

非线性场量子化展开的推广*

殷 鹏 程

(复旦大学物理系)

提 要

为了对以规范场为框架来建立强子的孤子(soliton)模型进行探索,在本文中,我们把李政道提出的非线性场孤子型解的量子化展开的方法加以推广,使它适用于更广泛的其中包括规范场的情况。所得结果与李政道的结果有相似的形式,但有若干相应量包含有更丰富的内容,参看(33—37)式。

一、引 言

在基本粒子研究中,近来对于在非线型场论(例如规范场)中出现有限能量的经典解感到很大兴趣,因为它们可能具有孤子的某些性质,以致可以看作是强子延伸体模型(例如对偶弦、袋模型)的经典近似。

在经典理论水平上对孤子的研究已有详细总结^[1],不过其中大多限于讨论一维空间的波动。在量子理论水平上,最近 R. F. Dashen 等人^[2]讨论了用 Feynman 路线积分来处理非线型场的 W-K-B 的半经典近似问题。J. Goldstone 和 R. Jackiw^[3]讨论了非线型场孤子型特解的相应解释问题。C. G. Callen 和 D. J. Gross 讨论了孤子的量子微扰问题^[4]。李政道等^[5]讨论了对于孤子型特解的量子化展开问题,并提供了一套类似常用的正则量子化方法,不过他所介绍的方法只适用于以下形式的拉氏函数:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial X_\mu} \right)^2 - g^{-2} V(g\varphi^i).$$

也就是 $\mathcal{L}$ 中的所谓动能部分(第一项)中只含有对角部分,不含有非对角部分。而势能部分(第二项)中只含有场量本身,而不含有场对时空的微商。实际上符合这样限制的体系是不多的,例如近来在基本粒子研究中广泛应用的规范场论就不满足以上要求。

本文的目的就在于把李政道所提出的正则量子化方法加以推广,使之适用于更广泛的体系,其中包括规范场情况,即 $\mathcal{L}$ 中动能部分包括非对角部分,而势能部分包括场对时空的微商。在这样更广泛的体系中,一般不能保证理论是可重整化的,不过对于规范场来讲,近来对它的重整化的研究进展很大,我们认为规范场论可以属于可重整化理论之列。关于规范场论的重整化问题本身则不属本文讨论范围之内。

* 1976 年 3 月 29 日收到。

二、一般公式

考虑体系的拉氏函数为

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{2} g^{\mu\nu} h^{ij} \frac{\partial \varphi^i}{\partial X_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial X_\nu} - g^{-2} V \left(g \varphi^i, g \frac{\partial \varphi^i}{\partial X_\mu} \right), \quad (1)$$

其中上指标 i, j 统一表示不同的场,也表示同一种场的不同内部自由度. 可以适当安排使 $g^{\mu\nu}$ 和 h^{ij} 都是对称的. 势函数 V 是 φ^i 及其一次微商 $\frac{\partial \varphi^i}{\partial X_\mu}$ 的函数. 假定 V 可分成 V_I 和 V_{II} 两部份,其中 V_{II} 只包含与 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 有关部份,而且只存在 $\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}$ 的线型项. 这种分解是为了便于用正则的方法来进行量子展开,形式上破坏了洛伦兹协变性,但并不影响理论的协变性的实质.

可以把 φ^i 的某一特定孤子型经典特解写成

$$\varphi^i = g^{-1} \sigma^i(\mathbf{x}, 0, Z_1(t) \cdots Z_K(t)). \quad (2)$$

代入场方程可得到

$$g^{\mu\nu} h^{ij} \partial_\mu (\partial_\nu \sigma^i) + \partial_\mu \frac{\partial V}{\partial (\partial_\mu \sigma^i)} - \frac{\partial V}{\partial \sigma^i} = 0. \quad (3)$$

σ^i 对时间的依赖关系可通过 K 个 $Z_i(t)$ 来表达, K 的数目与空间维数和孤子的个数有关.

