

关于部分电离等离子体的广义欧姆定律*

陆 全 康
(复 旦 大 学)

提 要

本文导出在电离与复合达到动态平衡的部分电离等离子体中的非定态广义欧姆定律,分析了它在各种具体物理条件下的适用形式。当等离子体趋于完全电离时,它归结成 Spitzer 所给出的形式;而当部分电离等离子体处于定态的情况,则可化成 Cowling-Любимов 所给出的形式。最后将定律应用于部分电离等离子体交流电阻率、色散关系、电流过程和等离子体横越磁场的扩散等问题。

一、引 言

Spitzer^[1] 曾导出完全电离气体中的非定态形式的广义欧姆定律。Cowling^[2] 与 Любимов^[3] 分别将此定律推广到适用于部分电离等离子体的情况,但仅局限于定态的形式;本文将定态广义欧姆定律推广到非定态的形式。这样,凡能应用 Spitzer 广义欧姆定律处理的完全电离气体的各类问题就可以较简便地推广到分析当电离与复合达到动态平衡的部分电离气体中的相应问题。

关于稀薄的部分电离气体,与文献[1—3]类似,我们采用下列模型。首先,设各个组分(电子、离子与中性原子)以互相独立的运动气体存在,即各个组分均可写出单独的磁流体运动方程。各组分间的相互作用归结为二: 远程作用归结为自洽电磁场的作用,这意味着各运动方程中的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 既由外场确定,又包含本身电荷与电流所产生的场;近程作用归结成粒子间的二元碰撞。其次,设各组分间的相对运动速度比粒子的平均热速度小,此时整个气体可看成理想流体,压强归结为标量,而气体总压强等于各组分的分压强之和^[4]。设气体是准电中性的。

我们将根据下列假设来导出部分电离气体中的非定态广义欧姆定律:(i) 与 1 比较,略去数量级为 m_e/m_i 的项;与 P_e 比较,略去数量级为 $Zm_e P_i/m_i$ 的项(Z 为离子的荷电数,以下设 $Z=1$,这对结果无影响)。(ii) 忽略各组分的宏观速度及其导数的二次项。

本文采用高斯单位制。各符号所代表的意义参阅表 1。

表 1 符号表

m_e 为电子质量 m_i 为离子质量、中性原子质量 n 为电子密度、离子密度 n_a 为原子密度 $\mathbf{E}$ 为电场强度 $\mathbf{B}$ 为磁场强度 $\mathbf{v}$ 为整个介质的运动速度 $\mathbf{v}_i$ 为离子气体相对于介质的运动速度 $\mathbf{v}_e$ 为电子气体相对于离子气体的运动速度 $-e$ 为电子电荷 ν 为电子离子碰撞频率 ν_e 为电子原

* 1976 年 12 月 30 日收到。

子碰撞频率 ν_i 为离子原子碰撞频率 $\nu^* = \nu + \nu_e$ $\tau^* = 1/\nu^*$ τ 为电子离子二次碰撞之间的平均时间间隔 τ_e 为电子原子二次碰撞之间的平均时间间隔 τ_i 为离子原子二次碰撞之间的平均时间间隔 P_e 为电子气体压强 P_i 为离子气体压强 P 为整个气体压强 $\mathbf{j}$ 为电流密度 $\mathbf{j}_i = ne\mathbf{v}_i$ $\alpha = n/(n + n_a)$ 为电离度 ω_{pe} 为电子等离子体频率 ω_{ce} 为电子回旋频率 ω_{ci} 为离子回旋频率 $\tilde{\nu}_i = \nu_i/2$ $\nu_i^* = \tilde{\nu}_i/(1 - \alpha)$ $K = 1/\omega_{ce}\tau$ $K_e = 1/\omega_{ce}\tau_e$ $K_i = 1/2\omega_{ci}\tau_i$ $\hat{\eta}$ 为交流电阻率张量 $\hat{l}$ 为单位张量 $\eta = ne^2/m_e\nu$ $\eta_e = ne^2/m_e\nu_e$ $\eta^* = (K + K_e)B/nec$ c 为光速 $\sigma = 1/\eta^*$ N 为折射率 D 为扩散系数 σ_i 为电导率 σ_H 为霍尔电导率 ρ_e 为电荷密度 k 为波数 K 为玻耳兹曼常数 V 为谐波的速度 ω 为振荡频率 T 为温度 U 为问题的特征速度

