

规范条件和 Slavnov-Taylor 恒等式的破坏*

赵保恒 范洪义
(中国科学技术大学)

在规范场理论中,采用某些规范条件时,由微扰论得到 $\langle F_a \rangle_0 \neq 0$ 的结果 (F_a 是规范函数),导致 ST 恒等式的破坏^[1]. 而在证明可重整化的规范场理论的规范无关性时,ST 恒等式起着根本的作用,因此弄清楚上述 ST 恒等式的破坏和规范无关性的关系是有意义的. 本文先说明 ST 恒等式所要求的 $\langle F_a \rangle_0 = 0$, 来源于 't Hooft 量子化规则,而不是规范不变性的结果,并说明微扰论为什么可能得到 $\langle F_a \rangle_0 \neq 0$. 然后证明 $\langle F_a \rangle_0 \neq 0$ 虽然导致 ST 恒等式破坏,但是在有些情况下, S 矩阵仍有规范无关性. 即使规范无关性破坏,但是通过修改 't Hooft 的量子化规则,仍能得到规范无关的 S 矩阵.

采用文献 [2] 的记号,所有场量均用 ϕ_i 表示,无穷小规范变换写成

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \phi_i + (\Lambda_i^\alpha + t_{ij}^\alpha \phi_j) \omega_\alpha, \quad (1)$$

i, α 既代表时空坐标,又表示内部变量, ω_α 是无穷小群参数. 重复的指标表示求和与积分. ST 恒等式可以写成

$$\left\{ F_a \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] - J_i \left(\Lambda_i^\beta + t_{ij}^\beta \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_j} \right) M_{\beta a}^{-1} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} W[J] = 0, \quad (2)$$

其中 $W[J]$ 是格林函数的母泛函,

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\delta F_\alpha}{\delta \phi_i} (\Lambda_i^\beta + t_{ij}^\beta \phi_j). \quad (3)$$

在 (2) 式中取 $J = 0$, 就有 $\langle F_a \rangle_0 = 0$. 这和规范不变性有什么关系呢? 为了回答这个问题,我们回顾基本的量子化公式,当规范条件为 $F_a[\phi] = a_a(x)$ 时 ($a_a(x)$ 是不含场量的任意函数),

$$W[J] = \int [d\phi] \Delta_F[\phi] \prod_a \delta(F_a - a_a) \exp\{iS[\phi] + iJ_i \phi_i\}. \quad (4)$$

由此式求出的物理态之间的 S 矩阵,在外线重整化后和 a_a 无关. 因此, 't Hooft 建议用

$$W[J] = \int [da] \prod_a H[a_a] \int [d\phi] \Delta_F[\phi] \prod_a \delta(F_a - a_a) \exp\{iS[\phi] + iJ_i \phi_i\} \quad (5)$$

代替 (4) 式^[3], 其中 $\prod_a H[a_a]$ 是权函数,按照 't Hooft 的建议,通常取

* 1977 年 1 月 17 日收到.

$$\prod_a H[a_a] = \exp\{-ia_a^2/2\}. \quad (6)$$

于是得量子化公式

$$W[J] = \int [d\phi] \Delta_F[\phi] \exp\left\{i\left(S[\phi] - \frac{1}{2}F_a^2 + J_i\phi_i\right)\right\}. \quad (7)$$

根据(5)式,

$$\begin{aligned} \langle F_a \rangle_0 &\propto \int [da] \prod_a H[a_a] \int [d\phi] \Delta_F[\phi] F_a[\phi(x)] \prod_a \delta(F_a - a_a) \exp\{iS[\phi]\} \\ &= \int [da] a_a(x) \prod_a H[a_a] \int [d\phi] \Delta_F[\phi] \prod_a \delta(F_a - a_a) \exp\{iS[\phi]\}. \end{aligned} \quad (8)$$

可以证明 $\int [d\phi] \Delta_F[\phi] \prod_a \delta(F_a - a_a) \exp\{iS[\phi]\}$ 和 a_a 无关. 因此, 如果 $H[a_a]$ 是 a_a 的偶函数, 则 $\langle F_a \rangle_0 = 0$. 通常按(6)式取 $\prod_a H[a_a] = \exp\{-ia_a^2/2\}$, 显然有 $\langle F_a \rangle_0 = 0$. ST 恒等式是用(7)式中的 $W[J]$ 求出的, 它当然包含着 $\langle F_a \rangle_0 = 0$ 的结果. 这样就看出, 它不是规范不变性的结果, 而是 't Hooft 量子化规则的结果.