类似文献[5]的作法把一般的 φ^i 在 $g^{-1} \sigma^i$ 附近展开:

$$\varphi^i(\mathbf{x}) = g^{-1} \bar{\sigma}^i = g^{-1} \sigma^i(\mathbf{x}, Z_1 \cdots Z_K) + \sum_{n=K+1}^{\infty} q_n(t) \phi_n^i(\mathbf{x}, Z_1 \cdots Z_K). \quad (4)$$

以下我们省略求和符号,凡有 n (或者 n') 重复出现者均表示自 $K+1$ 到 ∞ 求和. 上式中 $\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K}$ 和 ϕ_n^i 形成一组完整系,它满足以下正交关系:

$$\begin{aligned} \int d\tau h^{ij} \phi_n^i \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_K} &= 0, \\ \int d\tau h^{ij} \phi_n^i \phi_{n'}^j &= \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (5)$$

把(4)式代入(1)式,可把体系的拉氏函数 L 用 σ 和 $q_n \phi_n$ 表示出来,并把时空部份分开:

$$\begin{aligned} L = \int \mathcal{L} d\tau &= \int d\tau \left\{ \frac{-1}{2} g^{lm} h^{ij} \partial_l (g^{-1} \bar{\sigma}^i) \partial_m (g^{-1} \bar{\sigma}^j) \right. \\ &\quad - g^{l0} h^{ij} \partial_l (g^{-1} \bar{\sigma}^i) \cdot \left(g^{-1} \dot{Z}_K \frac{\partial \bar{\sigma}^j}{\partial Z_K} + \dot{q}_n \phi_n^j \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{00} h^{ij} \left(g^{-1} \dot{Z}_K \frac{\partial \bar{\sigma}^i}{\partial Z_K} + \dot{q}_n \phi_n^i \right) \left(g^{-1} \dot{Z}_{K'} \frac{\partial \bar{\sigma}^j}{\partial Z_{K'}} + \dot{q}_{n'} \phi_{n'}^j \right) \\ &\quad \left. - g^{-2} V \left(\bar{\sigma}, \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

对空间积分后 L 将是 $Z_K, \dot{Z}_K, q_n$ 和 $\dot{q}_n$ 的函数. 取 Z_K 和 q_n 为广义坐标,与之对应的广

义动量为 $P_K \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_K}$, $\Pi_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$. 可以证明它们满足以下关系:

$$\begin{aligned}\Pi_n &= M_{nK} \dot{Z}_K + M_{nn'} \dot{q}_{n'} + \Pi_n^0, \\ P_K &= M_{KK'} \dot{Z}_{K'} + M_{Kn} \dot{q}_n + P_K^0,\end{aligned}\quad (7)$$

其中

$$M_{nK} = \int d\tau (-g^{00}) \cdot h^{ij} \phi_n^i q_{n'} \cdot \frac{\partial \phi_{n'}^j}{\partial Z_K} = M_{Kn}, \quad (8)$$

$$M_{nn'} = \int d\tau (-g^{00}) h^{ij} \phi_n^i \phi_{n'}^j = -g^{00} \delta_{nn'}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}M_{KK'} &= \int d\tau (-g^{00}) h^{ij} \left\{ g^{-2} \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} + g^{-1} \left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \phi_n^j}{\partial Z_{K'}} q_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q_n \frac{\partial \phi_n^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right) + q_n \frac{\partial \phi_n^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \phi_{n'}^j}{\partial Z_{K'}} q_{n'} \right\} \\ &= M(-2)_{KK'} + M(-1)_{KK'} + M(0)_{KK'} = M_{K'K},\end{aligned}\quad (10)$$

$$\Pi_n^0 = - \int d\tau \left[g^{i0} h^{ij} \partial_i (g^{-1} \bar{\sigma}^j) \phi_n^j + g^{-2} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n} \right] = \Pi^0(-1)_n + \Pi^0(0)_n, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}P_K^0 &= - \int d\tau \left[g^{i0} h^{ij} \partial_i (g^{-1} \bar{\sigma}^j) \cdot \frac{\partial (g^{-1} \bar{\sigma}^j)}{\partial Z_K} + g^{-2} \frac{\partial V}{\partial \dot{Z}_K} \right] \\ &= g^{-2} P_K^0(-2) + g^{-1} P_K^0(-1)_n q_n + q_n P_K^0(0)_{nn'} q_{n'}.\end{aligned}\quad (12)$$

这里

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial V}{\partial (\partial_i \bar{\sigma}^i)} g \phi_n^i; \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{Z}_K} = \frac{\partial V}{\partial (\partial_i \bar{\sigma}^i)} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}^i}{\partial Z_K}. \quad (13)$$