二、非定态广义欧姆定律的一般形式

根据上述模型与假设 (i) 可得: 电子气体运动方程

$$\begin{aligned} m_e n \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i) \cdot \nabla (\mathbf{v} + \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i) \right] \\ = -\nabla P_e - ne \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{B} \right] - \frac{m_e n \mathbf{v}_e}{\tau} \\ - \frac{m_e n}{\tau_e} \left[\mathbf{v}_e \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) + \frac{\mathbf{v}_i}{1 - \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

离子气体运动方程

$$\begin{aligned} m_i n \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \cdot \nabla (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \right] \\ = -\nabla P_i + ne \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) \times \mathbf{B} \right] + \frac{m_e n \mathbf{v}_e}{\tau} \\ - \frac{n}{2} \frac{m_i}{\tau_i} \frac{\mathbf{v}_i}{1 - \alpha} - \frac{n}{2} \frac{m_e}{\tau_i} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \mathbf{v}_e. \end{aligned} \quad (2)$$

代替中性气体的运动方程, 采用整个气体的运动方程

$$m_i (n + n_a) \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

以上的三式与文献 [3] 中的 (1.6)–(1.8) 式的区别在于: 在 (1) 式中多保留一项:

$$-\frac{m_e n}{\tau_e} \mathbf{v}_e \frac{m_e}{m_i} \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

因为当气体趋于完全电离时 ($\alpha \rightarrow 1$), 此项的作用应予考虑. 其次, 在 (3) 式中已用了电中性条件.

引用假设 (ii), 并引入符号 $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}_i$, K , K_e , K_i 与 α . 再假定电离与复合达到动态平衡, 即电离度 α 不随时间改变, (1)–(3) 式可化成

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{nec} + \frac{\mathbf{j}_i \times \mathbf{B}}{nec} \\ + \frac{B \mathbf{j}}{nec} \left[\frac{m_e}{m_i} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{m_e}{m_i} K_i - K_e \right) - (K + K_e) \right] - \frac{B \mathbf{j}_i}{nec(1 - \alpha)} \left(\frac{m_e}{m_i} K_i - K_e \right), \quad (4) \\ \frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \omega_{ci} \frac{K_e + K_i}{1 - \alpha} \mathbf{j}_i = \frac{e}{m_i} [\alpha \nabla P - \nabla (P_e + P_i)] + \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$+ \frac{e(1-\alpha)}{m_i c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \omega_{ci} \left[\frac{m_e}{m_i} \frac{\alpha}{1-\alpha} (K_e + K_i) + K_e \right] \mathbf{j}, \quad (5a)$$

与

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\alpha \frac{\nabla P}{m_i n} + \alpha \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{m_i n c}. \quad (6)$$

在这些方程中 $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_e \mathbf{j}$, $\mathbf{j}_i$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, P , P_e , P_i , ω_{ci} , K , K_i , K_e 均可以是位置 $\mathbf{r}$ 与时间 t 的函数。由 (5a) 式得

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i(t) = & \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} \mathbf{j}(0) \right] e^{-\bar{\beta}t} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{j}(t) + e^{-\bar{\beta}t} \int_0^t e^{\bar{\beta}\xi} \left\{ \frac{e}{m_i} [\alpha \nabla P \right. \\ & \left. - \nabla(P_e + P_i)] + \frac{e(1-\alpha)}{m_i c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \omega_{ci} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) \mathbf{j} \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (5b)$$

式中

$$\bar{\beta} = \frac{1}{t} \int_0^t \beta d\xi, \quad \beta = \frac{\omega_{ci}(K_e + K_i)}{1-\alpha} = \left(\frac{m_e}{m_i} v_e + \frac{v_i}{2} \right) / (1-\alpha), \quad (5c)$$

