

群表示论的物理方法 (II)*

置换群亚标准基和酉群 Gelfand 基

陈金全 王 凡 高美娟
(南京大学物理系)

提 要

本文中分析了态空间置换群 $\mathcal{S}_f$ 表示论中的矛盾,指出了原因在于当态指标有重复时, $\mathcal{S}_f$ 的单个群元算符没有确定作用. 根据文献[1]给出了这种情形下 $\mathcal{S}_f$ 的亚标准基的定义、标志和求法,并证明了 $\mathcal{S}_f$ 亚标准基同时就是酉群的 Gelfand 基.

一、引 言

我们在文献[1]中讨论了 f 个单粒子态 $i_1, i_2, \dots, i_f$ 全不相同时,如何用本征函数法求坐标空间置换群 S_f 和态空间置换群 $\mathcal{S}_f$ 的标准基. 物理应用中经常碰到的是单粒子态有重复的情形,例如组态 $(m_1)^{f_1}(m_2)^{f_2}\dots(m_n)^{f_n}$. 通常都认为这种情形下仍可用投影算符从正序态 (ω) 中投影出 S_f 和 $\mathcal{S}_f$ 的标准基[2]

$$\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega) = \hat{P}_m^{(v)\bar{m}}(\omega) \quad (\omega) = (i_1 i_2 \dots i_f) = (\underbrace{m_1 \dots m_1}_{f_1}, \dots, \underbrace{m_n \dots m_n}_{f_n}). \quad (1)$$

表面上看,这似乎是毋庸置疑的,因为不管态指标有无重复,似乎只要利用投影算符的性质,文献[1]中(15)式以及 $\mathcal{S}_f$ 群元 $\mathcal{D}$ 和 S_f 群元 p 的关系 $\mathcal{D} = p^{-1}$ 就能证明:

$$\mathcal{D}\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega) = \hat{P}_m^{(v)\bar{m}}\mathcal{D}(\omega) = \sum_{\bar{m}'} D_{\bar{m}'\bar{m}}^v(p)\phi_{\bar{m}'}^{(v)\bar{m}}(\omega)^v. \quad (2)$$

但仔细分析一下就可知道,“ $\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 在态指标有重复时也仍然是 $\mathcal{S}_f$ 的标准基 $(v\bar{m})$ ”这一断言是矛盾百出的. 例如, $\mathcal{S}_f$ 的 $\text{IR}(v)$ 的标准基应该有 h_v 个分量,而当态指标有重复时,却只有 $\tau_v < h_v$ 个独立分量,可能对某个 $\bar{m}$ 值 $\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega) = 0$, 也可能几个不同 $\bar{m}$ 的基如 $\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 和 $\phi_m^{(v)\bar{m}'}(\omega)$ 为线性相关,不同 $\bar{m}$ 的基不一定正交等等. 原因何在呢? 先回忆一下态空间置换群 $\mathcal{S}_f$ 的定义[2]. 在态指标有重复时,先把 f 个单粒子态编号如下:

$$i_1 = \dots = i_{f_1} = m_1, i_{f_1+1} = \dots = i_{f_1+f_2} = m_2, \dots, i_{f_1+\dots+f_{n-1}+1} = \dots = i_f = m_n. \quad (3)$$

然后按态的编号,定义 $\mathcal{S}_f$ 的置换 $\mathcal{D}^{[2,3]}$: $\mathcal{D}(i_1 \dots i_f) = (i_{p(1)} \dots i_{p(f)})$. 这里出现一个和量子力学中处理全同粒子相类似的问题. 本来全同的 f_1 个 m_1 态, f_2 个 m_2 态……,究竟把哪一个 m_1 当作 i_1 , 哪一个 m_1 当作 i_2 ……等等,完全是任意的,正由于这点,带来了 $\mathcal{S}_f$ 群元算符对 $\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 作用的不确定性,引起了 $\mathcal{S}_f$ 群表示论中的一系列矛盾.

* 1975 年 12 月 31 日收到.