为了以后的计算, 我们在这里把各量按 g 的幂级数展开, 并以 $-2, -1$ 或 0 来分别表明正比于 g^{-2}, g^{-1} 和 g^0 各项, 例如

$$\begin{aligned}P_K^0(-2) &= - \int d\tau \left[g^{i0} h^{ij} \frac{\partial \sigma^i}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_K} + \frac{\partial V_{\Pi}}{\partial (\partial_i \sigma^i)} \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \right], \\ P_K^0(-1)_n &= - \int d\tau \left[-2 g^{i0} h^{ij} \left(\partial_i \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_K} \right) + \frac{\partial^2 V_{\Pi}}{\partial \sigma^i \cdot \partial (\partial_i \sigma^i)} \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial V_{\Pi}}{\partial (\partial_i \sigma^i)} \right) \right] \phi_n^j + \frac{\partial}{\partial Z_K} \int d\tau \left(g^{i0} h^{ij} \frac{\partial \sigma^i}{\partial X_i} + \frac{\partial V_{\Pi}}{\partial (\partial_i \sigma^i)} \right) \cdot \phi_n^j, \quad (14) \\ P_K^0(0)_{nn'} &= - \int d\tau \phi_n^i \left[-g^{i0} h^{ij} \partial_i \cdot \frac{\partial}{\partial Z_K} + \frac{\partial^2 V_{\Pi}}{\partial \sigma^i \cdot \partial (\partial_i \sigma^i)} \cdot \frac{\partial}{\partial Z_K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_{\Pi}}{\partial \sigma^i \cdot \partial (\partial_i \sigma^k) \partial \sigma^j} \frac{\partial \sigma^k}{\partial Z_K} \right] \phi_{n'}^j.\end{aligned}$$

把 P_K 和 Π_n 统一写成 $\mathcal{P}$, 同时把 $\dot{Z}_K$ 和 $\dot{q}_n$ 统一写成 $\dot{\mathcal{Z}}$, 并把 M 作相应扩展写成矩阵 $\mathcal{M}$, 则 (7) 式可简化写成矩阵形式

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{M} \dot{\mathcal{Z}} + \mathcal{P}^0, \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{M}^{-1} (\mathcal{P} - \mathcal{P}^0).\end{aligned}\quad (15)$$

把 (8)–(14) 式代入 (6) 式, 可把 L 写成

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathcal{Z}} \mathcal{M} \dot{\mathcal{Z}} + \mathcal{P}^0 \dot{\mathcal{Z}} - \int d\tau \left[\frac{1}{2} g^{lm} h^{ij} \partial_l (g^{-1} \bar{\sigma}^i) \partial_m (g^{-1} \bar{\sigma}^j) + g^{-2} V_1 \left(\bar{\sigma}, \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} \right) \right]. \quad (16)$$

以上已考虑到 V_{II} 中只含有 $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}$ 的线型项.

由上式可导出哈密顿函数

$$H = \mathcal{P} \cdot \dot{\mathcal{Z}} - L = \frac{1}{2} (\mathcal{P} - \mathcal{P}^0) \mathcal{M}^{-1} (\mathcal{P} - \mathcal{P}^0) + \int d\tau \left[\frac{1}{2} g^{lm} h^{ij} \partial_i (g^{-1} \bar{\sigma}^j) \cdot \partial_m (g^{-1} \bar{\sigma}^j) + g^{-2} V_1 \right]. \quad (17)$$

如令 $\mathcal{P}^0 = 0$, 且 $g^{lm} = \delta^{lm}$, (17) 式即为文献 [5] 的 (2.5) 式.

以 $\mathcal{P} = -i \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}}$ 代入 (17) 式, 类似文献 [5] (2.13) 式的考虑, 可得

$$H = \frac{-1}{2} J^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}} - i \mathcal{P}^0 \right) \mathcal{M}^{-1} J \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}} - i \mathcal{P}^0 \right) + \int d\tau \mathcal{V} \left(\bar{\sigma}, \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} \right), \quad (18)$$

其中 J 就是文献 [5] 的 (2.12) 式所写的

$$J = \det A. \quad (19)$$

而 $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cdot \tilde{\mathcal{A}}$, 且 $\mathcal{A} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\mathcal{V} \left(\bar{\sigma}, \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} \right) = \frac{1}{2} g^{lm} h^{ij} \partial_i (g^{-1} \bar{\sigma}^j) \cdot \partial_m (g^{-1} \bar{\sigma}^j) + g^{-2} V_1. \quad (20)$$

在具体计算时, 需要把 H 按 g 的幂级数展开. 为此, $\mathcal{M}^{-1}$ 要用 $\mathcal{M}$ 的矩阵元表示出来. 由 (8)–(10) 式容易看出, $\mathcal{M}$ 具有以下形式:

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} M_{KK'} & M_{Kn'} \\ M_{nK'} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & 1 \end{vmatrix}.$$