$\bar{\beta}$ 是 β 在时间间隔 $[0, t]$ 中的平均值, $\bar{\beta}$ 仍可为 $\mathbf{r}$, t 的函数。将 (5b) 式代入 (4) 式, 最后得

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{n e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = & \frac{\nabla P_e}{n e} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{n e c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{B}{n e c} \left[\left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 K_i + K + K_e \right] \mathbf{j} \\ & + \frac{1}{n e c} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} \mathbf{j}(0) \right] \times \mathbf{B} e^{-\bar{\beta}t} - \frac{B \left(\frac{m_e}{m_i} K_i - K_e \right)}{n e c (1-\alpha)} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} \mathbf{j}(0) \right] e^{-\bar{\beta}t} \\ & + \frac{1}{n e c} e^{-\bar{\beta}t} \left[\int_0^t e^{\bar{\beta}\xi} \left\{ \frac{e}{m_i} [\alpha \nabla P - \nabla(P_e + P_i)] + \frac{e(1-\alpha)}{m_i c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega_{ci} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) \mathbf{j} \right\} d\xi \right] \times \mathbf{B} + \frac{B \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right)}{n e c (1-\alpha)} e^{-\bar{\beta}t} \int_0^t e^{\bar{\beta}\xi} \left\{ \frac{e}{m_i} [\alpha \nabla P \right. \\ & \left. - \nabla(P_e + P_i)] + \frac{e(1-\alpha)}{m_i c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \omega_{ci} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) \mathbf{j} \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式中 α 可取 $(0, 1)$ 间的任意值, 因而方程 (7) 是部分电离等离子体对于任意电离度均成立的非定态广义欧姆定律的一般形式。

三、两个特例

本节首先将证明, 当气体趋于完全电离时, 部分电离等离子体中的非定态广义欧姆定律归结成完全电离等离子体中 Spitzer 所导出的形式。当气体趋于完全电离时, 由 $\mathbf{v}$ 的定义:

$$n m_e (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_e) + n m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i) + n_a m_i \mathbf{v}_a = (n m_e + n m_i + n_a m_i) \mathbf{v},$$

当 $\alpha \rightarrow 1$, $n_a \rightarrow 0$ 时, 有 $m_e \mathbf{v}_e + m_i \cdot \mathbf{v}_i = 0$, 即 $-m_e \mathbf{j} + m_i \mathbf{j}_i = 0$ 。此外 $\alpha \nabla P - \nabla(P_e + P_i)$, K_e 与 K_i 趋于零, 而 $K_e/(1-\alpha)$ 与 $K_i/(1-\alpha)$ 趋于有限值。因而 (7) 式化成

$$\frac{m_e}{n e^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\nabla P_e}{n e} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{n e c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{K B}{n e c} \mathbf{j}. \quad (8)$$

由于 $KB/nec = m_e v / ne^2 \equiv \eta$ (文献 [1] 中 (5.32) 式), 因而 (8) 式与 Spitzer 所给出的形式一致.

若再利用 $P_e \approx p_i \approx p/2$ (文献 [5] 中 (3.58) 式), (8) 式就化成 Boyd 等所给出的形式 (文献 [5] 中 (3.61) 式).

其次, 推导部分电离气体的定态广义欧姆定律. 在恒定状态, 各物理量不随时间改变. (7) 式的左方等于零, 而右方含 t 的项取 $t \rightarrow \infty$, 这样就得

$$\begin{aligned} 0 = & \nabla P_e + ne \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{B}{c} \mathbf{j} \left[\left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 K_i + K + K_e \right] \\ & + \frac{1-\alpha}{B(K_e + K_i)} \left\{ [\alpha \nabla P - \nabla(P_e + P_i)] + \frac{1-\alpha}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{B}{c} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) \mathbf{j} \right\} \\ & \times \mathbf{B} + \frac{K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i}{K_e + K_i} \left\{ [\alpha \nabla P - \nabla(P_e + P_i)] + \frac{1-\alpha}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right. \\ & \left. + \frac{B}{c} \left(K_e - \frac{m_e}{m_i} K_i \right) \mathbf{j} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