1) 当我们只对态空间置换群感兴趣时,就删去下指标 m , 例如(1)式就写成 $\phi^{(v)\bar{m}} = \hat{P}^{(v)\bar{m}}(\omega)$.

二、置换群亚标准基

如何解决上述一系列矛盾呢? 这一节我们将从文献[1]出发, 给出一个既自然又有意义的解决办法.

由文献[1]中定理3可知, 如果 $\psi^{(\nu)\bar{m}}(\omega)$ 是 $\mathcal{S}_f$ 的标准基, 则它必满足本征方程

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(f) \\ \mathcal{C}(s) \end{pmatrix} \psi^{(\nu)\bar{m}}(\omega) = \begin{pmatrix} \nu \\ \bar{m} \end{pmatrix} \psi^{(\nu)\bar{m}}(\omega) \quad \mathcal{C}(s) = (\mathcal{C}(f-1) \cdots \mathcal{C}(2)), \quad (4)$$

$\mathcal{C}(i)$ 为 $\mathcal{S}_i$ 群的 CSCO. 在态指标有重复时既然 $\psi^{(\nu)\bar{m}}(\omega)$ 不具有标准基的性质, 那么它肯定不完全满足方程组(4). 要分清哪些部分不满足, 就等价于分清那些量子数是假的.

从(1)式正序态 (ω) 出发, 经 $\mathcal{S}_f$ 作用只能得到 $\mathcal{N}$ 个线性独立的态:

$$\varphi_a = p(\omega) = p(i_1 i_2 \cdots i_f) \quad a = 1, 2, \cdots \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} = f! / f_1! f_2! \cdots. \quad (5)$$

因此, 利用投影算符 $\hat{P}_m^{(\nu)\bar{m}}$, 也只能得到 $\mathcal{N}$ 个线性独立基, 而量子数 $(\nu, m, \bar{m})$ 却有 $f!$ 套, 故量子数过剩, 而必定有些是假的. 容易证明:

$$\langle \psi_m^{(\nu)\bar{m}} | \psi_{m'}^{(\nu)\bar{m}'} \rangle = \delta_{\nu\nu'} \delta_{mm'} \sqrt{\frac{f!}{h_\nu}} \langle \omega | \hat{P}_m^{(\nu)\bar{m}'} | \omega \rangle. \quad (6)$$

只有当 (ω) 中所有态指标全不相同, (6)式才对内禀量子数 $\bar{m}$ 也正交. 由此可见, 虚假量子数全都包含在 $\bar{m}$ 中. 如何区分 $\bar{m}$ 中哪些是真实, 抑或虚假的呢? 解决此问题的关键在于, 分清 $\mathcal{S}_f$ 中那些算符是否具有确定作用而定.

不难证明, 虽然 $\mathcal{S}_f$ 的单个群元对(5)式中的 $\mathcal{N}$ 个 φ_a 没有确定作用, 但是群链 $\mathcal{S}_f \supset \mathcal{S}_{f-f_1} \supset \mathcal{S}_{f-f_1-f_2} \supset \cdots \supset \mathcal{S}_{f_1+f_2} \supset \mathcal{S}_{f_1}$ (以后称它为断链并记为 $G \supset G(s')$) 中每一个群的类算符对 φ_a 都有确定作用, 其结果和我们把 f_1 个 m_1 中那一个当作 $i_1 \cdots$ 那一个当作 i_{f_1} , f_2 个 m_2 中那一个当作 i_{f_1+1} , $\cdots$ 那一个当作 $i_{f_1+f_2}$ 等等无关. 因此这些群的 CSCO $(\mathcal{C}(f), \mathcal{C}(s')) = (\mathcal{C}(f), \mathcal{C}(f-f_1) \cdots \mathcal{C}(f_1+f_2), \mathcal{C}(f_1))$ (以后称它为断链的 CSCO) 对 φ_a 及其线性组合——投影态 $\hat{P}_m^{(\nu)\bar{m}}(\omega)$ 有确定作用. 所以 $(f-1)$ 个本征方程(4)中, 只有 n 个方程即 $(\mathcal{C}(f), \mathcal{C}(s'))$ 的本征方程是成立的, 它们的本征值 (ν, k) 是真实的, 而其余 $(f-n-1)$ 个方程因有关的 CSCO 无确定作用而不再满足, 相应的量子数都是虚假的. 原来我们用本征方程(4)规定标准基, 一个自然的推广是, 把满足下列方程的解 $\psi^{(\nu)k}$ 称为 $\mathcal{S}_f$ 群的亚标准基:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(f) \\ \mathcal{C}(s') \end{pmatrix} \psi^{(\nu)k} = \begin{pmatrix} \nu \\ k \end{pmatrix} \psi^{(\nu)k}, \quad \mathcal{C}(s') = (\mathcal{C}(f-f_n), \cdots \mathcal{C}(f_1+f_2), \mathcal{C}(f_1)), \quad (7)$$