可以直接验证 $\mathcal{M}^{-1}$ 具有以下形式:

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{vmatrix} (A - BC)^{-1} & -(A - BC)^{-1} \cdot B \\ -C(A - BC)^{-1} & 1 + C(A - BC)^{-1} \cdot B \end{vmatrix}.$$

可是在计算逆阵 $(A - BC)^{-1}$ 时, 还是很麻烦, 为了简化计算, 类似文献 [5] 的考虑, 利用 Z_K 的性质, 即可通过 Z_K 之间的适当变换, 使得只有一个 $\dot{Z}_K = U_K \neq 0$, 而其余的 $\dot{Z}_K$ 都等于零. 这样 $(A - BC)^{-1}$ 就简化为一个数 $(M_{KK} - M_{Kn} M_{nK})^{-1}$. 现把计算中用到的若干关系罗列于下. 例如 (10) 式展开的具体形式如下:

$$M(-2) = g^{-2} \int d\tau (-g^{00}) h^{ij} \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_K} \equiv g^{-2} (M_0), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M^2(-1) &= 4g^{-2} \left[\int d\tau (-g^{00}) h^{ij} \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \psi_n^j}{\partial Z_K} q_n \right]^2 \\ &= -4g^{-2} (g^{00})^2 q_n \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \right)_{nK} \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \right)_{Kn'} q_{n'} (M_0), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M(0) &= \int d\tau (-g^{00}) h^{ij} q_n \frac{\partial \psi_n^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \psi_{n'}^j}{\partial Z_K} q_{n'} \\ &= g^{00} q_n \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \right)_{nN} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \right)_{Nn'} q_{n'}, \end{aligned} \quad (23)$$

上式对 N 求和遍及 K 和所有 n .

$$M_{Kn}M_{nK} = -(g^{00})^2 q_n \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \right)_{nn''} \left(\frac{\partial}{\partial Z_K} \right)_{n''n'} q_{n'}. \quad (24)$$

上式对 n'' 求和遍及所有 n 但不包括 K . 由以上关系可以得出 $(\mathcal{M}^{-1})_{KK'}$ 和 $(\mathcal{M}^{-1})_{Kn}$ 的最高级为 $\sim g^2$, 而 $(\mathcal{M}^{-1})_{nn'}$ 的最高级为 $\sim g^0$. 根据以上数量级的分析, 可以把 H 的本征方程按 g 的幂级数展开.

三、本征方程按 g 的幂级数展开

考虑 H 的本征方程

$$(H - \varepsilon)\Psi_\alpha(Z, q) = 0, \quad (25)$$

其中下指标 α 表明对某一定的经典解 σ_α , 以下从略. 上式一般求解是困难的, 我们只希望按 g 展开而逐级求解. 类似文献 [5] 考虑, 取态矢量 Ψ 有以下形式:

$$\Psi(Z, \dot{q}) = e^{iS(Z)/g^2} \cdot \chi(Z, q). \quad (26)$$

这种选取实际隐含着假定经典解占主要地位. 由 (18) 式, H 作用到 Ψ 上去的最高级项 $\sim g^{-2}$ 如下:

$$\begin{aligned} H(g^{-2}) &= \frac{1}{2} g^{-2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P^0(-2) \right)_K (M_0)_{\bar{K}K'} \left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P^0(-2) \right)_{K'} \right] \\ &\quad + \int d\tau \mathcal{V}(\sigma, \partial_i \sigma). \end{aligned} \quad (27)$$

H 作用 Ψ 上去的次高级项 $\sim g^{-1}$ 如下:

$$\begin{aligned} H(g^{-1}) &= \frac{-1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P(-2) \right) M_0^{-1} M(-1) M_0^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P^0(-2) \right) \\ &\quad + \int d\tau \left[-g^{lm} h^{ij} \frac{\partial^2 \sigma^l}{\partial X_l \partial X_m} + \frac{\partial V_1}{\partial \sigma^i} - \partial_i \frac{\partial V_1}{\partial (\partial_i \sigma^i)} \right] g^{-1} q_n \phi_n^i \\ &\quad - g^{-1} P_K^0(-1) q_n U_K. \end{aligned} \quad (28)$$