当离子、电子与原子气体的温度相等, 根据等离子体动力学理论的公式, 估计出 τ_e 与 τ_i 的数量级. 由此得出 K_e/K_i , $m_e^2 K_i / m_i^2 K_e$ 与 1 比较可以略去. 因此 (9) 式化成

$$\begin{aligned} -\nabla P_e - ne \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + (K + K_e) \frac{B}{c} \mathbf{j} \\ - \frac{(1-\alpha)^2}{BK_i} \left\{ -\frac{\alpha}{\alpha+1} \nabla P \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

这与 Любимов 所给出的形式一致 (文献 [3] 中 (2.12) 式), 其中令电荷密度 $\rho_e = 0$, 因为这里已采用了电中性条件了.

四、各种具体物理条件下的非定态广义欧姆定律

从本节开始假定碰撞频率 ν_i, ν, ν_e 是常量. 与 (9) 式化成 (10) 式的条件一样, 与 1 比较略去 $o(K_e/K_i)$ 和 $o(m_e^2 K_i / m_i^2 K_e)$ 的项; 关于积分项, 利用中值定理,

$$\begin{aligned} e^{-\beta t} \int_0^t \beta e^{\beta \xi} f(\xi) d\xi = f(t_i) e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta \xi} \beta d\xi = f(t_i) (1 - e^{-\beta t}) \approx f(t_i) \\ (0 < t_i < t, \quad t > 1/\beta). \end{aligned} \quad (11)$$

从而可以同样估计积分项的数量级. 这样, 方程 (7) 可化成

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = & \frac{\nabla P_e}{ne} + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{B}{nec} (K + K_e) \mathbf{j} \\ & + \frac{1}{nec} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} \mathbf{j}(0) \right] \times \mathbf{B} e^{-\beta t} + \frac{K_e B}{nec(1-\alpha)} \left[\mathbf{j}_i(0) - \frac{m_e}{m_i} \mathbf{j}(0) \right] e^{-\beta t} \\ & + \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} \frac{e^{-\beta t}}{nec} \left\{ \int_0^t e^{\beta \xi} (\beta d\xi) [-c \nabla P_e + \mathbf{j} \times \mathbf{B}] \right\} \times \frac{\mathbf{B}}{B}, \end{aligned} \quad (12a)$$

