_2) \cdot \Delta(z_1) \Delta^*(z_2) G_{\omega}^0(z_1 - z_2) G_{-\omega}^0(z_2 - z_1). \quad (12)$$

考虑到被积表达式有 $(\text{sign} z_1 - \text{sign} z_2)$ 因子, 及能隙函数特点, 对 z_1 和 z_2 的积分应把 z 轴分成四个区间: $[-\infty, -d/2]$, $[-d/2, 0]$, $[0, d/2]$, $[d/2, \infty]$, 再代入正常金属格林函数表达式(4), 则有

$$j'_n = \sin(n\phi) \frac{4em\Delta_0^{2n}T}{\pi} \int_0^{\mu} d\xi_q \frac{\xi_q^{2n}}{(\omega^2 + 4\xi_q^2)^n \omega^{2n}} e^{-\frac{2\omega d \sqrt{m}}{\sqrt{2}\xi_q}}. \quad (13)$$

所以

$$j = \sum_{n=1}^{\infty} j_n \cdot \sin(n\phi), \quad (14)$$

其中 $\phi = \phi_2 - \phi_1$, ω 取值为 πT .

在得出(13)式的过程中, 作了两个近似:

1. 在(12)式中有对 ω 的求和(无穷级数). 利用数值无穷级数公式^[12], 可以估计出无穷级数的第一项至少是其余项和的十倍, 在常用的实验观察范围内可以只保留第一项.
2. 在分段积分中出现两个积分的比较, 可证

$$\int_{d/2}^{\infty} dz_1 e^{-\frac{2|\omega|}{v}z_1} \gg \int_0^{d/2} dz_1 [1 - f(z_1)] e^{-\frac{2|\omega|}{v}z_1}. \quad (15)$$

因为当 $z_1 \leq d/2$ 时, $f(z_1) < 1$. 按文献[1]取 $d \cong 0.1-0.2 \mu\text{m}$, $v \approx 10^8 \text{cm/sec}$, $T \approx 4\text{K}$, 可估计

$$\int_{d/2}^{\infty} dz_1 e^{-\frac{2|\omega|}{v}z_1} \approx 10 \int_0^{d/2} dz_1 e^{-\frac{2|\omega|}{v}z_1}, \quad (16)$$

而

$$\int_0^{d/2} dz_1 [1 - f(z_1)] e^{-\frac{2|\omega|}{v}z_1} < \int_0^{d/2} dz_1 e^{-\frac{2|\omega|}{v}z_1}. \quad (17)$$

(17)和(16)式相比较, 则有(15)式.

下面使用另一个能隙模型^[7,8]:

$$\Delta(z) = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\varphi_1} & z < -d/2, \\ \Delta_1 e^{(i\varphi_1(z-d/2)/-d) + (i\varphi_2(z+d/2)/d)} & |z| < d/2, \\ \Delta_0 e^{i\varphi_2} & z > d/2, \end{cases} \quad (18)$$

其中 Δ_1 可以是 z 的函数.

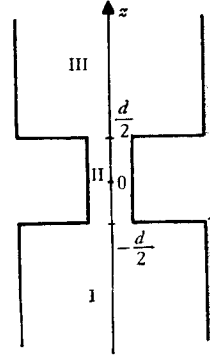


图1 桥位形

用类似的计算, 仍然得到(13), (14)式, 但在计算过程中用的近似不同, 这里我们用的近似关系是

$$\left| \int_{d/2}^{\infty} dz_1 e^{-\frac{2|\omega|}{v} z_1} \right| \gg \left| \int_0^{d/2} dz_1 e^{-i \left[\frac{(-\varphi_1 + \varphi_2) z_1}{d} + \frac{-\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] - \frac{2|\omega|}{v} z_1} \right|. \quad (19)$$

比较绝对值, 相当于比较正弦函数的振幅. (19)式相当于

$$\frac{v}{|\omega|} e^{-\frac{2|\omega|d}{v}} \gg \frac{1}{\left| i \left(\frac{-\varphi_1 + \varphi_2}{d} \right) + \frac{2|\omega|}{v} \right|}. \quad (20)$$

$v \cong 10^8 \text{ cm/sec}$, $\omega = \pi T \cong 10^{-3} \text{ eV}$, $d \approx 0.1 \mu\text{m}$. $(-\varphi_1 + \varphi_2)$ 是桥两边超导体的位相差, 在通常的实验条件下, 易证不等式(20)是不难满足的. 以下还应指出的是(13)式还可进一步简化, 考虑到 $\omega \approx 10^{-3} \text{ eV}$, 而对 ξ_q 的积分是从 0 到 μ , μ 的数量级是几个 eV, 故 $\omega \ll \mu$.