以场方程 (3) 和 (14) 式代入 (28) 式, 并经简化可得

$$\begin{aligned} H(g^{-1}) &= \left[\left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P^0(-2) \right)_K (M_0^{-1})_{Kl} (M_0)_{l'K'} \left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P^0(-2) \right)_{K'} \right. \\ &\quad \left. - \dot{Z}_l \dot{Z}_{l'} \right] \cdot \int d\tau h^{ij} g^{-1} (-g^{00}) q_n \phi_n^i \frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial Z_l \partial Z_{l'}} \\ &\quad + g^{-1} \int d\tau \left[\frac{\partial^2 V_{II}}{\partial \sigma^j \cdot \partial (\partial_i \sigma^i)} \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} - \frac{\partial V_{II}}{\partial \sigma^i} \right] \phi_n^i q_n \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \left[g^{l0} h^{ij} \frac{\partial \sigma^i}{\partial X_l} + \frac{\partial V_{II}}{\partial (\partial_i \sigma^i)} \right] \phi_n^i \right\} q_n. \end{aligned} \quad (29)$$

前面已假定 V_{II} 中只含有 $\partial_i \sigma^i$ 的线型项, 因而上式第二个积分为零. 最后一个积分项实际就是 $-\frac{\partial}{\partial t} \Pi^0(-1)$. 对于静态解 σ 不是时间的函数, 最后一项括号内 $\frac{\partial}{\partial t} \Pi^0 = 0$. 因此如果我们取 S 满足以下方程:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial Z} - g^2 P^0(-2) \right)_K = (M_0)_{KK'} \dot{Z}_{K'}. \quad (30)$$

则 (29) 式为零, 即 $H(g^{-1}) = 0$. 关于满足 (30) 式的 S 函数的存在性将在附录中证明.

把 (30) 式代入 (27) 式, 即可看出, $\sim g^{-2}$ 级的本征方程解 $(H(g^{-2}) - \varepsilon(g^{-2})) = 0$, 亦即经典的 Hamilton-Jacobi 偏微分方程, 而 S 函数就是经典的 Jacobi 函数, 且 $\varepsilon(g^{-2})$ 就是对应于特解 σ 的经典能量:

$$\varepsilon(g^{-2}) = \frac{1}{2} U_K (M_0)_{KK'} U_{K'} + g^{-2} \int d\tau \left[\frac{1}{2} g^{lm} h^{ij} (\partial_l \sigma^i) (\partial_m \sigma^j) + V_l(\sigma, \partial_l \sigma) \right]. \quad (31)$$

$\sim g^0$ 级的本征方程最后归结为相应的算符作用到 χ 上, 其相应的算符如下:

$$\begin{aligned} H(g^0) = & \frac{-1}{2} \left\{ -3q_n \left(\frac{\partial}{\partial Z} \right)_{nK} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial Z} \right)_{Kn'} q_{n'} U_K U_K + 2iU_K \frac{\partial}{\partial Z_K} \right. \\ & + \left(-i \frac{\partial}{\partial q} - \Pi^0 \right)_n M_{nK} U_K + U_K M_{Kn} \left(-i \frac{\partial}{\partial q} - \Pi^0 \right)_n \\ & - \left(-i \frac{\partial}{\partial q} - \Pi^0 \right)_n \left(-i \frac{\partial}{\partial q} - \Pi^0 \right)_n \left. \right\} - \frac{i}{2} J^{-1} \frac{\partial J}{\partial Z_K} U_K \\ & + q_n \int d\tau \frac{1}{2} \left[g^{lm} h^{ij} \frac{\partial \phi_n^i}{\partial X_l} \cdot \frac{\partial \phi_{n'}^j}{\partial X_m} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^i \cdot \partial \sigma^j} \phi_n^i \phi_{n'}^j \right. \\ & + \frac{\partial^2 V_1}{\partial (\partial_l \sigma^i) \cdot \partial (\partial_m \sigma^j)} (\partial_l \phi_n^i) (\partial_m \phi_{n'}^j) + \frac{\partial^2 V_1}{\partial (\partial_l \sigma^i) \cdot \partial \sigma^j} (\partial_l \phi_n^i) \phi_{n'}^j \\ & + \left. \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^i \cdot \partial (\partial_l \sigma^j)} \phi_n^i (\partial_l \phi_{n'}^j) \right] q_{n'} + q_n \left[\frac{1}{2} P_K^0 (-1)_n (M_0^{-1})_{KK'} P_{K'}^0 (-1)_{n'} \right] q_{n'} \\ & + q_n P_K^0 (0)_{nn'} U_K q_{n'}. \end{aligned} \quad (32)$$