$$k = (\bar{\lambda}_{f-f_n} \cdots \bar{\lambda}_{f_1+f_2} \bar{\lambda}_{f_1})$$

这里 k 是从 $\bar{m} = (\bar{\lambda}_{f-1} \bar{\lambda}_{f-2} \cdots \bar{\lambda}_2)$ 中剔除虚假量子数后剩下的真实量子数. 按照文献[1]中定理2, $\psi^{(\nu)k}$ 也就是 $G \supset G(s')$ 分类基. 当所有 f_i 都等于1时, 亚标准基就回到标准基. 亚标准基 $\psi^{(\nu)k}$ 由 n 个量子数 $(\nu, k) = (\lambda_f, \lambda_{f-f_n}, \cdots \lambda_{f_1})$ 标志, 且

$$\lambda_{f_1} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 2 \end{pmatrix} = f_1(f_1-1)/2.$$

又由于现在 k 是真实量子数, 所以对 k 的正交性成立.

现在说明一下在态指标有重复时, 应如何正确理解和使用投影算符. 这时 $\phi_m^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 是不归一的 S_f 的标准基 (v, m) 分量和 $\mathcal{S}_f$ 的亚标准基 (v, k) 分量. 略去下标 m 可写为

$$\phi^{(v)\bar{m}}(\omega) = \hat{P}^{(v)\bar{m}}(\omega) = R^{(v)\bar{m}}(\omega) \phi^{(v)k}(\omega), \quad R^{(v)\bar{m}}(\omega) = \left(\sqrt{\frac{f!}{h_v}} \langle \omega | \hat{P}_m^{(v)\bar{m}} | \omega \rangle \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

$R^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 为一常数, $\phi^{(v)k}$ 为正交归一的亚标准基. 并且可能有几个不同 $\bar{m}$ 的投影算符 $\hat{P}^{(v)\bar{m}}$ 投影出同一个亚标准基 $\phi^{(v)k}$. 这是因为从不同 $\bar{m}$ 剔除虚假量子数后可能给出同一个真实量子数 k . 例如:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta \end{bmatrix} = \phi^{(2),0,*}(\alpha\beta\beta\gamma) = \sqrt{2} \phi^{(2),0,1}(\alpha\beta\beta\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}} \phi^{(2),0,-1}(\alpha\beta\beta\gamma).$$

这里从 $\bar{m} = (\bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_2) = (0, 1)$ 和 $(0, -1)$ 中剔除虚假量子数 $\bar{\lambda}_2$ 后就得到同一个真实量子数 $k = (\bar{\lambda}_3, *) = (0, *)$, 在 $\bar{\lambda}_2$ 的位置上打“*”表示 $\mathcal{S}_2$ 的 CSCO 对它没有确定作用, 所以它根本不是 $\mathcal{S}_2$ 群的 IR 基. 还值得指出, 在态指标有重复时, 虽然实质上 $\hat{P}^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 不是 $\mathcal{S}_f$ 的标准基, 但形式上我们还可以把它当作 $\mathcal{S}_f$ 的标准基, 即不管 $\hat{P}^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 为零也好或和 $\hat{P}^{(v)\bar{m}'}(\omega)$ 线性相关也好, 都把它当作独立分量, 则它们仍满足 (2) 式. 这其实是由于 $\hat{P}^{(v)\bar{m}}$ 是内禀群 $\bar{S}_f$ 的标准基^[1], 并不说明 $\hat{P}^{(v)\bar{m}}(\omega)$ 是 $\mathcal{S}_f$ 的标准基.