式中

$$\beta \equiv \nu_i / 2(1 - \alpha). \quad (12b)$$

表 2

	I. $K + K_e \gg 1$ $K_i \gg 1$	II. $K + K_e \sim 1$ $K_i \gg 1$	III. $K + K_e \ll 1$ $K_i \gg 1$	IV. $K + K_e \ll 1$ $K_i \leq 1$ $(1-\alpha)^2/K_i \sim 1$	V. $K + K_e \ll 1$ $K_i \ll 1$ $(1-\alpha)^2/K_i \gg 1$
$v_e \sim U$	$\frac{m_e \sigma}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} + j$ $= \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right)$	$\frac{m_e \sigma}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} = \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right)$ $- \frac{\omega_{ce} \tau^*}{B} j \times B + \frac{\sigma}{n e} \nabla P_e$	$\frac{m_e \sigma}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} = \sigma \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right)$ $- \frac{\omega_{ce} \tau^*}{B} j \times B + \frac{\sigma}{n e} \nabla P_e$	$\frac{m_e}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = \nabla P_e + n e \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right)$ $- \frac{1}{c} j \times B + \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t (\beta d\xi) \right\} \times B/B$ $\times e^{\beta \xi} \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} (j \times B) \right] \times B/B$	$\frac{m_e}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = n e E + \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} e^{-\beta t}$ $\times \left\{ \int_0^t (\beta d\xi) e^{\beta \xi} \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} (j \times B) \right] \times B/B \right\}$
$v_e \ll U$	$\frac{m_e}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t}$ $= E + \frac{1}{c} v \times B$ [且当 $(K + K_e) v_e \ll U$ 时]	$\frac{m_e}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} = E + \frac{1}{c} v \times B$ [且当 $(K + K_e) v_e \ll U$ 时]	$\frac{m_e}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} = E + \frac{1}{c} v \times B$	$\frac{m_e}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = n e \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right)$ $+ \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t (\beta d\xi) e^{\beta \xi} \right\} \times B/B$ $\times \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} (j \times B) \right] \times B/B$ [且当 $\frac{(1-\alpha)^2 v_e}{K_i U} \sim 1$ 时]	$\frac{m_e}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = n e E + \frac{(1-\alpha)^2}{K_i}$ $\times e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t (\beta d\xi) e^{\beta \xi} \times \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} (j \times B) \right] \times B/B \right\}$ [且当 $\frac{(1-\alpha)^2 v_e}{K_i U} \gg 1$ 时] [当 $ E \gg \left \frac{1}{c} v \times B \right $, 而当 $ E \leq \left \frac{1}{c} v \times B \right $ 时, 式中略去 $n e E$ 项]
$v_e \gg U$	$\frac{m_e \sigma}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} + j$ $= \sigma E$	$\frac{m_e \sigma}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} + j = \sigma E$ $- \frac{\omega_{ce} \tau^*}{B} j \times B + \frac{\sigma}{n e} \nabla P_e$ [当 $ E \gg \left \frac{1}{c} v \times B \right $, 当 $ E \leq \left \frac{1}{c} v \times B \right $ 时, 式中略去 σE 项]	$\frac{m_e \sigma}{n e^2} \frac{\partial j}{\partial t} = \sigma E - \frac{\omega_{ce} \tau^*}{B} j$ $\times B + \frac{\sigma}{n e} \nabla P_e$ [当 $ E \gg \left \frac{1}{c} v \times B \right $, 当 $ E \leq \left \frac{1}{c} v \times B \right $ 时, 式中略去 σE 项]	$\frac{m_e}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = \nabla P_e + n e E - \frac{1}{c} j \times B$ $+ \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t (\beta d\xi) e^{\beta \xi} \right\} \times B/B$ $\times \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} (j \times B) \right] \times B/B$ [当 $ E \gg \left \frac{1}{c} v \times B \right $, 当 $ E \leq \left \frac{1}{c} v \times B \right $ 时, 式中略去 $n e E$ 项]	$\frac{m_e}{e} \frac{\partial j}{\partial t} = n e E + \frac{(1-\alpha)^2}{K_i}$ $\times e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t (\beta d\xi) e^{\beta \xi} \times \left[-\nabla P_e + \frac{1}{c} (j \times B) \right] \times B/B \right\}$ [当 $ E \gg \left \frac{1}{c} v \times B \right $, 当 $ E \leq \left \frac{1}{c} v \times B \right $ 时, 上式中略去 $n e E$ 项]

按文献[3]类似的分析,我们得出在各种具体物理条件下,非定态广义欧姆定律的各种简化形式,结果如表2所示.为了与各种条件下的定态广义欧姆定律相比较,表2的分类按文献[3]的相应内容列出.表中未写入含电流初条件的项,并引用了符号 $\sigma(\sigma \equiv ne^2\tau^*/m_e)$.关于各项的量级比较的主要根据为

1) 当 $K_i > 1$ 时,有

$$\frac{(1-\alpha)^2}{K_i} < \frac{1}{K_i} < 1. \quad (13)$$

2) 当 $(K + K_e) \geq 1$ 时,有

$$|(K + K_e)Bj| \geq |j \times B|. \quad (14)$$

3) 引入问题的特征速度 U , 它主要表征质元的宏观速度 v 的量级. 当 $U \geq v_e$ 时,有

$$|ne(v \times B)| \geq |j \times B|; \quad (15)$$

而当 $U \geq (K + K_e)v_e$ 时,有

$$|ne(v \times B)| \geq |(K + K_e)Bj|. \quad (16)$$

4) 综合条件2)与3),从(14)与(15)式得出,当 $(K + K_e) \cdot \frac{v_e}{U} \geq 1$ 时,有

$$|(K + K_e)Bj| \geq |nev \times B|. \quad (17)$$

5) 综合条件1)与3),从(13)与(15)式得出,当 $\frac{(1-\alpha)^2}{K_i} \frac{v_e}{U} \geq 1$ 时,有

$$\left| \frac{(1-\alpha)^2}{K_i} (j \times B) \times \frac{B}{B} \right| \geq |nev \times B|. \quad (18)$$