经过整理, $\sim g^0$ 本征方程归结为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{-i}{2} J^{-1} \frac{\partial J}{\partial Z_K} U_K - iU_K \frac{\partial}{\partial Z_K} + \frac{1}{2} \Pi_n^* \Pi_n^* + \frac{1}{2} q_n F_{nn'} q_{n'} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\Pi_n^* G_{nn'} q_{n'} - q_n G_{nn'} \Pi_n^*) - \varepsilon(g^0) \right] \chi(Z, q) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

上式除去 (32) 式中的最后两项和文献 [5] 的 (2.30) 式形式一致, 但相应项都含有更多的内容, 例如其中

$$\Pi_n^* = \left(-i \frac{\partial}{\partial q} - \Pi^0 \right)_n, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} F_{nn'} = & \int d\tau \phi_n^i \left[-g^{lm} h^{ij} \frac{\partial}{\partial X_l} \cdot \frac{\partial}{\partial X_m} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^i \cdot \partial \sigma^j} + \frac{\bar{\partial}}{\partial X_l} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial (\partial_l \sigma^i) \cdot \partial \sigma^j} \right) \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial X_l} \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial (\partial_l \sigma^i) \partial (\partial_m \sigma^j)} \cdot \frac{\partial}{\partial X_m} \right) + \left. \frac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma^i \cdot \partial (\partial_l \sigma^j)} \cdot \frac{\partial}{\partial X_l} \right] \phi_{n'}^j \\ & + \left[\frac{1}{2} P_K^0 (-1)_n (M_0)_{\bar{K}\bar{K}'} P_{K'}^0 (-1)_{n'} \right] + P_K^0 (0)_{nn'} U_K \\ & + 3U_K U_K f_{nK} (M_0^{-1})_{KK'} f_{n'K'}, \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $\bar{\partial}$ 表明 $\frac{\partial}{\partial X_l}$ 作用到左边 ϕ_n^i 上.

这里当取 $-g^{00} = 1$ 时,

$$f_{nK} = \int d\tau h^{ij} \phi_n^i \frac{\partial}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_K} = -f_{Kn}, \quad (36)$$

$$G_{n'n} = \left[\int d\tau (-g^{00}) h^{ij} \phi_n' \frac{\partial}{\partial Z_K} \phi_{n'}' \right] U_K = -G_{nn'}. \quad (37)$$

而 $P_K^0(-1)_n$ 和 $P_K^0(0)_{nn'}$ 则由 (14) 式给出.

四、静态解的量子展开

以上所得结论确实是够复杂的, 不过对于静态解 $U_K = 0$ 的情况, 问题可以有所简化. 如前所述, $\varepsilon(g^{-2})$ 就是对应特解 σ 的经典能量, 对于静态解 (31) 式就简化为

$$\varepsilon(g^{-2}) = g^{-2} \int d\tau \left[\frac{1}{2} g^{lm} h^{ij} \frac{\partial \sigma^i}{\partial X_l} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial X_m} + V_1(\sigma, \partial_l \sigma) \right]. \quad (38)$$

此外, 对于静态解的 $\varepsilon(g^{-1}) = 0$ 已在上节说明. 因而对于静态解量子效应起自 g^0 级项, 而且此时 (37) 式的 $G_{nn'} = 0$, (35) 式中的 f_{nK} 和 $P_K^0(0)$ 项均为零. 这样 (33) 式就简化为

$$\left[\frac{1}{2} (\Pi_n^* \Pi_n^* + q_n F_{nn'} q_{n'}) - \varepsilon(g^0) \right] \chi = 0. \quad (39)$$

这实际上是一组 (无限维) 谐振子的本征方程. 对此方程要求得本征值 $\varepsilon(g^0)$, 只需要把 $F_{nn'}$ 对角化. $F_{nn'}$ 中方括号内的贡献可看作是方括号内算符对于 ϕ_n 和 $\phi_{n'}$ 的矩阵元记以 $[F]_{nn'}$, 它的对角化较简单. 不过其余还有 $\frac{1}{2} P^0(-1) M_0^{-1} P^0(-1)$ 一项含有两个积分的乘积不能简化为 $\int d\tau \phi_n L \phi_{n'}$ 的形式, 对角化就比较麻烦. 然而在很多情况下, 对于静态解可以证明这项的贡献为零.