虽然可根据 (8) 式用投影算符来得到 $\mathcal{S}_f$ 的亚标准基, 但是投影算符法有很多缺点, 不如直接用本征函数法方便. 例如, 我们可直接从解本征方程:

$$\sum_{b=1}^{\mathcal{N}} \left[\left\langle \varphi_a \left| \begin{matrix} \mathcal{C}(f) \\ \mathcal{C}(s) \\ \mathcal{C}(s') \end{matrix} \right| \varphi_b \right\rangle - \begin{pmatrix} v \\ m \\ k \end{pmatrix} \delta_{ab} \right] u_{mk,b}^v = 0, \quad (9)$$

而将 (5) 式的 $\mathcal{N}$ 个基 φ_a 约化成 IR 基

$$\phi_m^{(v)k}(\omega) = \sum_{a=1}^{\mathcal{N}} u_{mk,a}^v \varphi_a \quad m = 1, 2, \dots, h_v, \quad k = 1, 2, \dots, \tau_v, \quad \mathcal{N} = \sum_v \tau_v h_v. \quad (10)$$

三、 $\mathcal{S}_f$ 群亚标准基和酉群 Gelfand 基

Moshinsky^[4] 证明了 $\mathcal{S}_f$ 群的标准基就是 U_n 群特殊的 Gelfand 基, Lezuol^[5] 在 SU_3 这个特殊情形下, 证明了 Gelfand 基可用置换群投影算符作出. 我们这里将普遍证明, $\mathcal{S}_f$ 的亚标准基就是 U_n 群 Gelfand 基.

我们知道, U_n 群 Gelfand 基^[7] 是 U_n 及其正则子群链 $U_n \supset U_{n-1} \supset \dots \supset U_2 \supset U_1$ 中各子群的不变算符集 (即完备算符集) $\{I_k^{(n')}\}$, $k = n', n' - 1, \dots, 1$, $n' = n, n - 1, \dots, 1$ 的共同本征函数. 因此, 如果我们能证明这些不变算符都能用断链 $\mathcal{S}_f \supset \mathcal{S}_{f-1} \supset \dots \supset \mathcal{S}_1$ 的类算符表示出来, 也就证明了 $\mathcal{S}_f$ 群亚标准基就是 U_n 群 Gelfand 基.

Partensky^[6] 已经证明, 对任一组态 $(m_1)^{i_1} (m_2)^{i_2} \dots (m_n)^{i_n}$, U_n 群的不变算符 $I_k^{(n)}$ 可用 S_f 群的平均类算符表示出来, 又由于 S_f 群和 $\mathcal{S}_f$ 群的类算符相等^[1], 所以有

$$I_k^{(n)} = F_k^{(n)}(\mathcal{C}^{(k)}(f), \mathcal{C}^{(k-1)}(f), \dots, \mathcal{C}^{(2)}(f)) \quad k = n, n - 1, \dots, 1. \quad (11)$$

这里 $\mathcal{C}^{(i)}(f)$ 为 $\mathcal{S}_f$ 群 i -cycle 平均类算符. 现在要把 (11) 式推广到 U_n 子群的不变算符

和 $\mathcal{S}_f$ 子群的类算符的关系, 即证明

$$\begin{aligned} I_k^{(n-1)} &= F_k^{(n-1)}(\mathcal{C}^{(k)}(f-f_n), \mathcal{C}^{(k-1)}(f-f_n), \dots, \mathcal{C}^{(2)}(f-f_n)), \\ &\dots\dots\dots \\ I_k^{(2)} &= F_k^{(2)}(\mathcal{C}^{(2)}(f_1+f_2)), \\ I_1^{(1)} &= f_1. \end{aligned} \quad (12)$$