6) Любимов 指出,从磁流体力学与应用的观点看来,感兴趣的是电磁场对介质运动有较大影响时,即电磁力与介质惯性力有相同量级,此时由文献[3]中(3.3), (3.4)式

$$|\nabla P_e| \lesssim \left| \frac{1}{c} j \times B \right|. \quad (19)$$

五、适用于谐振过程的非定态广义欧姆定律

设物理量 $q(t)$ 具有谐振形式,即 $q(t) = q \exp(i\omega t)$, q 为振幅. 当 $t > 1/\beta$ 时,各阻尼项可以略去,因而算子

$$e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta \xi} \exp(i\omega \xi) d\xi \rightarrow \frac{\exp(i\omega t)}{\beta + i\omega}. \quad (20)$$

这样,从非定态广义欧姆定律(12)得出适用于谐振过程的非定态广义欧姆定律.

以下考虑处于恒定外加均匀磁场 B_0 中的温度及压强均匀的部分电离气体. 从(12)及(3)式得出线性化的谐振方程

$$\begin{aligned} E = & \left(i\omega \frac{m_e}{nc^2} - \frac{1}{ne^2\tau^*} \right) j - \frac{1}{nec} j \times B_0 \\ & + \frac{1}{m_i nc^2} \frac{1}{i\omega} \left(1 - \frac{\tilde{v}_i}{i\omega + \tilde{v}_i} \right) (j \times B_0) \times B_0 \equiv \tilde{\eta} \cdot j, \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $\tilde{\eta}$ 为交流电阻率张量. 设 $B_0 = B_{0\perp} e_z + B_{0\parallel} e_z$, 则 $\tilde{\eta}$ 可写为

$$\vec{\eta} = \begin{bmatrix} i\omega \frac{m_e}{nc^2} + \frac{m_e(v+v_e)}{nc^2} + \frac{B_{0\parallel}^2}{m_in c^2 i\omega} \left(1 - \frac{\tilde{v}}{i\omega + v_i^*} \right), & \frac{B_{0\parallel}}{nec}, & -\frac{B_{0\parallel} B_{0\perp}}{m_in c^2 i\omega} \left(1 - \frac{\tilde{v}}{i\omega + v_i^*} \right) \\ -\frac{B_{0\parallel}}{nec}, & i\omega \frac{m_e}{nc^2} + \frac{m_e(v+v_e)}{nc^2} + \frac{B_{0\parallel}^2}{m_in c^2 i\omega} \left(1 - \frac{\tilde{v}}{i\omega + v_i^*} \right), & \frac{B_{0\perp}}{nec} \\ -\frac{B_{0\perp} B_{0\parallel}}{m_in c^2 i\omega} \left(1 - \frac{\tilde{v}_i}{i\omega - v_i^*} \right), & -\frac{B_{0\perp}}{nec}, & i\omega \frac{m_e}{nc^2} + \frac{m_e(v+v_e)}{nc^2} + \frac{B_{0\perp}^2}{m_in c^2 i\omega} \left(1 - \frac{\tilde{v}_i}{i\omega + v_i^*} \right) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

由电磁场方程

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (23)$$

及(21)式,得出沿 z 方向传播的谐波色散关系公式

$$\det \{ (k^2 c^2 - \omega^2) \bar{\eta} - k^2 c^2 (\eta_{xx} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \eta_{xy} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + \eta_{xz} \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z) + 4\pi i \omega \bar{\mathbf{l}} \} = 0, \quad (24)$$

式中 η_{xx} , η_{xy} , η_{xz} 为张量 $\bar{\eta}$ 中的三个分量. 下面写出一些具体结果, 以与完全电离气体中已获得的结果^[6]相比较. 例如, 沿外磁场传播的静电波和回旋波色散关系各为

$$\omega^2 - i\omega(\nu + \nu_e) - \omega_{pe}^2 = 0, \quad (25)$$

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{k^2 c^2} = 1 / \left\{ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - i\omega(\nu + \nu_e) - \omega_{ce} \frac{i\omega(\omega_{ci} \pm \omega) + \nu_i^*(\alpha\omega_{ci} \pm \omega)}{i\omega + \nu_i^*}} \right\}. \quad (26)$$