如果选取 ϕ_n 为 $[F]$ 算符的本征态, 就自然使 $[F]_{nn'}$ 对角化了, 而这样选取的可能性在于与它正交的 $\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K}$ 也是 $[F]$ 算符的本征态. 下面对此进行检查. 利用静态解的场方程 (3) 式

$$g^{lm} h^{ij} \partial_l (\partial_m \sigma^j) + \partial_l \frac{\partial V}{\partial (\partial_l \sigma^i)} - \frac{\partial V}{\partial \sigma^i} = 0.$$

把上式对 $\frac{\partial}{\partial Z}$ 微分, 并代入 (35) 式中的 $[F]$, 可以证明

$$[F] \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} = - \frac{\partial^2 V_{II}}{\partial \sigma^i \cdot \partial \sigma^i} \cdot \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K}. \quad (40)$$

在文献 [5] 所讨论的情况下, 势能中不含有 V_{II} 项, 上式右方为零. 因而 $\frac{\partial \sigma}{\partial Z}$ 确是 $[F]$ 的本征态, 而且本征值为零. 在我们所讨论的静态解附近展开的情况下, 根据我们的假定, $\frac{\partial^2 V_{II}}{\partial \sigma^i \cdot \partial \sigma^i} \sim \dot{\sigma} = 0$, 上式右方也保证为零. 因而在静态解附近展开的问题, 最后归结为求解 $[F]$ 算符的本征值和本征态的问题. 如果对应 ϕ_n 的本征值为 ω_n^2 , 即对角化后的 $[F]_{nn'}$ 为

$$[F]_{nn'} = \delta_{nn'} \omega_n^2. \quad (41)$$

则 (39) 式的本征值即为

$$\varepsilon(g_0) = \sum_n \omega_n \left(N_n + \frac{1}{2} \right), \quad (42)$$

其中 N_n 为粒子占有数 $N_n = 0, 1, 2, \dots$.

以上的讨论可以适当地推广,使得适用于 $\dot{Z}_K = U_K \ll 1$ 的准静态解情况. 这时可以忽略 U^2 以上的高级微量,而只保留 U 的线型项作为微扰来处理. 进一步讨论看来只有通过具体示例较为方便.

五、讨 论

前面我们推广了李政道所提出的量子展开方法,使之适用于更广泛的体系. 得到结论和文献 [5] 所给出的有相似形式,然而每一相应项都包含有更丰富的内容,并且证明了对于静态解附近展开的问题,最后归结为求解 $[F]$ 算符的本征值和本征态的问题. 对于非静态解的展开问题,我们所推广的方法还会遇到一些技术上的困难. 例如在第三节中,我们看到为要使 $H(g^{-1}) = 0$, 除了 S 要满足 (30) 式外,还要求 $\frac{\partial}{\partial t} \Pi^0(-1) = 0$ (或者 $< g$). 这一点在一般非静态情况下并不能得到保证. 不过,这时我们可以把 $H(g^{-1})$ 和 $H(g^0)$ 一并考虑,把 q_n 经过适当平移可以把 q_n 的一次项吸收到 q_n 的两次项中去,另外多出一项与 q_n 无关的常数,该常数一般具有 g^{-2} 数量级,实际上这相当于对 $\varepsilon(g^{-2})$ 作一个修正,因此 $\frac{\partial \Pi^0}{\partial t} \approx 0$ 并不是真正的困难.

一般情况下并不能保证 $P^0(-1)M_0^{-1}P^0(-1)$ 这一项为零,如前所述,这就使整个 F 对角化有困难. 不过一旦我们以某种方式选定了 ϕ_n , 例如取 ϕ_n 为 $[F]$ 的本征值不为零的本征态,在原则上,我们就可以求得 $P^0(-1)M_0^{-1}P^0(-1)$ 的矩阵元的具体表式. 虽然如此,要把无限维矩阵对角化,还是我们目前尚未克服的困难.

附 录

这里,我们将证明满足 (30) 式的 S 函数是存在的. 由于存在 P^0 项,这种证明就显得比较复杂. 这种存在性的一般证明主要在于证明 $\frac{\partial}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial S}{\partial Z_{K'}} = \frac{\partial}{\partial Z_{K'}} \cdot \frac{\partial S}{\partial Z_K}$.

$$\text{定义 } \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial Z_{K'}} \cdot \frac{\partial S}{\partial Z_K} - \frac{\partial}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial S}{\partial Z_{K'}}.$$

直接证明 Δ 明确是零是困难的. 下面考虑 Δ 对时间的变化. 由 (30) 式, (21) 和 (14) 式代入 Δ , 并对 t 微商得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = & - \int d\tau \left\{ g^{00} h^{ij} \left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} - \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_{K'}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_K} \right) + 2g^{i0} h^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial (\partial_i \sigma^i) \partial \sigma^j} - \frac{\partial^2 V}{\partial (\partial_i \sigma^i) \partial \sigma^{ij}} \right) \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (A1)$$

上式中第二项

$$\begin{aligned} & - 2 \int d\tau g^{i0} h^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right) \\ & = - 2 \int d\tau g^{i0} h^{ij} \left[- \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \right) \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} + \frac{\partial \sigma^i}{\partial Z_K} \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial \sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right]. \end{aligned} \quad (A2)$$

由于 $h^{ij} = h^{ji}$, 上式前面一项可由后面一项经过 $Z_K \longleftrightarrow Z_{K'}$ 变换并改变符号而得到.