为此, 我们类似于 Partensky^[6] 定义一个算符

$$P_k^{f-f_n} = \binom{f-f_n}{k}^{-1} \frac{1}{k!} \sum_{a_1 > a_2 > \dots > a_k}^f \sum_{\substack{m_1 \\ i_1 i_2 \dots i_k}}^{m_n-1} (e_{i_1 i_2}^{(a_1)} e_{i_2 i_3}^{(a_2)} \dots e_{i_k i_1}^{(a_k)})_s, \quad (13)$$

下标 s 代表对指标 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 对称化. 容易证明 $P_k^{f-f_n}$ 作用在正序态 (ω) 上得

$$\begin{aligned} P_k^{f-f_n}(\omega) &= \binom{f-f_n}{k}^{-1} \frac{1}{k!} \sum_{a_1 > a_2 > \dots > a_k}^{f-f_n} (a_1 a_2 \dots a_k)_s(\omega) \\ &= C^{(k)}(f-f_n)(\omega) = \mathcal{C}^{(k)}(f-f_n)(\omega). \end{aligned} \quad (14)$$

这里 $(a_1 a_2 \dots a_k)$ 表示坐标 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 的 k 循环置换算符. 类似地可证明 $P_k^{f-f_n}$ 作用在

非正序态 $(\tilde{\omega}) = p(\omega)$ 上为 $\left[p = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, f \\ p_1, p_2, \dots, p_f \end{pmatrix} \right]$,

$$\begin{aligned} P_k^{f-f_n}(\tilde{\omega}) &= \binom{f-f_n}{k}^{-1} \frac{1}{k!} \sum'_{a_1 > a_2 > \dots > a_k} (a_1 a_2 \dots a_k)_s(\tilde{\omega}) \\ &= C^{(k)}(f-f_n)(\tilde{\omega}) = \mathcal{C}^{(k)}(f-f_n)(\tilde{\omega}). \end{aligned} \quad (15)$$

这里求和号上带撇表示 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 只能从 $p_1, p_2, \dots, p_{f-f_n}$ 中取, $C^{(k)}(f-f_n)$ 为置换群 $S_{f-f_n}(p_1, p_2, \dots, p_{f-f_n})$ 的 k 循环平均类算符. 因此, 对 (5) 式的 $\mathcal{N}$ 个 φ_a , $P_k^{f-f_n}$ 都等价于 $\mathcal{S}_{f-f_n}$ 群的 k 循环平均类算符 $\mathcal{C}^{(k)}(f-f_n)$. 另一方面, $P_k^{f-f_n}$ 又可表成 U_{n-1} 群的不变算符 $I_k^{(n-1)}, I_{k-1}^{(n-1)}, \dots, I_{2,1}^{(n-1)} I_1^{(n-1)}$ 的函数, 反过来 $I_k^{(n-1)}$ 也就可表成 $\mathcal{C}^{(k)}(f-f_n), \mathcal{C}^{(k-1)}(f-f_n), \dots, \mathcal{C}^{(2)}(f-f_n)$ 的函数, 即 (12a) 式成立. 对 $U_{n-2} \dots$ 等子群可类似地论证.

由此可知, 任何 SU_n 群的 Gelfand 基均可用本征函数法方便地求得.

最后讨论 $\mathcal{S}_f$ 亚标准基, 即 U_n Gelfand 基的几种标志方法.

(1) $\phi^{(\nu)k}(\omega)$, (ω) 代表某一组态的正序态, (ν, k) 为 n 个本征值 $(\bar{\lambda}_f, \bar{\lambda}_{f-f_n}, \dots, \bar{\lambda}_{f_1})$, 利用文献 [1] 中对照表 1.1, 后者又可换成用 n 组配分 $[m_{in}], [m_{in-1}], \dots, [m_{i1}]$, 这样 $\phi^{(\nu)k}(\omega)$ 就等价于标志方法 (2).

(2) $\left| \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right\rangle$, 用 Gelfand 符号标志^[7], $[\nu] = [m_{in}]$.