此外, 电磁波色散关系为

$$\omega^3 - i(\nu + \nu_e)\omega^2 - (\omega_{pe}^2 + k^2 c^2)\omega + i(\nu + \nu_e)k^2 c^2 = 0. \quad (27)$$

当取 $\alpha = 1$, $\nu_e = \nu_i^* = 0$ 时, 它们就归结成文献[6]中的结果. 由(27)式得出, 在部分电离气体中, 电磁波的折射率 N 由下式确定:

$$N^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2 + (\nu + \nu_e)}{\omega^2 + (\nu + \nu_e)^2} - i \frac{(\nu + \nu_e)\omega_{pe}^2}{\omega \cdot [\omega^2 + (\nu + \nu_e)^2]}. \quad (28)$$

六、洛伦兹气体的广义欧姆定律

对于电离度很低的部分电离气体, 可采用洛伦兹电子气体模型^[7]. 此时令 $\nu = 0$, $m_i \rightarrow \infty (\omega_{ci} \rightarrow 0)$, 且单考虑电子-中性原子碰撞. 方程(7)化成

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\nu_e}{\eta_e} \mathbf{E} - \frac{\omega_{ce}}{B} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nu_e \mathbf{j} + \frac{e}{m_e} \nabla P_e. \quad (29)$$

与文献[8, 9]类似, 设 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ 与 ∇P_e 均是常量, 且 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, $\nabla P_e = (\nabla P_e)_x \mathbf{e}_x$. 在 $\mathbf{j}(0) = \mathbf{j}_0$ 的条件下, 解出方程(29)的科希问题, 从而得出, 电导率 σ_i 随时间变化的弛豫过程为

$$\sigma_i(t) = \frac{\nu_e^2}{\eta_e(\nu_e^2 + \omega_{ce}^2)} \left[1 - e^{-\nu_e t} \left(\cos \omega_{ce} t - \frac{\omega_{ce}}{\nu_e} \sin \omega_{ce} t \right) \right], \quad (30)$$

霍尔电导率 σ_H 随时间变化的弛豫过程为

$$\sigma_H(t) = \frac{-\omega_{ce}\nu_e}{\eta_e(\nu_e^2 + \omega_{ce}^2)} \left[1 - e^{-\nu_e t} \left(\cos \omega_{ce} t + \frac{\nu_e}{\omega_{ce}} \sin \omega_{ce} t \right) \right]. \quad (31)$$

等离子体(电子气体)横越磁场的瞬变扩散系数, 当 $\omega_{ce}\tau_e \gg 1$ 时, 为

$$D(t) = D_0(1 - e^{-\nu_e t} \cos \omega_{ce} t) + D_B e^{-\nu_e t} \sin \omega_{ce} t, \quad (32)$$

其中 D_0 为电子横越磁场的经典扩散系数

$$D_0 = KT\nu_e m_e c^2 / e^2 B^2, \quad (33)$$

D_B 为 Bohm 反常扩散系数^[10]

$$D_B = KTc / eB. \quad (34)$$

七、讨 论

从表 2 看出, 广义欧姆定律的方程形式可以分成二类: 第一类为 $K_i \gg 1$ (即 $\omega_{ci}\tau_i \ll 1$); 第二类为 $K_i \ll 1$ (即 $\omega_{ci}\tau_i \gg 1$).