因此

$$\int_0^{\mu} d\xi_q \frac{\xi_q^{2n}}{(\omega^2 + 4\xi_q^2)^n} e^{-\frac{2\omega d \sqrt{m}}{\sqrt{2}\xi_q} n} \approx \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{\mu} d\xi_q e^{-\frac{2\omega d \sqrt{m}}{\sqrt{2}\xi_q} n}.$$

后者经数学变换可化为不完全 Γ 函数,

$$\int_0^{\mu} d\xi_q e^{-\frac{2\omega d \sqrt{m}}{\sqrt{2}\xi_q} n} = 2(\sqrt{2m} \omega d n)^3 \Gamma\left(-2, \sqrt{\frac{2m}{\mu}} \omega d n\right). \quad (21)$$

则(14)式可写为

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} e m^{3/2} \Delta_0^{2n} (\omega d n)^3 T}{\pi 2^{2(n-2)}} \Gamma\left(-2, \sqrt{\frac{2m}{\mu}} \omega d n\right) \sin(n\phi). \quad (22)$$

再应用不完全 Γ 函数积分表示式

$$\Gamma(\alpha, x) = \frac{e^{-x} x^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{-\alpha}}{x+t} dt \quad [\text{Re } \alpha < 1, x > 0], \quad (23)$$

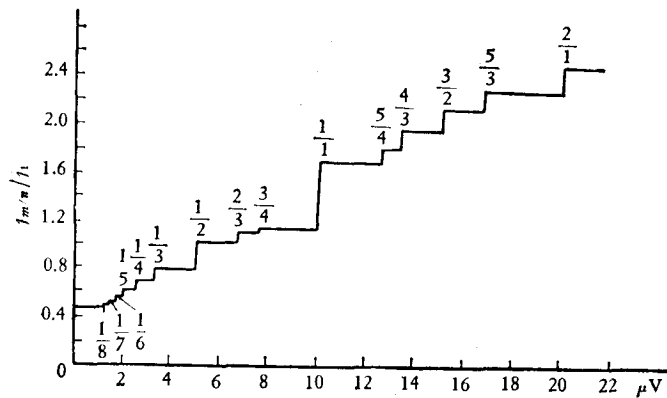


图2 桥 I - V 理论特性曲线

其中积分 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{-\alpha}}{x+t} dt$ 对 x 取值

不敏感, 故各级展开系数与桥区长度的关系近似可写成 $i_n \propto d e^{-\sqrt{\frac{2m}{\mu}} \omega d n}$. 这个关系目前无实验检验, 但桥区一般小于 $1 \mu\text{m}$, 如太长则亚谐阶梯不明显, 这一事实表明, 约瑟夫森电流和桥长度成指数衰减关系, 至少在定性上可能是对的.

用实验^[1]检验理论. 常用

的材料,如 Sn, Pb, Nb, In, Al 等,可估计 $\Delta_0/\omega \approx 1.7-2$, 化学势 $\mu \approx 1\text{eV}$, 文献[1]中取 $d \approx 0.1-0.2\mu\text{m}$, 设有 5GHz 的微波辐照, 我们的理论公式给出的阶梯高度曲线见图 2.

理论曲线和文献[1]的实验曲线(见图3)相比,两者的符合是相当好的,相对应的编号阶梯高度的相对大小,理论值和实验值基本一致,只是 m/n 取 $1/7$ 和 $1/8$ 编号的阶梯高度理论值比实验值偏小,这可能有二个原因,或是高 n 阶梯太小,理论值的相对误差大,或可能是噪声等实验中不可清除的干扰加大了高 n 阶梯相对偏离等因素造成,考虑到理论模型简化及几个参数在实验中未给定,有上述的符合程度应当认为是满意的.

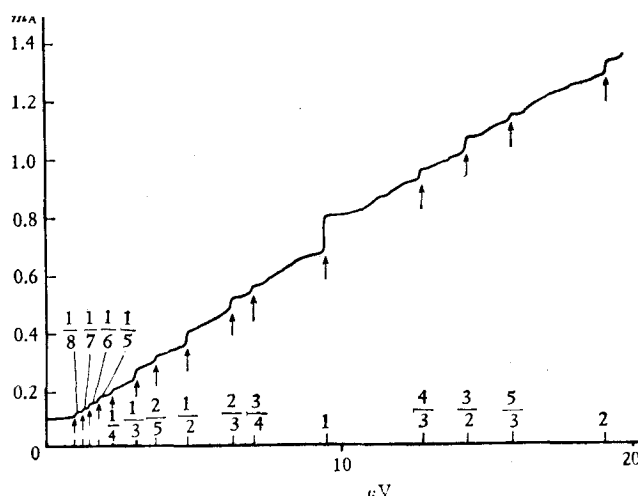


图3 桥的 $I-V$ 实验特性曲线^[1]