从轨道积分方法看, 用微扰论求 $\langle F_a \rangle_0$, 就是计算

$$F_a \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \int [d\phi] \Delta_F[\phi] \exp\left\{i\left(S[\phi] - \frac{1}{2}F_a^2 + J_i\phi_i\right)\right\} \Big|_{J=0}. \quad (9)$$

运算的程序是先积分再微分, 然后令 $J = 0$. 如果 $F_a \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right]$ 和 $\int [d\phi]$ 的次序是可以交换的, 则(9)式就和(8)式中取 $\prod_a H[a_a] = \exp\{-ia_a^2/2\}$ 的结果相同, 于是 $\langle F_a \rangle_0 = 0$. 然而, 在某些规范条件下, 积分 $\int [d\phi] \cdots$ 对(9)式中有贡献的部分是发散的, 这时微分和积分的次序并不是可以交换的, 因此发生 $\langle F_a \rangle_0 \neq 0$ (微扰论计算)的情况, 并不奇怪.

二

本节说明 $\langle F_a \rangle \neq 0$ (微扰论计算), 并不总意味着规范无关性的破坏. 换言之, ST 恒等式是规范无关性的充分条件, 而非必要条件, 以标量电动力学为例说明之. 其拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4, \quad (10)$$

其中 μ^2 和 λ 是大于零的常数. 取规范函数

$$F = \partial_\mu A_\mu + \eta|\phi|^2,$$

其中 η 是常数. 由于平移不变性, $\langle \partial_\mu A_\mu \rangle_0 = 0$, 所以在单回路近似下,

$$\langle F \rangle_0 = -i\eta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + \mu^2 - i\epsilon} \neq 0.$$

因此在这种规范下, ST 恒等式不成立. 但是如果取 $F = \partial_\mu A_\mu$ (洛伦兹规范), 则 $\langle F \rangle_0 = 0$, ST 恒等式成立, 并且 S 矩阵是规范无关的么正的. 在上面两种规范条件下, Faddeev-Popov 鬼粒子都是自由粒子, 因此等效作用量中的规范补偿项可以忽略.

现在作 Bell-Treiman 变换,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \phi \rightarrow \phi \exp(ie\Lambda), \quad (11)$$

$$\text{其中 } \Lambda = \partial^{-2} \eta |\phi|^2 = \eta \int d^4 y D_F(x-y) |\phi(y)|^2, D_F(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikx}}{k^2 - i\epsilon}. \quad (12)$$

在这个变换下, $F = \partial_\mu A_\mu$ 变成 $F = \partial_\mu A_\mu + \eta |\phi|^2$. 同时 (10) 式中的 $\mathcal{L}$ 不变, 根据等价定理^[4], S 矩阵在变换 (11)–(12) 式下是不变的, 所以对于 (10) 式中的 $\mathcal{L}$, 取规范条件 $F = \partial_\mu A_\mu + \eta |\phi|^2 = 0$ 时, S 矩阵亦是规范无关的么正的. 特别是 S 矩阵应该和规范参数 η 无关. 因此 S 矩阵中所有含参数 η 的项互相抵消. 这一点很容易用具体例子加以检验. 在洛仑兹规范下, 采用维数重整化手续, 容易证明重整化所需要的拉氏量的抵消项 $\mathcal{L}_c$ 是规范不变的^[5]. 例如在单回路近似下, 对于标量电动力学,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c = & -\frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{n-4} \left\{ \frac{1}{24} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{e^2} \right) \mu^2 |\phi|^2 + \left(3\lambda - \frac{6\lambda^2}{e^2} - \frac{7}{2} e^2 \right) |\phi|^4 \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, n 是时空的维数. 由 $\mathcal{L}_c$ 的规范不变性, 从等价定理还可以推出, 在规范条件 $F = \partial_\mu A_\mu + \eta |\phi|^2 = 0$ 下, 在拉氏量中添加洛仑兹规范下所需要的抵消项 $\mathcal{L}_c$, 就能得到和洛仑兹规范下相同的有限的么正的 S 矩阵. 这一点也容易用具体例子加以检验.

上面的讨论说明, 即使 $\langle F_a \rangle \neq 0$, ST 恒等式不成立, 但在某些情况下, S 矩阵仍可能是规范无关的. 然而, 有时 $\langle F_a \rangle_0 \neq 0$ 确能导致规范无关性破坏. 在下一节中, 我们先举出这样的例子, 然后说明只要适当修改 't Hooft 的量子化规则, 就可以恢复规范无关性.