第一类情况的物理意义是离子在它与原子的二次碰撞间, 离子的路程不呈螺旋形^[1]. 表 2 中的第 I, II, III 列均属于这种情况. 它们相应于, 无论在电子与离子或原子的二次碰撞间, 电子的路程不呈螺旋形 ($K + K_e \gg 1$)、初呈螺旋形 ($K + K_e \approx 1$) 和呈螺旋形 ($K + K_e \ll 1$). 这类情况的广义欧姆定律均不含积分项, 其最普遍的形式为

$$\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\nabla P_e}{ne} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{nec} - \frac{(K + K_e) B \mathbf{j}}{nec} + i. t., \quad (35)$$

式中 $i. t.$ 表示(12)式中含初始电流的二个指数衰减项. 当时间 $t > 1/\beta = 2(1-\alpha)\tau_i$ 后, $i. t.$ 项的影响即可略去. 但在分析电流与扩散流的完整解时, 应考虑到 $i. t.$ 项的存在. 将(35)与(8)式比较可见, 除了初条件项外, 仅需以 $K + K_e$ 代替 K 外(和以 $\alpha\omega_{ci}$ 代替 ω_{ci}), 就能从完全电离气体的结果引导出部分电离气体的相应结果. 但应注意到, 本文结果严格来说只适用于经过一段弛豫时间达到动态平衡以后的情形.

表 2 中的第 IV, V 列属于第二类情况, 在 $K + K_e \ll 1$ 时, 即电子、离子在二次碰撞间均呈螺旋形轨迹. 在此情况, 磁场对部分电离气体中的带电粒子, 和间接地对于原子影响强烈. 从表 2 中看到, 此时广义欧姆定律含积分项, 它与完全电离情况的广义欧姆定律差别比较明显.

本文不准备进一步讨论各类情况的详细求解过程, 作为举例, 我们指出一些结论. 例如在等离子体经过一段弛豫时间达到动态平衡后, 当有恒稳的等离子体横越磁场的扩散时, 在第一类情况中, 当 $K + K_e \gtrsim 1$ 时, 扩散系数为 $(\alpha + 1)m_e c^2 K T / \alpha e \tau^* B^2$, 它与 B^2 成反比, 即为普通的经典扩散. 而在第二类情况, 情形比较复杂, 如当 $K_i \lesssim 1$ 时, 存在有扩散系数为 $2(1 - \alpha)^2 K T \tau_i / \alpha m_i$ 的因离子与中性原子碰撞所引起的扩散; 显然当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 扩散系数趋于零, 即当气体趋于完全电离时, 此项扩散应消失.

通过以上的简短分析可见, 对于电离与复合达到动态平衡的部分电离气体, 采用广义欧姆定律后, 某些问题可以按完全电离气体类似地分析, 基本方程个数并不增加. 如果直接采用各组元的磁流体运动方程组, 则往往需要增加一个基本方程.

参 考 文 献

- [1] L. Spitzer Jr, Physics of Fully Ionized Gases, N. Y. Interscience (1956).
- [2] T. G. Cowling, Magnetohydrodynamics, N. Y. Interscience (1957).
- [3] F. A. Любимов, Прикладная математика и механика, **25** (1961), 611.
(或 A. Г. Куликовский и Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз (1962) стр 1.)
- [4] J. G. Linhart, Plasma Physics, 3rd. edition, Euraton (1969); А. И. Губанов, Ю. П. Аунькин, ЖТФ, **30** (1960), 1046.
- [5] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson, Plasma Dynamics, Nelson (1969).
- [6] L. Oster, Rev. Mod. Phys., **32** (1960), 141.

- [7] J. L. Delcroix, *Introduction a La Théorie des Gaz Ionisés*, Dunod, Paris (1959).
[8] G. Gambirasio, *Phys. Fluids*, **3** (1960), 299.
[9] 陆全康, *物理学报*, **20** (1964), 1124.
[10] H. Okuda, J. M. Dawson, *Phys. Fluids*, **16** (1973), 408.
[11] 卢鹤绂主编, *受控热核反应*, 上海科技出版社 (1962).

ON A GENERALIZED OHM'S LAW IN PARTIALLY IONIZED PLASMA

LU QUAN-KANG

(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this paper, a generalized Ohm's Law of unsteady state in partially ionized plasma is derived. Various appropriate expressions under concrete physical conditions are analysed. When plasma approaches fully ionization, the generalized Ohm's Law reduces to the form given by Spitzer; and when partially ionized plasma reaches steady state, the generalized Ohm's Law reduces to the form given by Cowling and Любимов. Finally, this Ohm's Law is applied to certain problems on plasma a. c. resistivities, dispersion relations and diffusions, etc.