四、讨 论

上述对桥的理论处理,用于隧道结,则也有 $j = \sum j_n \sin n\phi$. 但 $j_n/j_{n+1} \approx D$, D 是穿透系数. 对于 $\mu \approx 1\text{eV}$, 势垒高度 $U_0 \approx 10\text{eV}$, $d = 10\text{\AA}$ 的一般情况,可由 $D = e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0-E)} \cdot d}$ 估值,其中 $E \approx \mu$, 则 $D \approx 10^{-20}$, 所以 j_2 及其以下各项都很小,相当于亚谐结构,实际上观察不到. 但文献[8]曾报道氧化层很薄的结也有亚谐结构,并且认为是桥造成的. 从上面分析可见,不排斥很均匀的薄氧化层隧道结也有亚谐结构.

应当指出,桥区能隙函数可以有很大的任意性,超导桥约瑟夫森电流,仍然能满足经验公式 $j = \sum_{n=1}^{\infty} j_n \sin n\phi$. 桥区能隙函数 $\Delta_c(z)$ 只要满足下面的积分不等式限制(充分条件),就必定成立:

$$\left| \int_{d/2}^{\infty} dz \Delta_0 e^{i\varphi_1} e^{\frac{-2|\omega|}{v} z} \right| \gg \left| \int_0^{d/2} dz \Delta_c(z) e^{\frac{-2|\omega|}{v} z} \right|. \quad (24)$$

我们的理论工作表明,约瑟夫森处理隧道结的一般理论方法^[5]是可以推广用于讨论超导桥的特性的.

有许多理论工作讨论超导弱联接的迴路参数变化对 $I-V$ 特性曲线的影响时,假定电流位相差关系为 $I = \text{Im} \sin \phi$. 但对桥和点接触来说,理论和实验都表明不能用上面简单的正弦函数关系. 文献[13]专文用三种假定的电流位相差关系,研究 $I-V$ 特性曲线. 我们建议这类工作可以用本文所给出的电流位相差关系为基础. 我们所给出的关系式(13), (14)或(22),虽然是无穷级数,但在应用数值计算时只取前六、七项即可. 这一点可以从

简单地估值看出, 设

$$\frac{\Delta_0}{\omega} \approx 2, \quad d = 0.2 \mu\text{m}, \quad \mu = 1 \text{eV},$$

则各级系数相对比值为

$$j_1:j_2:j_3:j_4:j_5:j_6:j_7:j_8 = 1:0.66:0.44:0.32:0.27:0.14:0.10:0.04,$$

再进一步的讨论即可仿照文献[13]作出.

参 考 文 献

- [1] A. H. Dayem, J. J. Wigand, *Phys. Rev.*, **155** (1967), 419.
- [2] A. Baratoff, J. A. Blackburn, B. B. Schwartz, *Phys. Rev. Lett.*, **25** (1970), 1096.
- [3] T. J. Rieger, D. J. Scalapino, *Phys. Rev.*, **B6** (1972), 1734.
- [4] И. О. Кулик, А. Н. Омеличик, *Письма в ЖЭТФ*, **21** (1975), 216.
- [5] D. D. Josephson, *Adv. in Phys.*, **14** (1965), 419.
- [6] Л. Г. Асламазов, А. И. Ларкин, *Письма в ЖЭТФ*, **9** (1969), 150.
- [7] P. V. Christiansen, E. B. Hansen, C. J. Sjöström, *Journal of L. T. P.*, **4** (1971), 349.
- [8] J. M. Rowell, W. L. Feldmann, *Phys. Rev.*, **172** (1968), 393.
- [9] D. N. Langenberg, "Tunneling Phenomena in Solids", (1969), 519.
- [10] 阿布里科索夫等著, 郝伯林译, "统计物理学中的量子场论方法", (1963), 310.
- [11] Л. П. Горьков, *ЖЭТФ*, **34** (1958), 735.
- [12] И. С. Градштейн, М. Рыжик, "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений", стр. 21, фор. о. 234.
- [13] F. Auracher, T. Van Duzer, *A. P. L.*, **21** (1972), 515.

A MICROSCOPIC THEORY OF THE JOSEPHSON EFFECT IN SUPERCONDUCTING BRIDGES

LIU FU-SUI

(Department of Physics, Beijing University)

ABSTRACT

The empirical formula $j = \sum_n j_n \sin n\phi$ for a superconducting Dayem bridge is proved using Green's function and the two-gap model of the bridge. A quantitative explanation for the observed height of the microwave induced step is presented. This paper also gives the sufficient condition for the empirical formula of a superconducting bridge, and the dependence of Josephson current density on bridge length is discussed.