三

仍考虑标量电动力学. 取规范函数

$$F = \partial_\mu A_\mu + \xi A_\mu^2 + \zeta, \quad (14)$$

其中 ξ, ζ 是实的常数, 这时, 光子内线为 $-i\delta_{\mu\nu}/(k^2 + 2\xi\zeta - i\epsilon)$. 准确到单回路近似,

$$\langle F \rangle_0 = \zeta - 4i\xi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2\xi\zeta - i\epsilon} \neq 0. \quad (15)$$

因此 ST 恒等式不成立. 可看出, S 矩阵不是规范无关的. 例如对于介子-介子散射最低近似的 Feynman 图, 由于光子内线和 ξ, ζ 有关, 其 S 矩阵元也就依赖于规范参数 ξ, ζ .

为了得到规范无关的 S 矩阵, 可以适当修改 't Hooft 的量子化公式 (7), 为此用

$$\prod_a H[a_a] = \exp\{-(a_a - c_a)^2/2\} \quad (16)$$

代替 't Hooft 所建议的 (6) 式, 其中 c_a 是待定常数. 于是得到量子化公式

$$W[J] = \int [d\phi] \Delta_F[\phi] \exp\{i[S[\phi] - (F_a - c_a)^2/2 + J_i \phi_i]\}. \quad (17)$$

规定 c_a 的取法如下: 1. 如果按 (7) 式的 Feynman 规则计算, $\langle F_a \rangle_0 = 0$, 则取 (17) 式中的 $c_a = 0$. 亦即如果 $\langle F_a \rangle_0 = 0$, 就采用原来的 't Hooft 量子化规则. 2. 如果按 (7) 式的 Feynman 规则计算, $\langle F_a \rangle_0 \neq 0$, 就保留 c_a , 并且由

$$\langle F_a - c_a \rangle_0 = 0 \quad (18)$$

确定 c_a . 计算(18)式时采用(17)式(而非(7)式)的 Feynman 规则. (18)式和 ST 恒等式的要求一致, 因此这样取 c_a 就能够使规范无关性恢复.

在标量电动力学中, 取规范函数为 $F = \partial_\mu A_\mu + \xi A_\mu^2 + \zeta$ 时, c_a 就是 ζ . 实际上这时等效拉氏量为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} - (\partial_\mu A_\mu + \xi A_\mu^2)^2/2 + \bar{c}(\partial^2 - 2\xi A_\mu \partial_\mu)c, \quad (19)$$

其中 $\mathcal{L}$ 见(10)式, c 是 Faddeev-Popov 鬼粒子场. (19)式决定的光子内线为 $-i\delta_{\mu\nu}/(k^2 - i\epsilon)$. 在维数正常化下^[6],

$$\langle F - \zeta \rangle = \langle \partial_\mu A_\mu + \xi A_\mu^2 \rangle_0 = -4i\xi \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} = 0. \quad (20)$$

由于 ST 恒等式恢复, (19)式的 $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ 对应的重整化 S 矩阵是规范无关的. (20)式是单回路近似. 在任何级近似下, 规范无关性成立, 可证明如下. (19)式的 $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ 相当于在 't Hooft 量子化公式(7)中取

$$F = \partial_\mu A_\mu + \xi A_\mu^2. \quad (21)$$

但是(21)式可以由 $F = \partial_\mu A_\mu$ 通过 Bell-Treiman 变换, 取 $\Lambda = \xi \partial^{-2} A_\mu^2$ 得出(注意 $F = \partial_\mu A_\mu + \xi A_\mu^2 + \zeta$ 不能由 $F = \partial_\mu A_\mu$ 通过 Bell-Treiman 变换得出, 因为 ζ 项将导致 Λ 发散). 由等价定理, (19)式中 $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ 对应的 S 矩阵和洛仑兹规范下的 S 矩阵相同, 因此是规范无关的么正的, 把洛仑兹规范的抵消项 $\mathcal{L}_c$ 加到(19)式的右边, 就能得到和洛仑兹规范下相同的有限的么正的 S 矩阵.

参 考 文 献

- [1] B. de Wit, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 1843.
- [2] B. W. Lee, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 933.
- [3] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B33** (1971), 173.
- [4] Y.-M. P. Lam, *Phys. Rev.* **D7** (1973), 2943; M. C. Bergère and Y.-M. P. Lam, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3247.
- [5] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B50** (1972), 318. 或 CERN, 73—79 (1973), 13.9—13.10 节. 一般情况下, 抵消项 $\mathcal{L}_c$ 对未重整化的规范变换并不是不变的.
- [6] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B44** (1972), 189.

GAUGE CONDITIONS AND THE BREAKDOWN OF THE SLAVNOV-TAYLOR IDENTITIES

ZHAO BAO-HENG FAN HONG-YI

(University of Science and Technology of China)