(3) $\phi^{(\nu)}(W)$, 用一个 Weyl 盘或称 ρ_m 盘^[2]标志.

(4) $\phi^{[\nu]r_m}(\omega)$, 用态空间 Yamanouchi 数 r_m ^[2] 及 (ω) 标志.

现举例说明如下(单粒态顺序取为 $\alpha = m_1, \beta = m_2, \gamma = m_3$):

(i) $(\omega) = (\alpha\alpha\beta\gamma\gamma)$,

$$\phi^{(5),*,3,1}(\omega) = \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{matrix} \alpha & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & & & \end{matrix} \propto \phi^{[41]21111}(\omega) \propto \phi^{[41]12111}(\omega), \text{ 它属于 } \mathcal{S}_5 \text{ 和 } U_3$$

的 [41], $\mathcal{S}_3$ 和 U_2 的 [3], $\mathcal{S}_2$ 和 U_1 的 [2] 不可约表示.

(ii) $(\omega) = (\alpha\alpha\beta\beta\beta)$,

$$\phi^{(2),*,*,1}(\omega) = \left| \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\beta} \beta \propto \phi^{[32]22111}(\omega) \propto \phi^{[32]21211}(\omega) \propto \phi^{[32]12211}(\omega),$$

属于 $\mathcal{S}_5$ 和 U_3 的 [32], $\mathcal{S}_5$ 和 U_2 的 [32], $\mathcal{S}_2$ 和 U_1 的 [2] 不可约表示.

从以上例子看到 (1), (2), (3) 三种标志方法是一一对应的,

$$\phi^{(v)k}(\omega) = \left| \begin{pmatrix} [v] \\ (m) \end{pmatrix} \right\rangle = \phi^{(v)}(W). \quad (16)$$

可根据需要采用任一种标志. 但用 Yamanouchi 数 r_m 标志则不唯一, 可以有几个 r_m 对应于同一个态, 它也无法表明例如 (i) 不是 $\mathcal{S}_4$ 的不可约基等, 而且也无法从 r_m 中剔除假的 Yamanouchi 数. 这再次表明了用量子数 $\lambda_f, \lambda_{f-1} \cdots \lambda_2$ 代替 Yamanouchi 数的优越性. 对态指标没有重复的情形, 即对 $\mathcal{S}_f$ 群标准基 (U_n 群特殊 Gelfand 基), 则以上四种标志法都是一一对应的.

参 考 文 献

- [1] 陈金全、王凡、高美娟, 物理学报, **26** (1977), 307.
- [2] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure I*, p. 119 (1969) Benjamin.
- [3] H. Weyl, *The Classical Group* (1949) Princeton.
- [4] M. Moshinsky, *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 691.
- [5] K. J. Lezu, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1387.
- [6] A. Partensky, *J. Math. Phys.*, **13** (1972), 1503.
- [7] I. M. Gelfand and M. L. Zetlin, *Dokl. Akad. Nauk., SSSR* **71** (1950), 825. G. E. Baird and L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 1449.

PHYSICAL METHOD OF GROUP REPRESENTATION THEORY (II)

THE QUASI-STANDARD BASES OF PERMUTATION GROUP AND THE GELFAND BASES OF UNITARY GROUP

CHEN JIN-CHUAN WANG FAN GAO MEI-JUAN

(Department of Physics, Nanjing University)

ABSTRACT

This paper analyses the contradictions which would appear when one applies the traditional theory of group representation to $\mathcal{S}_l$ —the permutation group on state indices. It is pointed out that when repeated state indices occur, the permutation operator of $\mathcal{S}_l$ will become undefined. According to [1], we generalise naturally the concepts of the irreducible bases for such case and give a unambiguous definition of the so called quasi-standard bases of group $\mathcal{S}_l$. Furthermore we have proved that the quasi-standard bases of group $\mathcal{S}_l$ are just the Gelfand bases of group SU_n . Hence the eigenfunction method^[1] can also be used to calculate the Gelfand bases of group SU_n .