我们可以着重考虑上式后面一项, 利用场方程(3)式, 可得到

$$\begin{aligned} - \int d\tau 2g^{i0}h^{ij} \frac{\partial\sigma^i}{\partial Z_K} \frac{\partial^2}{\partial t \partial X_l} \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} &= \int d\tau \left\{ g^{00}h^{ij} \frac{\partial\sigma^i}{\partial Z_K} \partial_t^2 \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} + g^{lm}h^{ij} \frac{\partial\sigma^i}{\partial Z_K} \partial_l \partial_m \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right. \\ &+ \frac{\partial\sigma^i}{\partial Z_K} \partial_\mu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial(\partial_\mu \sigma^i) \cdot \partial\sigma^i} \cdot \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right] - \frac{\partial\sigma^i}{\partial Z_K} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^i \cdot \partial\sigma^i} \cdot \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^i \cdot \partial(\partial_\mu \sigma^j)} \right. \\ &\left. \left. \cdot \frac{\partial}{\partial X_\mu} \left(\frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (A3)$$

上式中第一项和(A2)式中前面一项中的相应一项一起正好和(A1)式中的第一项抵销. 上式第二项和(A2)式的前面一项中的相应一项相互抵销. 上式第四项(最后括号内的前面一项)和(A2)式的前面一项中的相应一项相互抵销. 上式中第三项的对空间微商 ∂_i 部份可写成

$$\frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_K} \partial_i \left(\frac{\partial^2 V}{\partial(\partial_i \sigma^i) \cdot \partial\sigma^i} \cdot \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right) \Rightarrow \frac{-\partial\sigma}{\partial Z_{K'}} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^i \cdot \partial(\partial_i \sigma^i)} \partial_i \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_K}.$$

正好是(A3)式第五项(最后括号内后面一项)经过 $Z_K \longleftrightarrow Z_{K'}$ 所得到. 因而(A3)式第三项的 ∂_i 部份正好和(A2)式的前面一项中相应的第五项中的 ∂_i 部份相抵销. 同样(A2)式的前面一项中相应第三项的 ∂_i 部份和(A3)式中第五项中相应的 ∂_i 部份相抵销.

实际上, (A3)式的第三项和(A2)式中前面一项中的第五项可以合并写成 $\partial_\mu \left[\frac{\partial\sigma^i}{\partial Z_K} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial(\partial_\mu \sigma^i) \cdot \partial\sigma^i} \cdot \frac{\partial\sigma^j}{\partial Z_{K'}} \right]$,

其中空间部份积分后为零. 而对时间微商部份正好和(A1)式中第三项的前面一项相抵销. 同样(A3)式中第五项(最后括号内的后面一项)和(A2)式前面一项中的相应第三项合并正好和(A1)式中第三项的后面一项相抵销. 因而最终证明

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} = 0.$$

正如文献[5]指出, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $\Delta = 0$. 因此我们最终证明了S函数的存在性.

参 考 文 献

- [1] A. C. Seatt, F. Y. F. Chu & D. W. McKaughlin, *Proc. of IEEE*, **61** (1973), 1443.
- [2] R. F. Dashen, B. Hasslacher & A. Neveu, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 4114; 4130.
- [3] J. Goldstone & R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 1486.
- [4] C. G. Callen & D. J. Gross, *Nucl. Phys.*, **B93** (1975), 30.
- [5] N. H. Christ & T. D. Lee, Co-2271-55.

GENERALIZATION OF QUANTUM EXPANSION OF SOLITON SOLUTIONS

YIN PONG-CHENG

(Department of Physics, Fudan University)

ABSTRACT

As a means of establishing a soliton model based on gauge fields for hadrons, the quantum expansion method for soliton solutions recently proposed by T. D. Lee has been generalized to cover more general systems including gauge fields. Our results are similar to those obtained by T. D. Lee, but some of our quantities have a broader content, as in formula (33)---(37).